Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Mecânica
2008

José Diogo Domingues dos Santos Corte-Real

Modelação e simulação de válvula misturadora com função poupança de água

DOCUMENTO PROVISÓRIO

Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Mecânica
2008

José Diogo Domingues dos Santos Corte-Real

Modelação e simulação de válvula misturadora com função poupança de água

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Dr. Vítor António Ferreira da Costa, Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro e do Dr. Jorge Augusto Fernandes Ferreira, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente	Prof. Dr. Doutor Vítor Manuel Ferreira dos Santos Professor Associado, em representação da Direcção de Curso Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro
Arguente	Prof. Doutor José Joaquim da Costa Professor Auxiliar Departamento de Engenharia Mecânica. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Orientador	Prof. Doutor Vítor António Ferreira da Costa Professor Associado Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro
Co-orientador	Prof. Doutor Jorge Augusto Fernandes Ferreira Professor Auxiliar Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Dedico este texto a todos os que partilharam o seu conhecimento e sabedoria comigo ao longo da minha vida, pois sem eles estas páginas estariam em branco.

agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me incentivaram e ajudaram ao longo do meu percurso académico. Em especial, gostaria de agradecer aos meus orientadores, Prof. Dr. Vítor Costa e Prof. Dr. Jorge Ferreira, pela incansável disponibilidade.

Gostaria de agradecer, ainda, aos meus pais por tudo o que fizeram para que eu pudesse concretizar o meu sonho.

palavras-chave

Modelação, Simulação, Válvula Misturadora, Poupança de Água, Mecânica de Fluidos, MatLab, Modelica, Simulink

resumo

Vive-se, actualmente, uma crise de recursos à escala planetária. Sendo a água um recurso fundamental importa optimizar o seu consumo. O presente trabalho propõe-se estudar uma válvula misturadora com função de poupança de água, pretendendo evitar o desperdício de água potável proveniente de uma fonte de água quente que ainda não se encontra à temperatura desejada. Para tal, o sistema possui um sensor de temperatura – um bolbo termo-expansível – e um reservatório. Desta forma, a água ainda fria proveniente da fonte quente será desviada para o reservatório e, mais tarde, reaproveitada num pedido usual de água fria. Este estudo será realizado através da modelação e optimização do sistema em ambiente Modelica, numa linguagem não-causal, e respectiva simulação em ambiente MatLab/Simulink, através de um método baseado no algoritmo de Rosenbrock de ordem 2. Desta forma será possível avaliar a resposta dinâmica do sistema a diversas solicitações e averiguar se existe uma mais-valia em relação às válvulas misturadoras usuais. Os primeiros resultados apontam para uma poupança de água entre os 67% e os 80% do volume usualmente desperdiçado.

keywords

Modelling, Simulation, Mixer Valve, Fresh-Water Save, Modelica, Fluids Mechanics, MatLab, Simulink

abstract

There's an ongoing increasing concern about worldwide resources. Freshwater is one of the most important resources and, therefore, it is vital to optimize it's consumption. It is the intent of this work to study a new system, composed by a mixer valve with a water-saving device. Freshwater entering the mixer from the hot stream that hasn't yet reached the desired temperature is diverted to a reservoir, thus preventing its waste. This operation is achieved by means of a temperature sensing bulb. The stored water in the reservoir is then available to a cold water request on the mixer valve. The modelling of this system is made in a non-casual language (Modelica) and its simulation on the MatLab/Simulink environment, using a modified Rosenbrock formula of second order. By analysing the results of different situations it will be possible to assess this system's surplus value when compared to a usual mixer valve. The first results show that this system is able to save up to 80% of the total volume usually wasted.

Simbologia

A	Área de secção transversal [m^2]
C_d	Coeficiente de descarga
E	Energia [J], Módulo de Young [Pa]
F	Força [N]
L	Comprimento [m]
L_C	Comprimento característico [m]
Nu	Número de Nusselt
P	Pressão [Pa]
Pr	Número de Prandlt
$\dot{Q}$	Caudal volumétrico [m^3/s]
R	Constante de gases ideais [$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$]
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
T	Temperatura [K]
V	Volume [m^3]
b	Coeficiente de atrito viscoso [$N\ s\ m^{-1}$]
c	Capacidade calorífica específica [$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$]
g	Aceleração da gravidade [m/s^2], Condutância de escoamento laminar [$m^3\ s^{-1}\ Pa^{-1}$]
h	Entalpia específica [$J\ kg^{-1}$]
h_L	Perda de carga localizada [m]
k	Constante de rigidez [$N\ m^{-1}$], Condutividade térmica [$W\ m^{-1}\ K^{-1}$]
m	Massa [kg]
t	Tempo [s]
v	Velocidade média de escoamento, velocidade linear [m/s]
y	Altura gravítica [m]

α	Coeficiente de dilatação linear [$m\ K^{-1}$]
α_T	Difusividade térmica [$m^2\ s^{-1}$]
β_e	Módulo de compressibilidade efectivo [Pa]
β_T	Coeficiente de expansão volumétrico [K^{-1}]
ζ	Coeficiente de perda de carga localizada
μ	Viscosidade [$N\ s\ m^2$]
υ	Viscosidade cinemática [m^2/s]
ρ	Massa específica [kg/m^3]

Índice de conteúdos

1. Introdução....1
1.1. Motivação....1
1.2. Objectivos....1

2. Estado da Arte....2

3. O Sistema Proposto....5
3.1. Descrição do Sistema....5
3.2. Modelação do Sistema....8
3.2.1. Conservação da massa....8
3.2.2. Equações de Escoamento....10
3.2.3 Equações de Quantidade de Movimento....17
3.2.4. Conservação da Energia....18
3.2.5. Equação do Bolbo....21
3.2.6. Trocas de Calor....21
3.3. Simulação do Sistema....24

4. Pré-dimensionamento do Sistema....28

5. Análise Dinâmica e Optimização do Sistema....35
5.1 Análise Dinâmica Preliminar do Sistema....35
5.2 Optimização de Parâmetros do Sistema....41
5.3. Análise Dinâmica do Sistema Optimizado....55

6. Conclusões....65

7. Bibliografia....70

8. Anexos....71
8.1. Volumes de Controlo....71
8.2. Dimensões Genéricas e Propriedades Físicas....74

1. Introdução

1.1. Motivação

O mundo assiste a um crescimento acentuado da sua população o que, inevitavelmente, aumenta a pressão sobre os recursos naturais do planeta. A água, sendo fundamental quer para o consumo humano como para numerosas aplicações industriais e agrícolas, afigura-se, então, como um recurso crítico [1], [2]. De facto, 97.5% da água do planeta é salgada, sendo que dos restantes 2,5%, apenas 0.26% se encontra acessível ao Homem [1]. Ainda de acordo com o mesmo estudo, o rácio de água disponível por pessoa tem vindo a diminuir, desde 1970 até aos dias de hoje, de 12600m^3/ano para 7600m^3/ano.

Torna-se, assim, imperativo o estudo de novas formas de obtenção de água potável, como a dessalinização da água do mar [3], bem como racionalizar e aumentar a eficiência da forma como a água é usada. Neste último aspecto, são numerosas as oportunidades, principalmente nos grandes centros urbanos, onde o consumo de água potável por pessoa é maior [4].

1.2. Objectivos

O presente trabalho tem por objectivo o estudo da possibilidade de poupança de água potável, mais especificamente em válvulas misturadoras de uso doméstico. São muitas as possibilidades de actuação, mas existe uma que sobressai pelo seu carácter evidente: aquando de um pedido de água quente, existe todo um volume de água potável ainda fria entre a válvula misturadora e a fonte de água quente (usualmente uma caldeira ou esquentador), que, geralmente, é desperdiçada por não satisfazer os requisitos de temperatura do utilizador. Este desperdício é completamente evitável e altamente dispendioso se atentarmos à energia usada no tratamento e transporte de água potável nas redes urbanas. Deste modo, são apresentados diversos sistemas já existentes para contornar este desperdício e proposto um novo, cujo comportamento dinâmico é analisado em pormenor.

2. Estado da Arte

São diversos os sistemas propostos para a poupança de água potável fria proveniente de uma fonte de água quente em instalações domésticas. De seguida são expostos os sistemas que mais se aproximam do funcionamento e espírito do sistema inovador proposto no presente trabalho.

[5] Patente EUA 4750472, registada por Dale J. Frazekas (USA), 1988

Trata-se de um dispositivo cujo conceito é aplicado sobretudo em instalações hoteleiras ou grandes habitações. Este dispositivo baseia-se num reservatório de água quente e numa bomba de recirculação por forma a que a temperatura da água no circuito da água quente nunca desça abaixo da desejada. Desta forma, qualquer pedido de água quente é imediatamente respondido sem que haja desperdício de água potável uma vez que a recirculação do volume de água entre a fonte de água quente e cada válvula misturadora evita que a sua temperatura desça. O sistema pretende-se completamente automatizado: sempre que a água no circuito desça abaixo da temperatura mínima aceitável, a bomba entra em funcionamento, forçando a recirculação de todo o volume de água no circuito até se atingir um novo patamar de temperatura.

[6] Patente EUA 4922943, registada por M.R.Gill (USA), 1990

Este sistema pretende dar resposta a um outro tipo de desperdício de água. Este desperdício deve-se à necessidade de reajustar o caudal e temperatura da água à saída de uma válvula misturadora quando esta é fechada e reaberta num curto intervalo de tempo. Desta forma, este dispositivo, quando activado pelo utilizador, desvia o caudal a ser fornecido (ao invés de cortar a circulação de água) e encaminha-o para um reservatório intermédio para uso futuro. Este reservatório possui uma bomba para compensar a perda de pressão, permitindo que a água seja de novo injectada na rede de distribuição de água da habitação.

[7] Patente EUA 5165456, registada por Richard F. Woolman (USA), 1992

O sistema registado na referida patente pretende ser de fácil aplicação, altamente flexível e com baixo custo de produção. Trata-se de uma simples válvula de 3 vias, pretendida universal, com um manípulo por forma ser possível desviar a água fria proveniente da fonte de água quente de uma válvula misturadora (preferencialmente de um chuveiro) para um reservatório móvel. A água armazenada neste reservatório pode ser, subsequentemente, usada para outros fins. Todo o sistema é actuado manualmente.

[8] Patente EUA 5603344, registada por John E. Hall (USA), 1997

Trata-se de um sistema compacto que pretende bombear a água fria proveniente da fonte de água quente para o circuito de água fria. Para tal, serve-se de um motor hidráulico, cuja energia será fornecida permitindo que 25% do caudal escoe pelo sistema e, posteriormente, para a válvula misturadora (sendo, consequentemente, desperdiçado). Desta forma, sem necessidade de uma fonte de energia eléctrica, o sistema propõe-se poupar 75% do volume de água fria usualmente desperdiçado. Uma vez atingida a temperatura requerida na fonte de água quente, um sensor de temperatura actua no sistema permitindo que a totalidade do caudal proveniente da fonte de água quente escoe para a válvula misturadora.

[9] Patente EUA 6098213, registada por Li-Tsan Chu (Taiwan), 2000

Este dispositivo, operado de forma inteiramente manual, apresenta um reservatório misturador, com um mostrador de temperatura, que substitui a válvula misturadora comum. De facto, este reservatório possui duas entradas, uma para a fonte de água quente e outro para a fonte de água fria, e duas saídas, uma convencional, como um chuveiro, e outra para um reservatório central. A comutação entre as duas saídas é operada manualmente. Assim, o utilizador regula os caudais de cada fonte para dentro do reservatório misturador até que a temperatura atingida neste seja a desejada, altura em que se altera o comutador da saída, inicialmente na posição para o reservatório central, para a posição da saída convencional (o referido chuveiro, por exemplo). A água entretanto acumulada no reservatório central é disponibilizada para outros usos como, por exemplo, sanitas.

[10] Patente EUA 6895985, registada por Shay Popper (IL), Ram Friedman (IL), Aryeh Litbak (IL) e Yaniv Petel (IL), 2005

É um sistema sofisticado, utilizando válvulas e bombas hidráulicas actuadas automaticamente por via de um micro-controlador. O seu conceito é muito semelhante ao dispositivo referido na patente US 4750472. Na verdade, em cada válvula misturadora de uma habitação, por exemplo, são aplicados dispositivos ditos inteligentes (micro-controladores electrónicos) que avaliam a temperatura da água proveniente da fonte quente. Caso esta seja demasiado baixa, o dispositivo avisa o utilizador e comanda uma bomba de recirculação que bombeia a água fria proveniente da fonte quente de novo para o elemento de aquecimento da água, através da canalização da água da fonte fria. Desta forma, apenas é disponibilizada água da fonte quente quando a temperatura é a desejada.

[11] Patente EP 1 783 284 A1, registada por Roura Alemany, Josep (ES), 2007

Este dispositivo serve-se de um reservatório central, no circuito de água fria, para armazenamento intermédio de água. Deste modo, a válvula misturadora possui um dispositivo actuado manualmente que efectua a ligação entre o circuito de água quente (sempre a uma pressão superior) ao circuito de água fria. A água fria proveniente da fonte de água quente é, então, armazenada no referido reservatório. A válvula misturadora possuirá, ainda, um sistema sensível à temperatura ou de temporização ajustável que mantenha a ligação entre o circuito da água quente e o circuito da água fria pelo tempo necessário. A água fria requerida será sempre proveniente do reservatório central que é alimentado pela rede de água fria, possuindo uma bomba para garantir a pressão de funcionamento.

[12] EcoVerta™, produto registado da Advanced Eco Technologies Pty Ltd.

O EcoVerta™ é um produto já comercializado pela empresa australiana Advanced Eco Technologies Pty Ltd. Trata-se de um aparelho de fácil implementação, que desvia a água fria proveniente da fonte de água quente para uma terceira via, sem necessitar de uma fonte externa de energia. A água desviada, ao invés de ser desperdiçada, pode ser encaminhada para uma outra utilização, tal como um reservatório central ou para rega.

3. O Sistema Proposto

Todos os sistemas apresentados implicam o uso de energia adicional, através de bombas ou reaquecimento da água, e/ou actuação manual por parte do utilizador. De facto, a utilização de energia adicional pode ser um grande entrave na implementação deste tipo de sistemas, pois a poupança de energia poderá não ser garantida. Por outro lado, a necessidade de actuação manual por parte do utilizador pode comprometer o uso efectivo do sistema, por inércia própria ao comportamento humano. Assim, o sistema proposto [13] pretende efectuar a poupança de água fria proveniente da fonte de água quente sem necessidade de utilização de energia adicional, sendo operado pelo utilizador como uma comum válvula misturadora nem necessidade de tubagens ou dispositivos adicionais na sua montagem.

3.1. Descrição do Sistema

O sistema proposto é constituído por uma válvula misturadora e por um sistema de acumulação de água. Atendendo à Fig. 1, quando se abre o manípulo M1, correspondente à entrada de água quente 1, a água fornecida passa pelas câmaras 2 e 3 e será desviada, caso a sua temperatura seja baixa, para a câmara 4 por via do êmbolo perfurado do corpo H e, posteriormente, para o reservatório (câmara 1r). A saída de água quente da câmara 3 para a câmara 9 será aberta apenas se a pressão no reservatório for suficientemente elevada para que o corpo H seja empurrado para a direita (através da força exercida no êmbolo maciço) ou se a haste do bolbo B existente na placa perfurada PF empurrar o referido corpo H para a direita. Esta acção deve-se a uma expansão térmica do bolbo B provocada pela subida da temperatura da água na câmara 3. Note-se ainda que a movimentação do corpo H para a direita implica não só a abertura da saída de água quente para a câmara 9 como o fecho da saída para o reservatório, sem que, no entanto, esta fique completamente obstruída, devido à existência de um batente de fim-de-curso. O retorno do corpo H à posição original é garantido pela mola KM.

Por outro lado, a abertura do manípulo M2 permitirá a passagem de água fria da câmara 4r para a câmara 8 da válvula misturadora. Esta água fria provirá preferencialmente

do reservatório, sendo que, para tal, existe um batente R que se encontra sujeito à pressão do reservatório. Assim, à medida que o nível de água no reservatório sobe (e, consequentemente, a sua pressão), o batente R movimenta-se para a direita, obstruindo a passagem 6r-7r-4r, restringindo a entrada de água fria proveniente da rede. Ao batente R encontram-se acopladas duas molas, existindo, ainda, batentes de fim-de-curso por forma a garantir que em situação alguma o batente R se movimente em demasia quer no sentido do volume de controlo 3r, quer no sentido do volume de controlo 7r.

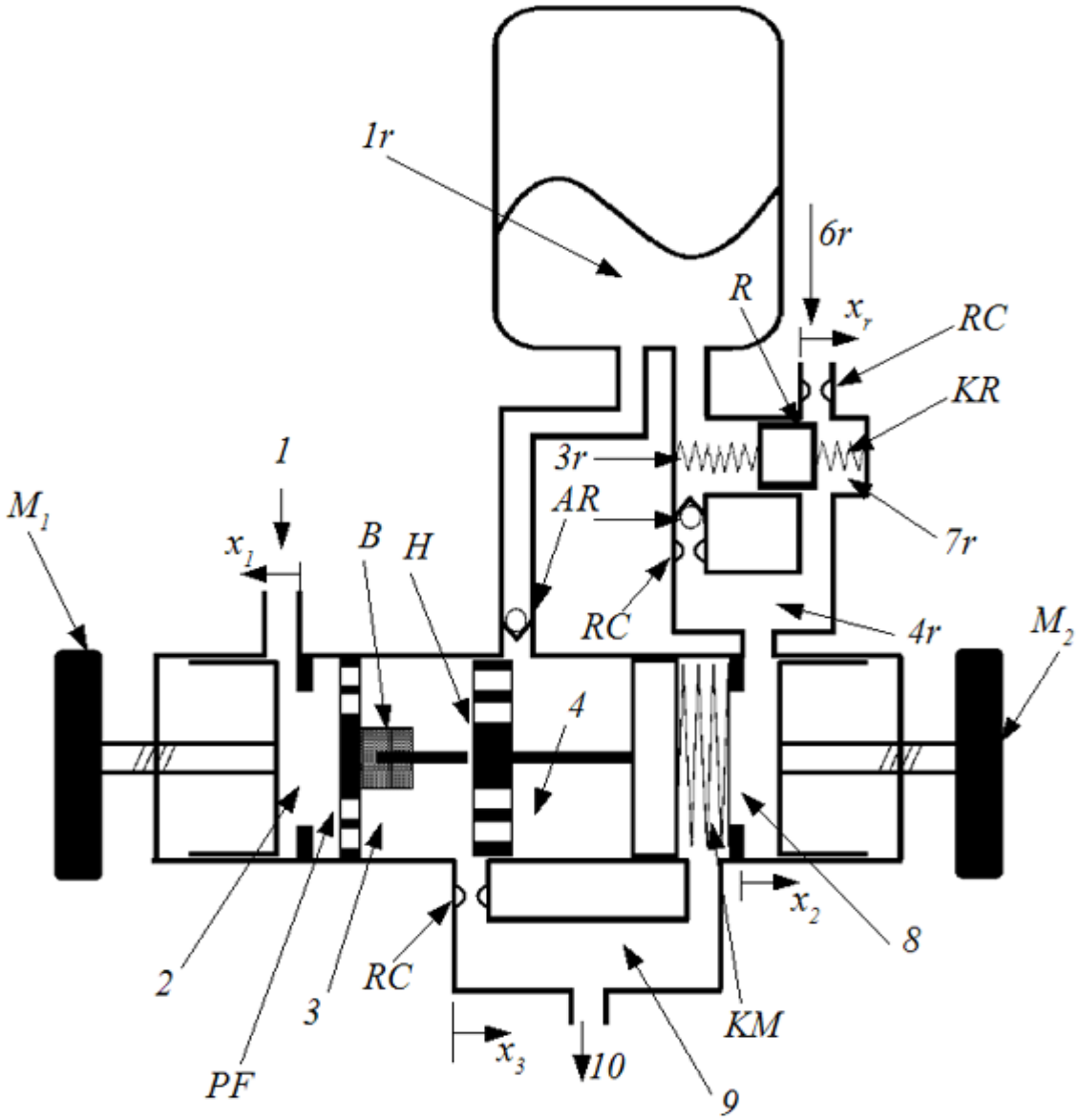


Figura 1: Esquema do sistema proposto

O reservatório 1r é de simples construção, cujo volume de armazenamento de água deverá ser o mais próximo possível do volume total de água contida nas tubagens entre a válvula misturadora e a fonte de água quente (usualmente uma caldeira ou esquentador). A câmara 1r possuirá, ainda, uma membrana elástica contendo ar, por forma a que a pressão da água no reservatório seja sempre superior a 1 bar (absoluto). A pressão máxima atingida no reservatório será, portanto, a pressão disponível na fonte de água quente.

De notar ainda a existência de válvulas anti-retorno AR nas ligações ao reservatório. A primeira, logo à saída da câmara 4 da válvula misturadora, garante que o reservatório não actue como fonte de água para a saída de água quente. A segunda, entre a câmara 3r e 4r, garante que o reservatório não é cheio pela fonte de água fria da rede.

A presença de restritores de caudal RC deve-se, além da sua finalidade inerente, à necessidade de pressurizar as câmaras onde se faz sentir a actuação de uma mola. De facto, caso assim não fosse, a força sentida no êmbolo maciço do corpo H ou no batente R poderia não ser suficiente para vencer os atritos que inevitavelmente existem e o sistema não teria a dinâmica desejada.

Desta forma, o sistema deverá actuar de forma a que, quando se der um pedido de água quente mas a temperatura da água na entrada 1 for baixa, a água debitada seja desviada para o reservatório 1r e não para a saída 10 da válvula, evitando o seu desperdício. Com a subida da temperatura da água da entrada 1, o bolbo B deverá expandir-se por forma a abrir a passagem 3-9 e disponibilizar, na saída 9, água quente, ao mesmo tempo que restringe a área de passagem da câmara 4 para a câmara 1r. A passagem 3-9 pode ainda ser aberta através da subida da pressão no reservatório (câmara 1r). De facto, o *sensing* da pressão da câmara 1r na câmara 4 é essencial para que o sistema não bloqueie, permitindo que, na situação do reservatório atingir a sua capacidade máxima mas a temperatura da água na entrada 1 ainda ser baixa, continue a haver um caudal proveniente da entrada 1 que permita purgar o volume de água fria ainda existente entre a fonte de água quente e esta entrada.

No caso de um pedido de água fria no manípulo 2, com o reservatório vazio, o sistema deverá comportar-se como uma válvula misturadora comum, disponibilizando água proveniente da rede (entrada 6r), isto é, o batente R deverá permitir a livre passagem de água entre a entrada 6r e a câmara 7r e entre esta câmara e a câmara 4r. No entanto, caso haja água armazenada no reservatório, a subida de pressão neste deverá movimentar o batente R no sentido de obstruir a entrada de água pela fonte 6r, privilegiando a água armazenada como fonte de água fria para a válvula misturadora.

3.2. Modelação do Sistema

Para descrever o comportamento dinâmico do sistema proposto é necessário estabelecer a posição dos seus orgãos móveis, as propriedades físicas relevantes da água em cada volume de controlo - massa, pressão e temperatura - e a forma como esses volumes de controlo interagem, isto é, os caudais entre cada duas câmaras consecutivas.

3.2.1. Conservação da massa

Aplicando a formulação integral da conservação da massa para um volume de controlo genérico V, temos que [14]:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{vol} = \frac{d}{dt}\left(\int \rho\, dV\right) + \int_{sc} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA \tag{1}$$

onde m representa a massa do sistema, ρ a massa específica, $\vec{v}$ o vector velocidade de escoamento sobre o elemento de área dA do volume de controlo, cuja normal de sentido exterior é $\vec{n}$. Desenvolvendo a Eq. (1) e se se admitir que o fluido é ligeiramente compressível, tendo um coeficiente de compressibilidade definido por $\beta = \rho(dP/d\rho)_T$, então fica:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dP}{dt} = \sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out} \tag{2}$$

onde P é a pressão do volume de controlo e $\dot{Q}$ é o caudal volúmico. Note-se que, para o volume de controlo, tanto a massa específica como a pressão são consideradas uniformes. Aplicando a Eq. (2) aos sucessivos volumes de controlo indicados, fica:

Volume de controlo 2

$$V_2 = V_2^{permanente} + A_2 x_1 \tag{3a}$$

$$A_2 v_1 + \frac{V_2}{\beta_e}\frac{dP_2}{dt} \approx \dot{Q}_{1,2} - \dot{Q}_{2,3} \tag{3b}$$

Volume de controlo 3

$$V_3 = V_3^{permanente} + A_3 x_3 - V_{bolbo} \tag{4a}$$

$$A_3 v_3 + \frac{V_3}{\beta_e}\frac{dP_3}{dt} \approx \dot{Q}_{2,3} - \dot{Q}_{3,4} - \dot{Q}_{3,9} \tag{4b}$$

Volume de controlo 4

$$V_4 = V_4^{permanente} \tag{5a}$$

$$\frac{V_4}{\beta_e}\frac{dP_4}{dt} \approx \dot{Q}_{3,4} - \dot{Q}_{4,1r} \tag{5b}$$

Volume de controlo 8

$$V_8 = V_8^{permanente} + A_8 x_2 \tag{6a}$$

$$A_8 v_2 + \frac{V_8}{\beta_e}\frac{dP_8}{dt} \approx \dot{Q}_{4r,8} - \dot{Q}_{8,9} \tag{6b}$$

Volume de controlo 9

$$V_9 = V_9^{permanente} \tag{7a}$$

$$\frac{V_9}{\beta_e}\frac{dP_9}{dt} \approx \dot{Q}_{3,9} + \dot{Q}_{8,9} - \dot{Q}_{9,10} \tag{7b}$$

Volume de controlo 1r

$$V_{1r} = A_{1r} y_{1r} \tag{8a}$$

$$A_{1r} v_{1r} + \frac{V_{1r}}{\beta_e}\frac{dP_{1r}}{dt} \approx \dot{Q}_{4,1r} - \dot{Q}_{1r,3r} \tag{8b}$$

Uma vez que os efeitos elásticos da membrana que aprisiona o gás no reservatório podem ser desprezados, pressão do gás aprisionado no topo do reservatório será igual à pressão P_{1r} da água nele contida. Admite-se, ainda, que a variação do volume do gás se dá de forma lenta e que este se comporta como um Gás Ideal, pelo que

$$P_{1\mathrm{r}} = P_g \tag{9a}$$

$$P_g V_g = m_g R_g T_g \tag{9b}$$

Volume de controlo 3r

$$V_{3\mathrm{r}} = V_{3\mathrm{r}}^{permanente} + A_{3\mathrm{r}} x_r \tag{10a}$$

$$A_{3\mathrm{r}} v_r + \frac{V_{3\mathrm{r}}}{\beta_e}\frac{dP_{3\mathrm{r}}}{dt} \approx \dot{Q}_{1\mathrm{r},3r} + \dot{Q}^{f}_{6\mathrm{r},3r} - \dot{Q}_{3\mathrm{r},4r} - \dot{Q}^{f}_{3\mathrm{r},4r} \tag{10b}$$

Os caudais assinalados com o índice superior f representam caudais de fuga, que serão discutidos na Secção 3.2.2. Equações de Escoamento.

Volume de controlo 4r

$$V_{4\mathrm{r}} = V_{4\mathrm{r}}^{permanente} \tag{11a}$$

$$\frac{V_{4\mathrm{r}}}{\beta_e}\frac{dP_{4\mathrm{r}}}{dt} \approx \dot{Q}_{3\mathrm{r},4r} + \dot{Q}_{7\mathrm{r},4r} + \dot{Q}^{f}_{3\mathrm{r},4r} - \dot{Q}_{4\mathrm{r},8} \tag{11b}$$

Volume de controlo 7r

$$V_{7\mathrm{r}} = V_{7\mathrm{r}}^{permanente} - A_{3\mathrm{r}} x_r \tag{12a}$$

$$-A_{7\mathrm{r}} v_r + \frac{V_{7\mathrm{r}}}{\beta_e}\frac{dP_{7\mathrm{r}}}{dt} \approx \dot{Q}_{6\mathrm{r},7r} - \dot{Q}_{7\mathrm{r},4r} \tag{12b}$$

3.2.2. Equações de Escoamento

De uma forma geral, um fluido movimenta-se sempre no sentido de um gradiente de energia negativo, isto é, o movimento de um fluido numa conduta ou entre duas câmaras é sempre acompanhado de redução de energia. No caso concreto a analisar, onde a variação da energia cinética e potencial gravítica do fluido são muito reduzidas em relação à energia

sob a forma de pressão e entalpia, pode-se afirmar que o escoamento entre cada volume de controlo se dá devido a um diferencial de pressão. Se se considerar, ainda, que o escoamento se dá sempre em regime turbulento (devido às características próprias da rede de distribuição de água e dos inúmeros acidentes geométricos dos elementos considerados), então o caudal volúmico depende da diferença de pressão, da área de secção transversal de passagem e de um coeficiente de descarga C_d, comportando-se segundo a Eq. (13)[15].

$$\dot{Q}_{i,j} = C_d \; A_{i,j} \sqrt{\frac{2}{\rho}\,(P_i - P_j)} \tag{13}$$

Note-se que as perdas de energia por atrito são negligenciáveis. Considerando as condutas como sendo circulares de diâmetro D, então a área de secção liberta pelos manípulos, pelo corpo H e pelo batente R será função da posição x desse êmbolo/batente (Fig. 2).

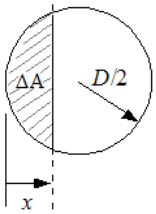


Figura 2: Área livre da conduta de passagem

$$\frac{\Delta A}{A} = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\cos^{-1}\left(1-\frac{2x}{D}\right) - 2\left(1-\frac{2x}{D}\right)\sqrt{\frac{x}{D}-\left(\frac{x}{D}\right)^2}\right] \tag{14}$$

Importa definir, então, o coeficiente de descarga C_d. De acordo com White [14] e Merrit [15], para números de Reynolds elevados, o coeficiente C_d não varia significativamente, sendo 0.6 um valor aceitável. No caso concreto, o número de Reynolds é definido por

$$Re = \frac{\rho \; v \; L_c}{\mu} \tag{15}$$

onde L_c é a dimensão característica da passagem. Para uma conduta, a sua dimensão característica é usualmente definida pelo diâmetro hidráulico, D_H

$$D_H = \frac{4 \times \text{Área de passagem}}{\text{Perímetro molhado}} = L_c \tag{16}$$

Substituindo (16) em (15) e atendendo que $\dot{Q} = v \cdot A$, fica

$$Re = \frac{4 \rho \dot{Q}}{\mu P_m} \tag{17}$$

As válvulas misturadoras domésticas debitam, usualmente, um caudal na ordem de 10 *l*/*min*, sendo a tubagem de ½". Tendo por exemplo a passagem da água da câmara 3 para a câmara 9, com o orifício completamente desimpedido, o número de Reynolds local será de cerca de 2.4×10^4 . É também prática comum [15], para simplificação dos modelos e sem grande prejuízo em termos de qualidade de resultados obtidos, considerar que o escoamento do fluido, mesmo que não seja em orifícios em placas ou no regime estritamente turbulento com elevados número de Reynolds locais, se comporta sempre segundo a Eq. (13), com um coeficiente de descarga de 0.6. A excepção será no que toca aos escoamentos de fuga, com caudais/velocidades muito baixos. De facto, para garantir uma melhor estabilidade da resolução dinâmica do sistema convém introduzir alguns caudais laminares de fuga definidos por uma condutância de fugas $g_{i,j}$

$$\dot{Q}^{f}_{i,j} = g_{ij}(P_i - P_j) \tag{18}$$

Este factor é especialmente importante na zona do reservatório, devido às válvulas anti-retorno. Na verdade, poder-se-ia ter o caso em que ambas as válvulas se encontram fechadas, levando a uma singularidade do sistema (uma vez que aquela secção perderia as suas condições fronteira). Assim, a implementação de caudais de fuga na zona do batente R afigura-se como uma solução bastante satisfatória, sem comprometer a qualidade dos resultados. Como tal, os caudais de fuga terão sempre uma ordem de grandeza de 10^{-3} *l*/min face a um caudal normal de 10 *l*/*min*.

A Eq. (18) pode ainda ser usada noutro detalhe. A Eq. (13), quando a diferença de pressão é muito reduzida, apresenta uma primeira derivada (em ordem à diferença de pressão) muito elevada (quando a diferença de pressão é nula, a derivada é infinita). Esta circunstância implica um comportamento altamente rígido do sistema, completamente indesejável. Deste modo, será útil implementar alguma histerese no modelo de

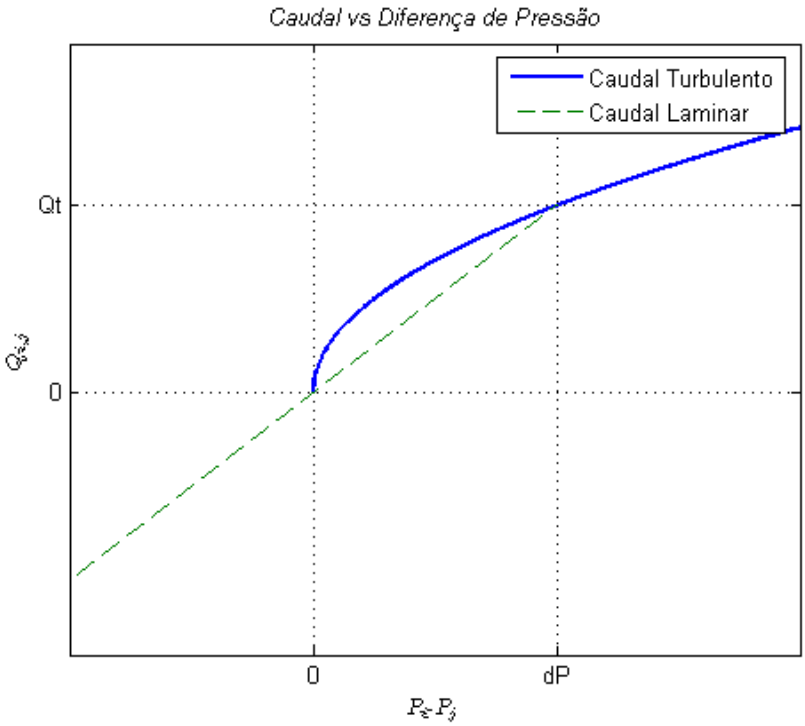


Figura 3: Representação esquemática da histerese de transição do regime turbulento para o regime laminar dos caudais estabelecidos.

comportamento do sistema, como se encontra representado na Fig. 3, complementando o caudal de regime turbulento definido pela Eq. (13) com o caudal de regime laminar definido pela Eq. (18).

Atendendo à Fig. 3, note-se que *dP* deve ser o mais reduzido possível. Esta implementação, além de superar a questão da derivada infinita, tem ainda a virtude de representar o caudal como laminar nos instantes logo após a sua estagnação. Isto é, o caudal comporta-se segundo a Eq. (13) (curva a azul a cheio) até que a diferença de pressão se anule, passando a comportar-se segundo a Eq. (18) (curva a verde a tracejado). A transição para o regime turbulento só se fará depois de ultrapassada a diferença de pressão *dP*.

Desta forma, no que toca ao regime turbulento, a Eq. (13) pode ser aplicada para definir os sucessivos caudais entre as câmaras representados na Fig. 1:

$$\dot{Q}_{1,2}=C_d\ A_{x1}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_1-P_2\right)} \tag{19a}$$

$$\dot{Q}_{2,3}=C_d\ A_{o2,3}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_2-P_3\right)} \tag{19b}$$

$$\dot{Q}_{3,4}=C_d\ A_{o3,4}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_3-P_4\right)} \tag{19c}$$

$$\dot{Q}_{8,9}=C_d\ A_{o8,9}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_8-P_9\right)} \tag{19d}$$

$$\dot{Q}_{1\mathrm{r},3r}=C_d\ A_{o1r,3r}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_{1\mathrm{r}}-P_{3\mathrm{r}}\right)} \tag{19e}$$

$$\dot{Q}_{3\mathrm{r},4r}=C_d\ A_{o3r,4r}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_{3\mathrm{r}}-P_{4\mathrm{r}}\right)} \tag{19f}$$

$$\dot{Q}_{7\mathrm{r},4r}=C_d\ A_{xr}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(P_{7\mathrm{r}}-P_{4\mathrm{r}}\right)} \tag{19g}$$

Os restantes caudais necessitam de uma análise mais cuidada para serem correctamente definidos. Para os caudais $\dot{Q}_{4,1r}$ e $\dot{Q}_{9,10}$ será interessante utilizar a equação de Bernoulli, contemplando a perda de carga h_L [14]

$$y_i+\frac{v_i^2}{2\mathrm{g}}+\frac{P_i}{g\,\rho}=y_j+\frac{v_j^2}{2\mathrm{g}}+\frac{P_j}{g\,\rho}+h_L \tag{20}$$

O factor h_L representa as perdas de carga localizadas bem como as perdas por atrito. Considerando apenas as perdas de carga localizadas, h_L pode ser representado por [14]

$$h_L=\zeta\,\frac{v_s^2}{2\mathrm{g}} \tag{21}$$

Note-se que A_S e ζ são específicos para cada singularidade, podendo ser encontrados em bibliografia especializada como Idel'cik [16]. No caso do caudal $\dot{Q}_{9,10}$, tem-se que $A_i=A_9$, $A_j=A_{10}$ e $v_s=v_j$, pelo que

$$\dot{Q}_{9,10} = \frac{A_9 \, A_{10}}{\sqrt{A_9^2 (1+\zeta_{9,10}) - A_{10}^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_9 - P_{10})} \tag{22}$$

onde $\zeta_{9,10}$ é dado por

$$\zeta_{9,10} = 0.5 \, (1 - A_{10} / A_9) \tag{23}$$

Nos restantes caudais, para se usarem as Eqs. (13) e (20)/(21) é necessário recorrer a um ponto intermédio que pode ser visto como um volume de controlo muito pequeno, considerado incompressível, o que se traduz em

$$\dot{Q}_{i,j} = \dot{Q}_{i,\,intermédio} = \dot{Q}_{intermédio,\,j} \tag{24}$$

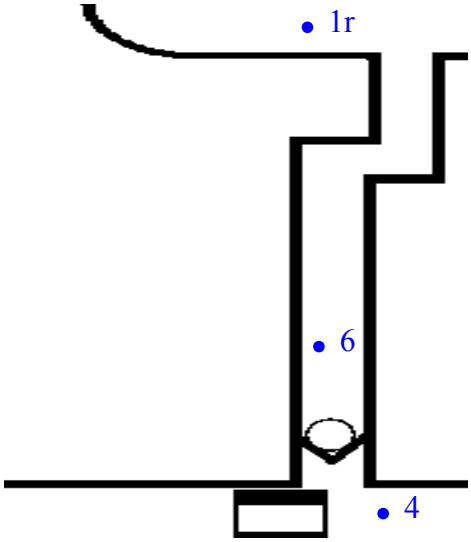


Figura 4: Ponto intermédio 6 para determinação do caudal $\dot{Q}_{4,1r}$

No caso do caudal $\dot{Q}_{4,1r}$, usar-se-á um ponto intermédio 6 (Fig. 4), onde o caudal $\dot{Q}_{4,6}$ é descrito pela Eq. (13) e o caudal $\dot{Q}_{6,1r}$ é obtido da Eq. (20). Assim, juntando os dois caudais, fica

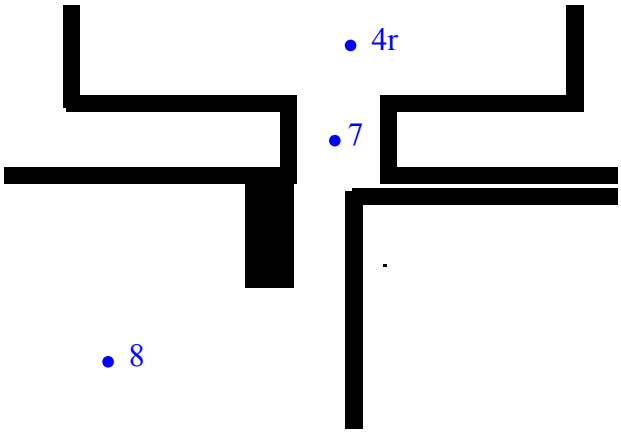


Figura 5: Ponto intermédio 7 para determinação do caudal $\dot{Q}_{4r,8}$

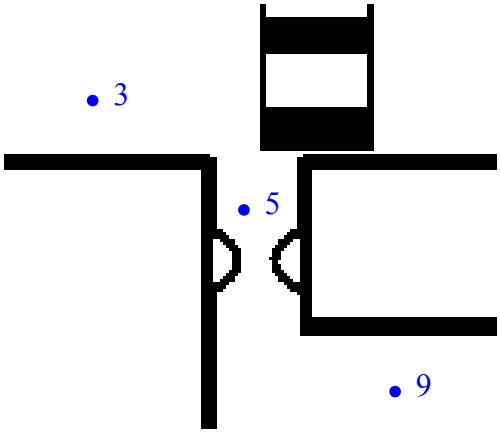


Figura 6: Ponto intermédio 5 para determinação do caudal $\dot{Q}_{3,9}$

$$\dot{Q}_{4,1r}=\frac{A_{1r}\,A_6\,C_d\,A_{o4,6}}{\sqrt{(A_6\,C_d\,A_{o4,6})^2+(\zeta_{4,1r}-1)(A_{1r}\,C_d\,A_{o4,6})^2+(A_{1r}\,A_6)^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\,(P_4-P_{1r})} \tag{25}$$

onde $\zeta_{4,1r}$ é sensivelmente igual a 2.4.

O caudal $\dot{Q}_{4r,8}$ é em tudo semelhante ao caudal $\dot{Q}_{4,1r}$. Isto é, se se utilizar outro ponto intermédio, ponto 7 (Fig 5), as equações (20)/(21) podem ser aplicadas entre os pontos 4r e 7 e a Eq. (13) entre os pontos 7 e 8. Ficará, então

$$\dot{Q}_{4r,8}=\frac{C_d\,A_{x2}\,A_{4r}\,A_7}{\sqrt{(1+\zeta_{4r,7})\,A_{4r}^2(C_d\,A_{x2})^2-A_7^2(C_d\,A_{x2})^2+A_7^2\,A_{4r}^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\,(P_{4r}-P_8)} \tag{26}$$

Para o caudal $\dot{Q}_{3,9}$ é necessário recorrer a um ponto intermédio 5 (Fig. 6). Aplicando, então, a Eq. (13) para cada caudal intermédio, fica

$$\dot{Q}_{3,5}=C_d\ A_{x3}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_3-P_5)} \tag{27a}$$

$$\dot{Q}_{5,9}=C_d\ A_{o5,9}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_5-P_9)} \tag{27b}$$

Juntando as equações (27a) e (27b), obtém-se o seguinte resultado

$$\dot{Q}_{3,9}=\frac{C_d\ A_{x3}\ A_{o5,9}}{\sqrt{A_{x3}^2+A_{o5,9}^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_3-P_9)} \tag{28}$$

Por fim, o mesmo raciocínio usado para a determinação do caudal $\dot{Q}_{3,9}$ pode ser usado para o caudal $\dot{Q}_{6r,7r}$, ficando

$$\dot{Q}_{6r,7r}=\frac{C_d\ A_{xr}\ A_{o6r,7r}}{\sqrt{A_{xr}^2+A_{o6r,7r}^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_{6r}-P_{7r})} \tag{29}$$

3.2.3 Equações de Quantidade de Movimento

O sistema possui dois corpos, o batente R e o corpo H, cuja determinação da posição é fundamental para a correcta modelação do sistema. Em ambos os casos é possível aplicar a conservação da quantidade de movimento, traduzido por

$$\vec{F}_{res}=\frac{d\vec{p}}{dt} \tag{30}$$

onde $\vec{F}_{res}$ é a força resultante aplicada no corpo e $\vec{p}$ é a sua quantidade de movimento, traduzido por $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$.

Aplicando, então, a Eq. (30) ao batente R

$$m_r\frac{d\,v_r}{dt}=(P_{3r}-P_{7r})A_{3r}+k_r(x_r^{pre}-x_r)-b_r\frac{d\,x_r}{dt} \tag{31}$$

Note-se que as duas molas associadas ao batente R podem ser analisadas como uma só, com uma rigidez k e pré-compressão x^{pre} equivalentes. O factor b_r representa o coeficiente de fricção do batente com a tubagem e v_r representa a primeira derivada de x_r em ordem ao tempo.

Para o caso do corpo H é preciso ter em conta a interacção da haste do bolbo. Sem interferência da haste, a equação do movimento para o corpo H fica

$$\begin{aligned} m_H \frac{d v_H}{dt} &= P_3(A_3 - A_{o3,4}) - P_4(A_3 - A_{o3,4} - A_{haste}) + \\ & P_4(A_8 - A_{haste}) - P_8 A_8 - k_H(x_3 + x_H^{pre}) - b_H \frac{d x_3}{dt} \end{aligned} \tag{32}$$

Porém, a posição x_b da haste do bolbo limita a posição mínima de x_3. Na verdade, quando o corpo H entra em contacto com o bolbo, a haste deste actua como uma barra solicitada axialmente, que pode ser vista como uma mola cuja rigidez é dada por

$$k_{haste} = \frac{A E}{L} \tag{33}$$

onde A é a área de secção normal ao esforço, E o módulo de Young e L o comprimento da haste. Assim, a equação do corpo H, depois de algumas simplificações, fica

$$\begin{aligned} m_H \frac{d v_H}{dt} &= (P_3 - P_4)(A_3 - A_{o3,4}) + (P_4 - P_8) A_8 \\ & - k_H(x_3 + x_H^{pre}) - b_H \frac{d x_3}{dt} + k_{haste} \langle x_b - x_3 \rangle \end{aligned} \tag{34}$$

onde $\langle x_b - x_3 \rangle$ é a função singular, definida por

$$\langle x_b - x_3 \rangle = \begin{cases} x_b - x_3, & se\ x_b \geq x_3 \\ 0, & se\ x_b < x_3 \end{cases} \tag{35}$$

A implementação dos batentes de fins-de-curso no comportamento dinâmico destes corpos será discutida mais adiante, na Secção 3.3. Simulação do Sistema.

3.2.4. Conservação da Energia

Para um sistema termodinâmico aberto, que troque trabalho e calor com o exterior e onde as variações de energia cinética e potencial são desprezáveis, a conservação da energia toma a seguinte forma [17]

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = \dot{W} + \dot{H} + \sum (\dot{m} h)_{in} - \sum (\dot{m} h)_{out} \tag{36}$$

onde E_{cv} representa a energia total do sistema — cinética ($mv^2/2$), potencial (mgy) e térmica

(mu) —, $\dot{W}$ e $\dot{H}$ a taxa de transferência de energia sob a forma de trabalho e calor, respectivamente, e h a entalpia específica associada aos respectivos caudais mássicos de entrada e saída do volume de controlo. Uma vez que a gama de temperaturas envolvidas na análise deste sistema é relativamente reduzida (algumas dezenas de graus), a entalpia pode ser descrita por

$$h_T = h_{ref} + c(T - T_{ref}) \tag{37}$$

onde c é a capacidade calorífica específica, considerada constante, e h_{ref} é a entalpia específica de referência, associada à temperatura T_{ref}. À semelhança das considerações feitas para a massa específica e pressão, a temperatura do volume de controlo é considerada uniforme em cada uma das câmaras consideradas na válvula misturadora e no sistema de acumulação.

Se se atender à ordem de grandeza dos termos associados à energia térmica (variação de energia interna u e entalpia h e a taxa troca de calor com o exterior $\dot{H}$), será aceitável desprezar os restantes termos de energia potencial e cinética. Considerando, ainda, que a variação de energia interna é praticamente igual à variação de entalpia do volume de controlo, a Eq. (36) fica reduzida a

$$\frac{d(mh)_{cv}}{dt} \approx \dot{H} + \sum (\dot{m}h)_{in} - \sum (\dot{m}h)_{out} \tag{38}$$

Aplicando, assim, a Eq. (38) aos diversos volumes de controlo, fica

Volume de controlo 2

$$\frac{d(\rho V_2 h_2)}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{1,2} h_1 - \rho \dot{Q}_{2,3} h_2 \tag{39}$$

Volume de controlo 3

$$\frac{d(\rho V_3 h_3)}{dt} \approx \dot{H}_{bolbo} + \rho \dot{Q}_{2,3} h_2 - \rho \dot{Q}_{3,4} h_3 - \rho \dot{Q}_{3,9} h_3 \tag{40}$$

Volume de controlo 4

$$\frac{d(\rho V_4 h_4)}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{3,4} h_3 - \rho \dot{Q}_{4,1r} h_4 \tag{41}$$

Volume de controlo 8

$$\frac{d(\rho V_8 h_8)}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{4r,8} h_{4r} - \rho \dot{Q}_{8,9} h_8 \tag{42}$$

Volume de controlo 9

$$\frac{d(\rho V_9 h_9)}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{3,9} h_3 + \rho \dot{Q}_{8,9} h_8 - \rho \dot{Q}_{9,10} h_9 \tag{43}$$

Volume de controlo 3r

$$\frac{d(\rho V_{3r} h_{3r})}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{1r,3r} h_{1r} + \rho \dot{Q}^{f}_{6r,3r} h_{6r} - \rho \dot{Q}_{3r,4r} h_{3r} - \rho \dot{Q}^{f}_{3r,4r} h_{3r} \tag{44}$$

Volume de controlo 4r

$$\frac{d(\rho V_{4r} h_{4r})}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{3r,4r} h_{3r} + \rho \dot{Q}_{7r,4r} h_{7r} + \rho \dot{Q}^{f}_{3r,4r} h_{3r} - \rho \dot{Q}_{4r,8} h_{4r} \tag{45}$$

Volume de controlo 7r

$$\frac{d(\rho V_{7r} h_{7r})}{dt} \approx \rho \dot{Q}_{6r,7r} h_{6r} - \rho \dot{Q}_{7r,4r} h_{7r} \tag{46}$$

Volume de controlo 1r

Em todos os volumes de controlo analisados, as trocas de calor com o exterior do sistema são desprezáveis. Para o reservatório, no entanto, há que considerar as trocas de calor por convecção natural, uma vez que a água pode ficar neste espaço por períodos prolongados. Assim, para simplificar a análise da transmissão de calor com o meio exterior, a conservação da energia deverá ser aplicada a um volume de controlo um pouco mais alargado, englobando não só o volume de controlo 1r mas, na verdade, todo o reservatório, incluindo o gás aprisionado e as paredes.

Além disso, uma vez que a variação da temperatura da água no reservatório é bastante lenta, a temperatura do gás aprisionado no reservatório será igual à temperatura da água neste. O mesmo raciocino pode ser aplicado à temperatura das paredes do reservatório. Assim, a Eq. (38) fica

$$\frac{d(\rho_{H_2O} V_{1r} h_{1r} + \rho_m V_m h_m + m_g h_g)}{dt} \approx \dot{H}_{ext} + \rho_{H_2O} \dot{Q}_{4,1r} h_4 - \rho_{H_2O} \dot{Q}_{3r,4r} h_{1r} \tag{47}$$

onde o índice “m” se refere ás propriedades do material do reservatório e o índice “g” ás

propriedades do gás.

3.2.5. Equação do Bolbo

O uso de bolbos como forma de controlar a temperatura da água da fonte quente é bastante interessante devido ao seu comportamento térmico. De facto, com o uso de materiais altamente dilatáveis termicamente (como parafinas, gases ou até alguns líquidos) numa construção envolvendo uma mola de alta rigidez e uma haste, consegue-se obter um dispositivo de pequenas dimensões, fiável e robusto, cuja posição da haste pode ser definida pela Eq. (48)

$$x_b = x_b^0 + \alpha (T_b - T_b^0) \tag{48}$$

onde α representa o coeficiente de dilatação linear do bolbo, e x_b^0 representa a posição de referência do bolbo para a temperatura T_b^0. No presente caso, a posição x_b^0 coincide com a origem do referencial de x_3 e considerar-se-à um valor usual para α de cerca de 0.25 mm/K. A temperatura T_b do bolbo pode ser avaliada pelo método da capacitância [18]

$$m_b c_b \frac{d T_b}{dt} = \dot{H}_{bolbo} \tag{49}$$

onde m_b e c_b representam a massa e capacidade térmica do bolbo. Note-se que este método exige que o número de Biot seja inferior a 0.1, o que é garantido pelo pressuposto de que a temperatura do bolbo é sempre uniforme, ou seja, a sua condutividade térmica é elevada e as suas dimensões reduzidas.

3.2.6. Trocas de Calor

Resta, apenas, determinar os termos de transferência de calor presentes nas Eqs. (40), (47) e (49). Ambos os termos se referem a fenómenos de transferência de calor por convecção, sendo que o primeiro, $\dot{H}_{bolbo}$, de convecção forçada e o segundo, $\dot{H}_{ext}$, de convecção natural.

Em ambos os casos, a taxa de transferência de calor é definida por

$$\dot{H} = h A (T - T_\infty) \tag{50}$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, A é a área de superfície

molhada sobre a qual se dá o fluxo de calor e T_∞ representa a temperatura do escoamento não perturbado (para a convecção forçada) ou do fluido inerte (para a convecção natural).

Para determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção será necessário recorrer a uma de muitas correlações empíricas existentes para o efeito. De um modo geral, recorre-se à determinação do número de Nusselt, definido por [18]

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}\, L_c}{k} \tag{51}$$

onde L_c representa uma dimensão característica e k a conductividade térmica do fluido. É necessário, portanto, identificar qual a correlação empírica que melhor se ajusta a cada caso em concreto.

No que toca à transferência de calor entre o volume de controlo 3 e o bolbo (convecção forçada), o escoamento dá-se na direcção do eixo longitudinal do bolbo (tido como um cilindro). A análise teórica da convecção em geral mostra que a transferência de calor por este mecanismo está fortemente associada a um desenvolvimento de uma camada limite térmica, que acompanha a camada limite de velocidades [18], pelo que o cilindro pode ser visto como uma placa plana encurvada transversalmente. De facto, existe uma simetria do escoamento em qualquer plano que contenha o eixo longitudinal do bolbo, o que indiciará que o desenvolvimento da camada limite decorrerá de forma muito semelhante ao de uma placa plana. Se se atender ainda que o escoamento tem de atravessar os orifícios da placa entre os volumes de controlo 2 e 3, então o escoamento apresentar-se-à completamente turbulento desde o inicio do bolbo. Nesta situação, Incropera [18] indica a seguinte correlação para o número de Nusselt

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = 0.037\, Re^{(4/5)}\, Pr^{(1/3)} \tag{52}$$

sendo L o comprimento do eixo longitudinal do bolbo e Pr o número de Prandlt.

Uma vez que se admite que a temperatura do reservatório será sempre igual ou superior à temperatura do ar circundante, a convecção natural associada ao reservatório pode ser vista como uma simples placa quente na vertical para a face lateral e como placas quentes superiores e inferiores para o topo e fundo, respectivamente. Este pressuposto será sempre

válido uma vez que, mesmo no Inverno, a água das tubagens de uma casa estará sempre muito próxima da temperatura ambiente. Além disso, a consideração da troca de calor por convecção natural no reservatório é especialmente útil quando alguma água quente proveniente da fonte de água quente da válvula misturadora fica retida no reservatório durante longos períodos. Teremos então que

$$\dot{H}_{ext} = \dot{H}_{lateral} + \dot{H}_{topo} + \dot{H}_{fundo} \tag{53}$$

onde cada termo pode ser calculado usando a Eq. (50). Será necessário, então, determinar os coeficientes de transferência de calor por convecção para cada um dos termos do lado direito da Eq. (53). Recorrendo, mais uma vez, a Incropera [18].

$$\overline{Nu}_{lateral} = \frac{\bar{h}_{lateral} L}{k} = \left(0.825 + \frac{0.387\, Ra_{lateral}^{(1/6)}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{(9/16)}\right]^{(8/27)}} \right)^2 \tag{54}$$

$$\overline{Nu}_{topo} = \frac{\bar{h}_{topo} L}{k} = 0.54\, Ra_{topo}^{(1/4)} \tag{55}$$

$$\overline{Nu}_{fundo} = \frac{\bar{h}_{fundo} L}{k} = 0.54\, Ra_{fundo}^{(1/4)} \tag{56}$$

Em cada um dos casos é necessário verificar as condições impostas para a utilização das correlações. Embora a Eq. (54) possa ser usada em qualquer situação, para as restantes é necessário verificar se o número de Rayleigh, definido por

$$Ra_L = \frac{g\, \beta_T (T_s - T_\infty) L^3}{\nu\, \alpha_T} \tag{57}$$

se encontra dentro dos valores admitidos. As propriedades do fluido, para cada uma das correlações de convecção, são sempre determinadas para uma temperatura média de filme $T_f = (T_s + T_\infty)/2$, sendo que g é a aceleração da gravidade, β_T é o coeficiente de expansão volumétrico, L é a dimensão característica, υ é a viscosidade cinemática do fluido (ar) e α_T é a difusividade térmica do fluido (ar).

Uma última nota para o facto de não se considerarem as trocas térmicas entre o corpo da válvula misturadora e o ambiente.

3.3. Simulação do Sistema

Uma vez obtido o modelo físico do sistema é necessário implementa-lo numericamente. O elevado número de equações, bem como a não linearidade de algumas delas, faz com que a utilização de uma linguagem não-causal, como a *Modelica* [19], se revele a melhor forma de construção do modelo para simulação. De facto, uma linguagem de programação causal necessita que o sistema seja implementado de forma explícita [19], isto é, o espaço de estados necessita de se encontrar na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,u) \\ y &= g(x,u) \end{aligned} \tag{58}$$

onde u é um input e y um output. Mais ainda, numa implementação causal é necessário que a conexão de cada submodelo (imagine-se, por exemplo, um condensador num circuito eléctrico) não origine um loop algébrico. Tais tarefas, para sistemas mais complexos como o presente caso, revelar-se-iam difíceis, morosas e sujeitas a erros, pelo que a utilização de uma linguagem não-causal, onde as equações de comportamento do sistema se podem introduzir directamente, se apresenta como a melhor opção.

Implementado o modelo, há que simulá-lo. São vários os algoritmos existentes para a resolução das equações diferenciais algébricas que compõe o sistema em estudo. Porém, a selecção do algoritmo adequado revela-se essencial para uma simulação fiável e célere. De facto, muitas vezes os modelos dão origem a sistemas de equações rígidos (*stiff*), ou seja, sistemas onde estão descritos processos físicos com constantes de tempo (isto é, escalas de tempo) muito diferentes [20]. Isto pode traduzir-se numa componente da solução muito amortecida ou com oscilação muito rápida, quando comparada com o resto do sistema. Tal facto implica que o passo de integração da resolução do sistema tem de ser pequeno, sob o risco da solução divergir, ou então usar um método implícito, que obriga à resolução de um sistema de equações algébricas em cada passo de tempo, geralmente de elevada dimensão [20].

Importa, então, reduzir a rigidez do sistema implementado. Muitas vezes tal é possível recorrendo a sistemas híbridos de modelação, onde dinâmicas não lineares rápidas são

substituídas por transições discretas controladas por eventos [20]. Um exemplo grosseiro desta técnica encontra-se na Eq. (34). Com efeito, a função singular introduzida traduz uma transição discreta do contacto/não contacto entre a haste do bolbo e o corpo H, transição essa controlada pela posição relativa entre os dois. Outro caso onde será necessário implementar um modelo híbrido é a presença de fins-de-curso para o movimento do corpo H e do batente R. Na verdade, a interacção dos fins-de-curso com o corpo H/batente R traduz-se na colisão entre corpos rígidos, de modelação difícil, complexa e com introdução de rigidez no sistema devido à sua rápida dinâmica [20]. Assim, poder-se-à usar uma modelação híbrida, onde a chegada ao fim-de-curso representa um evento de transição. Aquando da transição, o sistema entra num novo estado onde a velocidade do corpo é reinicializada a zero e a aceleração só seguirá novamente a Segunda Lei de Newton quando a força resultante do corpo se der no sentido contrário ao limite imposto pelo fim-de-curso. Na Fig. 7 encontra-se representado esquematicamente todo o processo, para o caso do corpo H. Note-se que a implementação da interacção do bolbo com o corpo poderia ser realizada da mesma forma, reinicializando a velocidade v_r à velocidade v_b. Porém, poder-se-ia dar o caso de as condições de transição de ambos os eventos entrarem em conflito. Deste modo, a solução encontrada, utilizando a função singular, supera este problema, mesmo que introduza alguma rigidez no sistema.

$$F_{res}=(P_3-P_4)(A_3-A_{o3,4})+(P_4-P_8)A_8-k_H(x_3+x_H^{pre})-k_H(x_3+x_H^{pre})+k_{haste}\langle x_b-x_3\rangle$$

$$m_H\frac{d\,v_H}{dt}=F_{res}-b_H\frac{d\,x_3}{dt}$$

Transição 1: $x_3 \leq LimiteEsq$

Transição 2: $x_3 > LimiteEsq$

$$\frac{d\,v_3}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{m_H}F_{Res}, & \text{se } F_{Res}\geq 0 \\ 0, & \text{se } F_{res}<0 \end{cases}$$

$$\text{reinit}(v_3 = 0)$$

Figura 7: Transição entre estados por meio de um evento discreto

Uma última referência para a implementação da histerese referida em 3.2.2. Equações de Escoamento. De facto, trata-se de mais um caso de modelação híbrida, onde as

condições de transição realizam a comutação entre o modelo de caudal turbulento e o de caudal laminar.

Mesmo após a implementação destas técnicas para aumentar o amortecimento do problema, será necessário utilizar um algoritmo adequado a sistemas rígidos. Uma vez que o sistema será simulado em ambiente Simulink, apenas se encontram disponíveis três algoritmos para este tipo de sistemas, a saber:

- ODE23s: baseado no algoritmo de Rosenbrock de ordem 2 [21];
- ODE23t: trata-se de um algoritmo que utiliza uma regra trapezoidal com um interpolante livre [22];
- ODE23tb: baseado em TR-BDF2, é um algoritmo de Runge-Kutta implícito, com um primeiro passo de regra trapezoidal e um segundo passo de diferenciação inversa de ordem 2 [23].

Dos três algoritmos apresentados, o segundo apresenta uma menor robustez com sistemas mais rígidos. Por outro lado, o algoritmo ODE23s revelou-se mais eficiente a lidar com a rigidez do sistema, pelo que é este o algoritmo utilizado para a simulação do sistema em análise.

Ainda uma última nota sobre a implementação da Eq. (14). De facto, a implementação directa desta equação levanta dois problemas:

- Por um lado, a função arco-coseno possui um domínio limitado, de -1 a 1. Uma vez que qualquer simulação numérica possui um erro associado, poder-se-ia dar o caso de o argumento desta função cair fora do seu domínio.
- Por outro lado, dificilmente se terá, na realidade, um bloqueio completo da conduta. Haverá sempre, portanto, uma pequena área de passagem, mesmo que a conduta se encontre aparentemente totalmente bloqueada.

Deste modo será razoável aproximar a Eq. (14) a um polinómio de grau suficientemente elevado, para garantir boa exactidão. A escolha de um polinómio não é inocente pois estes são contínuos e diferenciáveis para todo o domínio $\Re$. Assim, foi usado

um polinómio de grau 9 (de facto, a função da Eq. (14) é bastante exigente junto dos extremos do seu domínio) e garantida uma área mínima equivalente a uma abertura de x = 0.05 mm. Esta solução implica um caudal de fuga de, no máximo, 0.0382 l/min, ou seja, 0.382% do caudal máximo esperado na válvula misturadora.

4. Pré-dimensionamento do Sistema

Antes de realizar uma análise dinâmica e subsequente optimização do funcionamento do sistema é necessário realizar um rápido pré-dimensionamento dos parâmetros do sistema, nomeadamente, dimensões gerais, constantes de rigidez das molas e a sua pré-compressão, bem como a quantidade (em massa) de gás a aprisionar no reservatório. Todas as dimensões do sistema não discutidas nesta secção (como a área da secção transversal das tubagens ou do reservatório, por exemplo) foram arbitradas dentro de valores considerados razoáveis e encontram-se indicadas na Secção 8. Anexos.

Atendendo ao espírito de funcionamento do sistema, requer-se que a água de um pedido de água quente que ainda vem fria seja canalizada, o mais possível, para o reservatório, inicialmente vazio. Se se atender a que a fonte de água quente se encontra a uma pressão de cerca de 2.5 bar, então a pressão da água no reservatório (ou do gás, uma vez que são idênticas) variará entre 1 bar (sensivelmente a pressão atmosférica – será impossível esvaziar mais o reservatório) e os 2.5 bar. Por outro lado, se se atender a uma tubagem com ½" de diâmetro e cerca de 30 metros de tubagem (estimativa sobre-dimensionada) entre a válvula misturadora e a caldeira (isto é, a fonte de água quente), então o reservatório terá de acomodar cerca de 3.8 *l* de água. Como o gás (ar) é tido como perfeito, temos que

$$V_{reservatório} = V_{água} + V_{ar} \tag{59}$$

$$V_{ar} = \frac{m_{ar} R_{ar} T_{ar}}{P_{ar}} \tag{60}$$

$$\Delta V_{água} = 3.8 L \tag{61}$$

Combinando as três equações, facilmente se extrai o volume total do reservatório bem como a massa de ar para que a pressão deste oscile entre 1 e 2.5 bar.

$$V_{reservatório} = \frac{P_{cheio} \Delta V_{água} - P_{vazio} \cdot \% \Delta V_{água}}{P_{cheio} - P_{vazio}} \tag{62}$$

onde $\%\Delta V_{água}$ representa a percentagem de volume de água existente no reservatório, para a pressão em vazio, isto é, para a pressão mínima do reservatório. Para uma primeira

hipótese, será razoável considerar uma percentagem nula de água à pressão mínima pelo que resulta da Eq. (62) um reservatório com cerca de 6.33 *l*. Note-se que este valor surge considerando que a temperatura do ar no interior do reservatório, nesta situação, permanece constante. De facto, na pior das hipóteses, não há qualquer água quente disponível, pretendendo-se acumular o máximo de água fria possível. Quanto menor for a temperatura do ar, menor será a pressão do reservatório quando este se encontra cheio. Tal acontece à temperatura mínima do ar, considerada de cerca de 18ºC (sensivelmente a temperatura ambiente na parede), correspondendo a uma massa de ar de cerca de 7.5*g*.

A furação da placa perfurada PF deverá ser a maior possível sem que, no entanto, comprometa a estabilidade estrutural da mesma. Considerando a área de secção transversal circular com 25 mm de diâmetro e ainda que o bolbo terá um diâmetro de 10 mm (valores comuns neste tipo de válvulas misturadoras), a furação poderá consistir em 4 furos com 5 mm de diâmetro. A mesma furação poderá ser usada no êmbolo perfurado do corpo H.

O posicionamento relativo entre a passagem da câmara 3 para a câmara 9 e a passagem da câmara 4 para a câmara 1r não deverá ser descurado. Tal deve-se à possibilidade de a água proveniente da fonte quente encontrar dois caminhos de saída se ambos os manípulos estiverem abertos, isto é, tanto pode sair pela passagem da câmara 3 para a câmara 9 como pode, via reservatório, aparecer na câmara 4r, ou seja, haver um fornecimento indevido de caudal na zona de água fria. Uma forma de evitar este problema é fazer com que a movimentação do corpo H, além de abrir a passagem 3-9, também obstrua a passagem 4-1r, obstrução essa que nunca poderia ser completa pois tal implicaria uma perda do *"sensing"* da pressão da câmara 1r na câmara 4. Esta caudal indevido é particularmente indesejável quando a temperatura da fonte de água quente já atingiu a temperatura desejada, ou seja, com o bolbo completamente expandido e o corpo H na sua posição máxima (x_3 = 11.75 mm). Como tal, uma solução inicial poderá passar pela complementaridade das áreas de passagem 3-9 e 4-1r.

O restritor existente entre a câmara 3 e a câmara 9, por seu lado, deverá garantir alguma pressurização da câmara 3 bem como restringir o caudal de saída de água quente.

Tal como foi referido, o caudal de referência debitado pela válvula misturadora deverá rondar os 10 *l/min*. Assim, combinando as Eqs. (19a), (19b), (22) e (28) resulta que

$$\frac{1}{A_{05,9}^2}=\frac{2\,C_d^2}{\rho\,\dot{Q}^2}(P_1-P_{10})-\psi\,C_d^2 \tag{63}$$

onde ψ representa

$$\psi=\frac{1}{C_d^2}\left(\frac{1}{A_{x1}^2}+\frac{1}{A_{x3}^2}+\frac{1}{A_{o2,3}}\right)+\frac{A_9^2(1-\zeta_{9,10})-A_{10}^2}{A_9^2\,A_{10}^2}$$

A Eq. (63) apenas é válida para o caso em que a entrada de água fria se encontra fechada e o reservatório cheio, isto é, não há caudal de 3 para 4. Se a entrada de água quente se encontrar completamente aberta e a saída de 3 para 9 completamente desimpedida (isto é, x_3 = 11.75 mm, quando o bolbo se encontra completamente expandido), da Eq. (63) resulta que

$$A_{o5,9}=1.6656\times10^{-5}\,m^2\approx0.13\cdot A_{\phi=1/2''}$$

Uma vez dimensionados todos os componentes que influenciam os caudais que interagem com o corpo H, a mola que actua neste poderá ser analisada. A mola deverá empurrar o corpo para a esquerda quando o reservatório está vazio, obstruindo por completo a passagem da câmara 3 para a câmara 9 e deverá deslocar-se para a direita progressivamente com o enchimento do reservatório. No entanto, a abertura total da passagem da câmara 3 para a câmara 9 só se deverá realizar devido à acção do bolbo. Se se atender a uma temperatura máxima do bolbo de 65ºC, pela sua constante de expansão linear, teremos um deslocamento do êmbolo de 11.75 mm. Poder-se-á admitir, então, que a pressão do reservatório induz num deslocamento menor que 11.75 mm, sendo 10 mm um valor aceitável. Substituindo na Eq. (34), fica

$$(P_3^{vazio}-P_4^{vazio})(A_3-A_{o3,4})+(P_4^{vazio}-P_8^{vazio})\,A_8-k_H(0+x_H^{pre})=0 \tag{64a}$$

$$(P_4^{cheio}-P_8^{cheio})A_8-k_H(0.01+x_H^{pre})=0 \tag{64b}$$

Com o reservatório cheio não haverá caudal de 3 para 4 nem de 4 para 1r, sendo as suas pressões, portanto, iguais. Tal só resulta se se considerar que a entrada da água fria se

encontra inteiramente fechada. Note-se que os termos de aceleração e atrito não foram considerados por serem praticamente nulos nas condições extremas. Resta, assim, determinar as pressões indicadas. Como já foi referido, com o reservatório cheio, P_4 é igual a P_{1r}, ou seja, 2.5 bar. A pressão do volume de controlo 8, na referida situação, deverá ser igual à pressão em 9 (uma vez que não há caudal da fonte fria) e, portanto, sensivelmente superior a 1 bar.

Com o reservatório vazio, a melhor solução para rapidamente se determinar as pressões envolvidas será introduzir rigidez/pré-compressão elevadas para a mola (garantindo o bloqueamento total da passagem de 3 para 9) e avaliar as pressões iniciais através de uma simulação. Este método, apesar de empírico, será suficiente para uma primeira aproximação, uma vez que a dinâmica do sistema não é muito rápida. Com este método, as pressões obtidas foram: P_3 = 1.801 bar, P_4 = 1.295 bar e P_8 = 1 bar, sendo que a entrada de água quente se encontra completamente aberta desde o início da simulação. Substituindo estes valores nas Eqs. (64a) e (64b), determina-se que

$$\begin{cases} k_H &= 3829\, N/m \\ x_H^{pre} &= 0.0092\, m \end{cases}$$

Do lado do reservatório será necessário dimensionar dois restritores e uma mola com a respectiva pré-compressão. Os restritores podem ser analisados da mesma forma que o restritor referente à passagem da câmara 3 para a câmara 9. Para o restritor entre a câmara 3r e a câmara 4r, com um caudal de 11 *l/min* (correspondendo a 10 *l/min* fornecidos pelo reservatório e um pequeno caudal de 1 *l/min* fornecido pela rede), combinando as equações (19d), (19e), (19f), (22) e (26), resulta

$$\frac{1}{A_{o3r,4\mathrm{r}}^2} = \frac{2C_d^2}{\rho Q_{9,10}^2}(P_{1\mathrm{r}} - P_{10}) - \left(\frac{1}{A_{o1r,3\mathrm{r}}^2} + \frac{1.1^2}{A_{o8,9}^2}\right) - \frac{1.1^2}{C_1^2} - \frac{1.1^2}{C_2^2} \tag{65}$$

onde C_1 e C_2 são dados por

$$C_1 = \frac{A_9\ A_{10}}{\sqrt{A_9^2(1+\zeta_{9,10})-A_{10}^2}}$$

$$C_2 = \frac{C_d\ A_{x2}\ A_{4\mathrm{r}}\ A_7}{\sqrt{(1+\zeta_{4\mathrm{r},7})\,A_{4\mathrm{r}}^2(C_d\,A_{x2})^2-A_7^2(C_d\,A_{x2})^2+A_7^2\,A_{4\mathrm{r}}^2}}$$

Tendo a entrada de água fria totalmente aberta e o reservatório cheio, determina-se que

$$A_{o3r,4\mathrm{r}}=1.76\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2\approx0.139\cdot A_{\phi=1/2''}$$

Por outro lado, para o restritor mesmo antes da câmara 7r, pode-se combinar as Eqs. (19d), (19g), (22), (26) e (29) fica

$$\left(\frac{\dot{Q}_{6\mathrm{r},7\mathrm{r}}/\dot{Q}_{9,10}}{C_3}\right)^2=\frac{2(P_{6\mathrm{r}}-P_{10})}{\rho\dot{Q}_{9,10}^2}-\left[\frac{1}{C_d^2}\left(\frac{1}{A_{o8,9}^2}+\left(\frac{\dot{Q}_{7\mathrm{r},4\mathrm{r}}/\dot{Q}_{9,10}}{A_{xr}}\right)^2\right)+\frac{1}{C_1^2}+\frac{1}{C_2^2}\right] \tag{66}$$

Em que C_1 e C_2 são os mesmo factores da Eq. (65) e C_3 é definido por

$$C_3=\frac{C_d\ A_{xr}\ A_{o6r,7r}}{\sqrt{A_{xr}^2+A_{o6r,7r}^2}} \tag{67}$$

Tomando novamente o caudal de referência por 10 *l/min* e admitindo uma pressão da fonte de água fria de 3 bar (valor usual), o parâmetro C_3 toma o valor de aproximadamente $8.5678\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$. Este valor corresponde a uma abertura total do batente R, ou seja x_r = 0 mm, quando o reservatório se encontra no seu nível mínimo e sem debitar qualquer caudal. Deste modo, resolvendo a Eq. (67) em ordem à área do restritor, resulta que

$$A_{o6r,7r}=1.4371\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2\approx0.113\cdot A_{\phi=1/2''}$$

Pela Eq. (66), denota-se que o caudal debitado pela fonte de água fria quando o reservatório está cheio não poderá ser nulo. Tal restrição faz sentido do ponto de vista físico, uma vez que haverá sempre alguma área de passagem, tal como foi discutido em 3.3. Simulação do Sistema. Utilizando, então, novamente as Eqs. (66) e (67), com um caudal $\dot{Q}_{6\mathrm{r},7\mathrm{r}}$ baixo (1 *l/min*, por exemplo) é possível extrair a área deixada aberta pelo batente R na situação em que o reservatório está a debitar o seu caudal máximo ($\dot{Q}_{1\mathrm{r},3\mathrm{r}}$ = 10 *l/min*):

$$A_{xr}=2.019\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2\approx0.0159\cdot A_{\phi=1/2"}\Rightarrow x_r\approx12.13\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Resta, agora, determinar os parâmetros da mola associados ao batente R. Pela Eq. (31), resulta que, nos extremos (x_r = 0 e x_r = 12.13 mm)

$$0=(P_{3\mathrm{r}}^{vazio}-P_{7\mathrm{r}}^{vazio})\,A_{3\mathrm{r}}+k_r(x_r^{pre}-0) \tag{68a}$$

$$0=(P_{3\mathrm{r}}^{cheio}-P_{7\mathrm{r}}^{cheio})\,A_{3\mathrm{r}}+k_r(x_r^{pre}-12.13\times10^{-3}) \tag{68b}$$

Tal como anteriormente, os valores da aceleração e da velocidade foram desconsiderados por serem tidos como muito reduzidos. Por condição, a pressão do reservatório, P_{1r}, é conhecida nas condições extremas. Utilizando a Eq. (19e) e considerando caudais instantâneos de 10 *l/min* e 0 *l/min* para o reservatório cheio e vazio, respectivamente, a pressão P_{3r} pode, então, ser conhecida. O mesmo se pode efectuar com a Eq. (29) para a determinação da pressão P_{7r}. Assim, fica

$$\begin{array}{llll} Q_{1\mathrm{r},3\mathrm{r}}^{cheio}=10\,l/min; & P_{1\mathrm{r}}^{cheio}=2.5\,bar & \Rightarrow & P_{3\mathrm{r}}^{cheio}=2.476\,bar \\ Q_{1\mathrm{r},3\mathrm{r}}^{cheio}=0\,l/min; & P_{1\mathrm{r}}^{cheio}=1\,bar & \Rightarrow & P_{3\mathrm{r}}^{vazio}=1\,bar \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} Q_{6\mathrm{r},7\mathrm{r}}^{cheio}=1\,l/min; & A_{xr}^{cheio}=0.0115\cdot A_{\phi=1/2"} & P_{7\mathrm{r}}^{cheio}=2.03\,bar \\ Q_{6\mathrm{r},7\mathrm{r}}^{vazio}=10\,l/min; & A_{xr}^{vazio}=1\cdot A_{\phi=1/2"} & P_{7\mathrm{r}}^{vazio}=1.09\,bar \end{array}$$

Substituindo os valores anteriores nas equações respectivas, fica

$$\begin{cases} 0 = -0.09\cdot A_{3\mathrm{r}}\times10^5+k_r\cdot x_r^{pre} \\ 0 = 0.496\cdot A_{3\mathrm{r}}\times10^5+k_r\cdot x_r^{pre}-k_r\,12.13\times10^{-3} \end{cases}$$

Numa primeira consideração, utilizar-se-á uma área para o batente R de 200% da área de uma secção circular de ½" de diâmetro, ou seja, 2 vezes a área das tubagens utilizadas. Isto deve-se à necessidade de existirem forças suficientemente elevadas no batente para que o atrito estático não cause problemas. Resolvendo o sistema de equações, é possível determinar os parâmetros da mola

$$\begin{cases} k_r \approx 1125\,N/m \\ x_r^{pre} \approx 0.0021\,m \end{cases}$$

Por último, é necessário determinar as dimensões do bolbo, nomeadamente a sua área exterior. O bolbo deverá ter o menor tempo de resposta possível, pelo que deverá ter uma grande área envolvente e uma baixa massa (Eqs. (49) (50)). Uma vez que o material do bolbo se encontra relativamente restringido (isto é, a sua massa e calor específicos não podem ser mudados), aquelas duas condições não são fáceis de cumprir, especialmente quando há restrições de espaço. Por outro lado, uma menor massa influencia o coeficiente de expansão linear α de forma inversa [24]. Desta forma, bolbos com menor massa terão uma menor inércia térmica mas também um menor deslocamento. Tendo estes factores em conta, o bolbo escolhido terá ainda que corresponder a um modelo *standard*, se se quiser manter um baixo custo de fabrico do sistema aqui proposto.

5. Análise Dinâmica e Optimização do Sistema

5.1 Análise Dinâmica Preliminar do Sistema

Antes de uma análise mais cuidada à dinâmica completa do sistema, há que analisar o pré-dimensionamento efectuado, isto é, se os parâmetros inicialmente calculados cumprem os requisitos de projecto. Nota para o facto de, em qualquer simulação efectuada, a abertura dos manípulos seguir sempre uma curva de 3º grau, de modo a reduzir a rigidez do sistema.

No caso do bolbo e da mola do corpo H, será interessante analisar a situação onde, após abertura da entrada de água quente, a temperatura da água disponibilizada é baixa (cerca de 18ºC), verificando-se o enchimento do reservatório, inicialmente vazio. Nesta situação, com a entrada da água fria completamente fechada, o progressivo enchimento do reservatório deverá empurrar o êmbolo maciço do corpo H para a direita em cerca de 10 mm, partindo de uma posição inicial nula. Progredindo no tempo, a temperatura da fonte de água quente deverá subir até aos 65ºC (segundo uma curva do 3º grau, para reduzir a rigidez do sistema), fazendo com que o bolbo expanda e empurre o corpo H até à sua posição máxima. Nesta última situação, o caudal fornecido pela válvula misturadora deverá rondar os 10 *l*/*min*. Nas Figs. 8 e 9 estão representados os resultados desta simulação.

Nos diversos gráficos é possível observar que o sistema, de um modo geral, se comportou sensivelmente como esperado. De facto, a água fria proveniente da fonte de água quente foi desviada para o reservatório, cujo volume subiu até próximo dos 3.8 *l*; a pressão entretanto atingida no reservatório (cerca de 2.4 bar, um pouco menos do que o esperado) foi empurrando o corpo H para a direita (posição x_3) até um máximo de cerca de 9 mm (cerca de 1 mm menos, devido à menor pressão final do reservatório). Começando a temperatura da fonte de água quente a subir, o bolbo foi-se expandindo, empurrando ainda mais o corpo H até à posição final de 11.75mm. Em todo o caso, o caudal de saída da válvula misturadora ($Q_{9,10}$) ronda os 10 *l*/*min*, valor estipulado. De frisar ainda o tempo de reacção do bolbo: numa analogia com os parâmetros normalmente utilizados para avaliar a

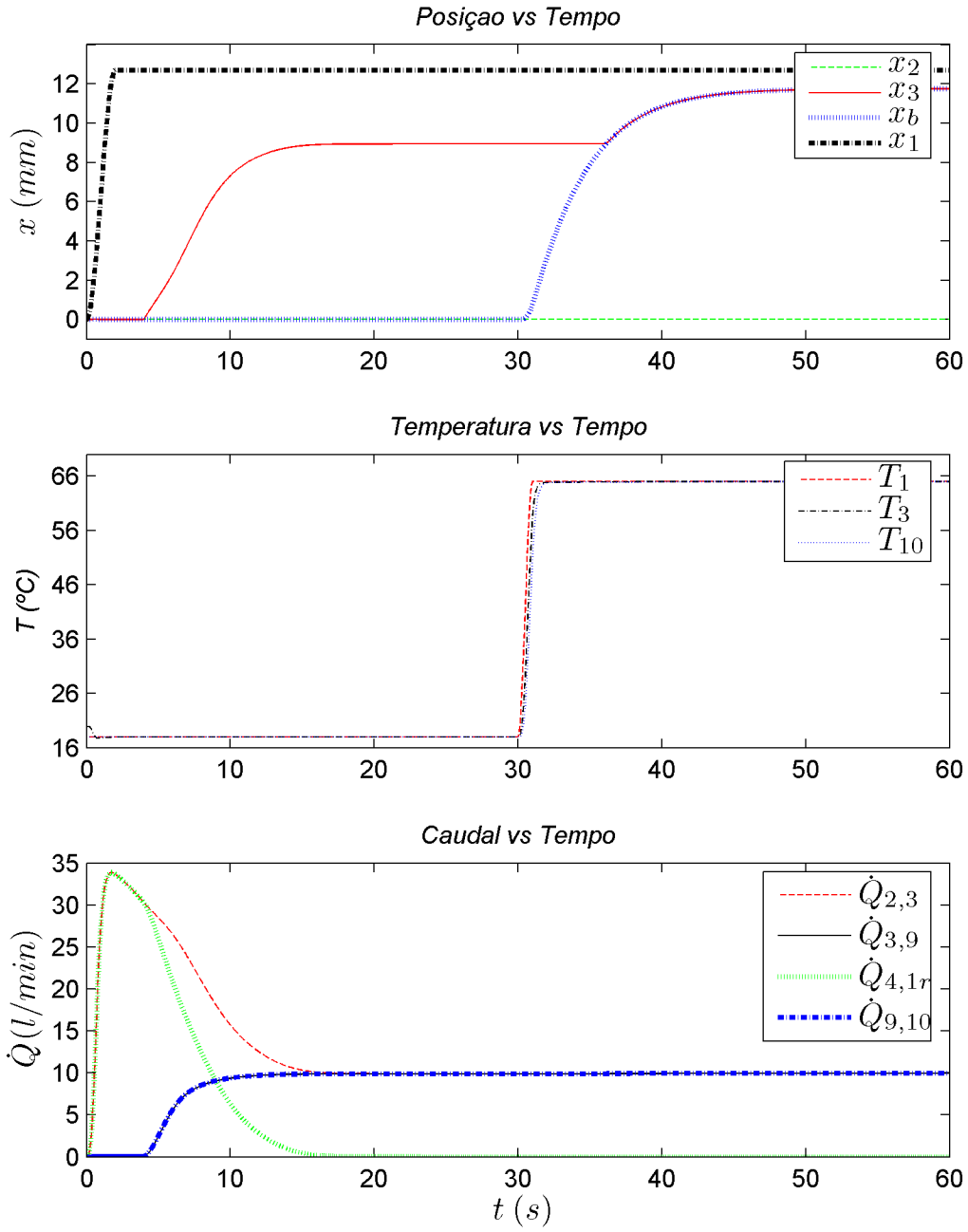


Figura 8: Resposta do sistema, em termos de posição das partes móveis, temperatura e caudal, a uma subida da temperatura da fonte quente, com o manípulo M1 totalmente aberto e o reservatório inicialmente vazio. k_H = 3892 N/m; x_H =0.0092 m.

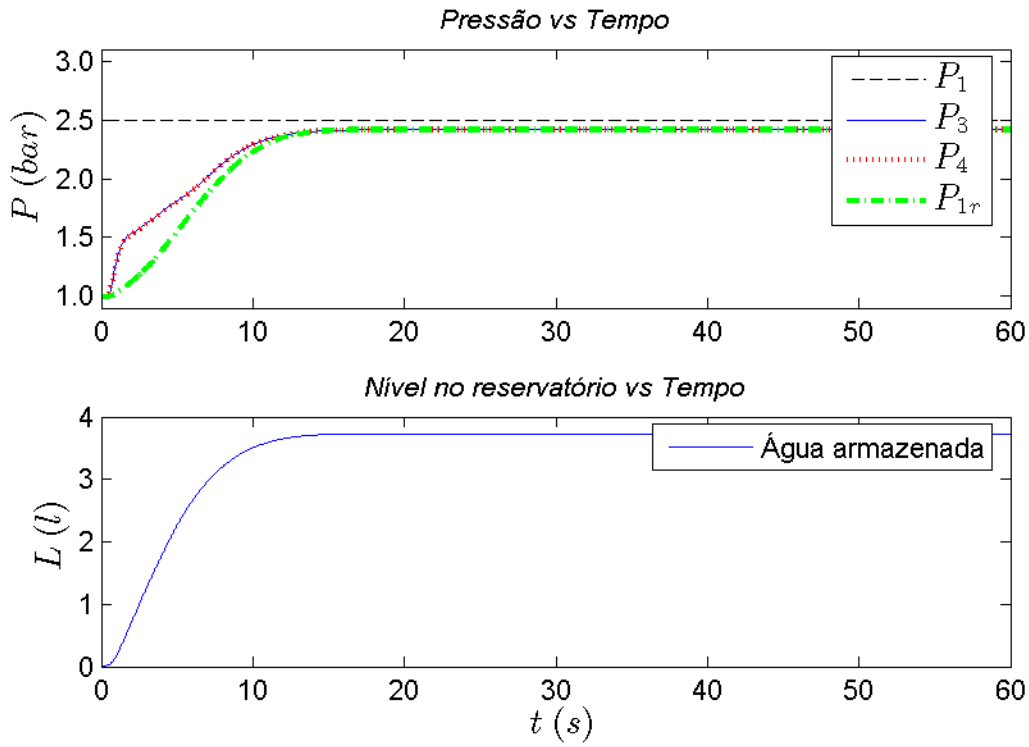


Figura 9: Resposta do sistema, em termos de pressão e nível do reservatório, a uma subida da temperatura da fonte quente, com o manípulo M1 totalmente aberto e o reservatório inicialmente vazio. k_H = 3892 N/m; x_H =0.0092 m.

resposta transitória de um sistema submetido a um degrau, podemos extrair o *tempo de crescimento* do bolbo (intervalo de tempo entre 10% e 90% da posição final do bolbo) e também o *tempo de estabelecimento* (tempo necessário para atingir cerca de 95% da posição final do bolbo). No caso apresentado, o tempo de crescimento situou-se na casa dos 8 *s*, sendo que o tempo de estabelecimento foi de 11.5 *s*.

No que toca ao reservatório propriamente dito, com este inicialmente na sua capacidade máxima e com a entrada de água quente fechada, o caudal inicial fornecido pela rede deverá ser cerca de 1 *l/min*, sendo que o reservatório deverá fornecer cerca de 10 *l/min*. Nestas circunstâncias, o batente R deverá encontrar-se perto da posição x_r = 12.13 mm. À medida que o nível do reservatório desce, o batente R deverá recuar, passando a rede a fornecer todo o caudal, isto é, cerca de 10 *l/min*. Os resultados desta simulação estão apresentados nas Figs. 10 e 11.

Como se pode observar, o batente R não assumiu o comportamento desejado. Na verdade, o batente R atingiu a sua posição máxima limitada pelo fim-de-curso, inserido a x_r = 13 mm, o que reduziu a área de passagem deixada livre pelo batente R, mantendo-a constante até ao instante em que o reservatório atingiu um nível de 2 *l* de água armazenada. Apenas após esta descida de pressão é que o batente R reassumiu um comportamento dinâmico, variando a área de passagem do caudal proveniente da fonte de água fria em função do nível do reservatório. Note-se ainda que, em regime permanente, o reservatório possui cerca de 0.3 *l*, o que significa que a pressão mínima neste será superior à prevista ($P_{1r}^{R.P.} \approx 1.04\,bar$), facto particularmente notório na posição final do batente que, ao invés de se encontrar perto de x_r = 0 mm, não recuou além de um valor próximo do da pré-compressão. No que toca aos caudais, o principal aspecto a reter é a progressão muito rápida do caudal fornecido pela rede ($\dot{Q}_{7r,4r}$) em contraste com a diminuição lenta do caudal fornecido pelo reservatório ($\dot{Q}_{3r,4r}$). Este factor provoca uma oscilação no caudal de saída $\dot{Q}_{4r,8}$, atingindo este um máximo de cerca de 15 *l/min* (considerando apenas os momentos após o batente R reentrar em comportamento dinâmico). Em regime

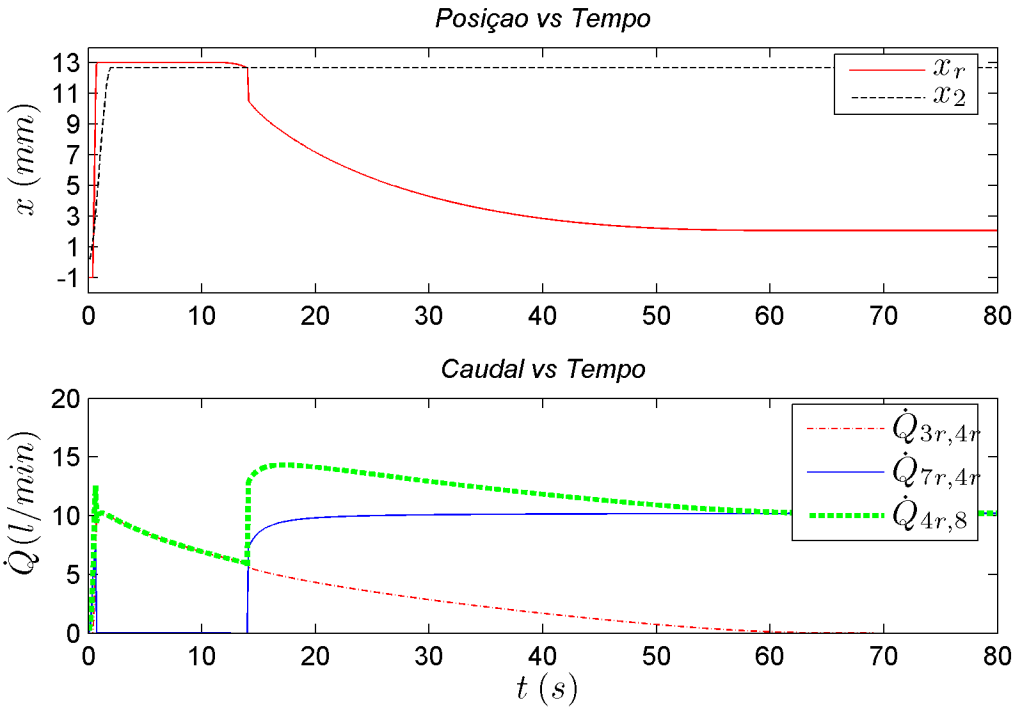


Figura 10: Resposta do sistema, em termos de posição do batente e caudal, a uma abertura total do manípulo M2, com o reservatório inicialmente cheio. k_r = 1125 N/m; x_r =0.0021 m.

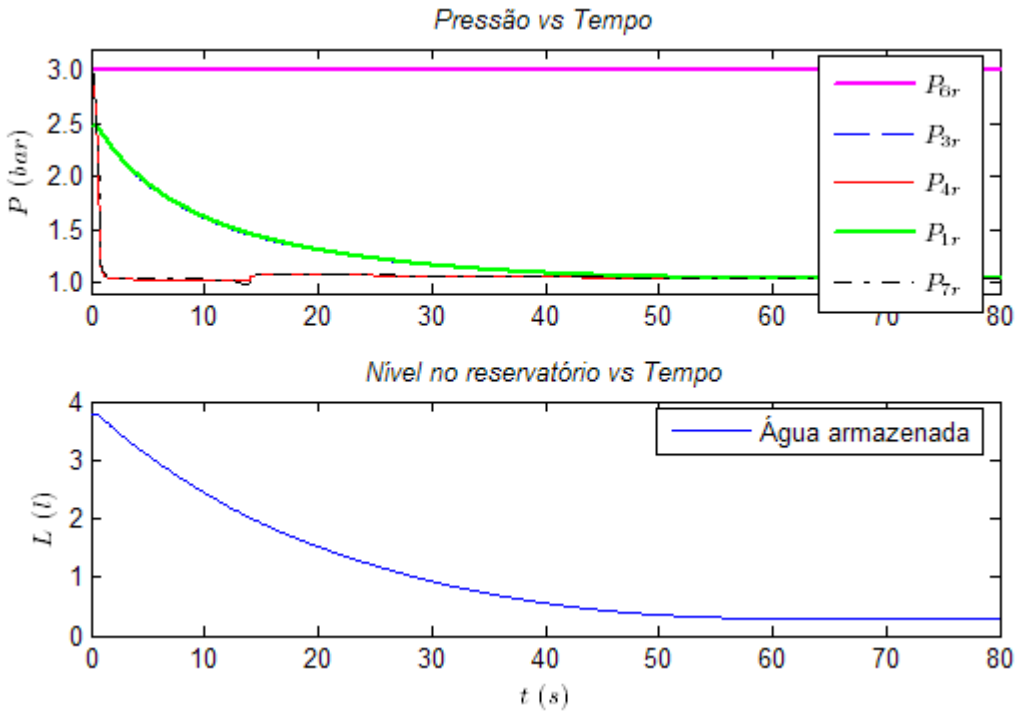


Figura 11: Resposta do sistema, em termos de pressão e nível do reservatório, a uma abertura total do manípulo M2, com o reservatório inicialmente cheio. k_r = 1125 N/m; x_r =0.0021 m.

estacionário, o caudal total debitado pela válvula misturadora foi sensivelmente o 10 *l*/*min*, como pretendido.

Resta, então, analisar a situação extrema onde, começando com o reservatório vazio, ambas as entradas se encontram completamente abertas. Como se pode ver nos gráficos das Figs. 12 e 13, a solução de complementaridade não é suficiente para impedir o escoamento de água quente para a zona de água fria, uma vez que, em regime estacionário, o seu valor é de cerca de 2.65 *l*/*min*. Note-se ainda que, ficando o batente R encostado ao fim-de-curso nos momentos iniciais, o caudal de saída do sistema ($\dot{Q}_{9,10}$) apresenta grandes oscilações, estabilizando apenas quando o batente R reassume o comportamento dinâmico, por volta dos 30 segundos. No que toca à resposta do reservatório, a água fria debitada pela fonte de água quente foi sendo armazenada até um nível máximo de 3.24 *l* até à subida da temperatura da água da fonte quente. Nestas circunstâncias, a fonte de água fria não debita praticamente qualquer caudal (uma vez que o batente R encostou ao fim-de-curso) mas antes é a fonte de água quente que disponibiliza a totalidade do caudal da válvula misturadora.

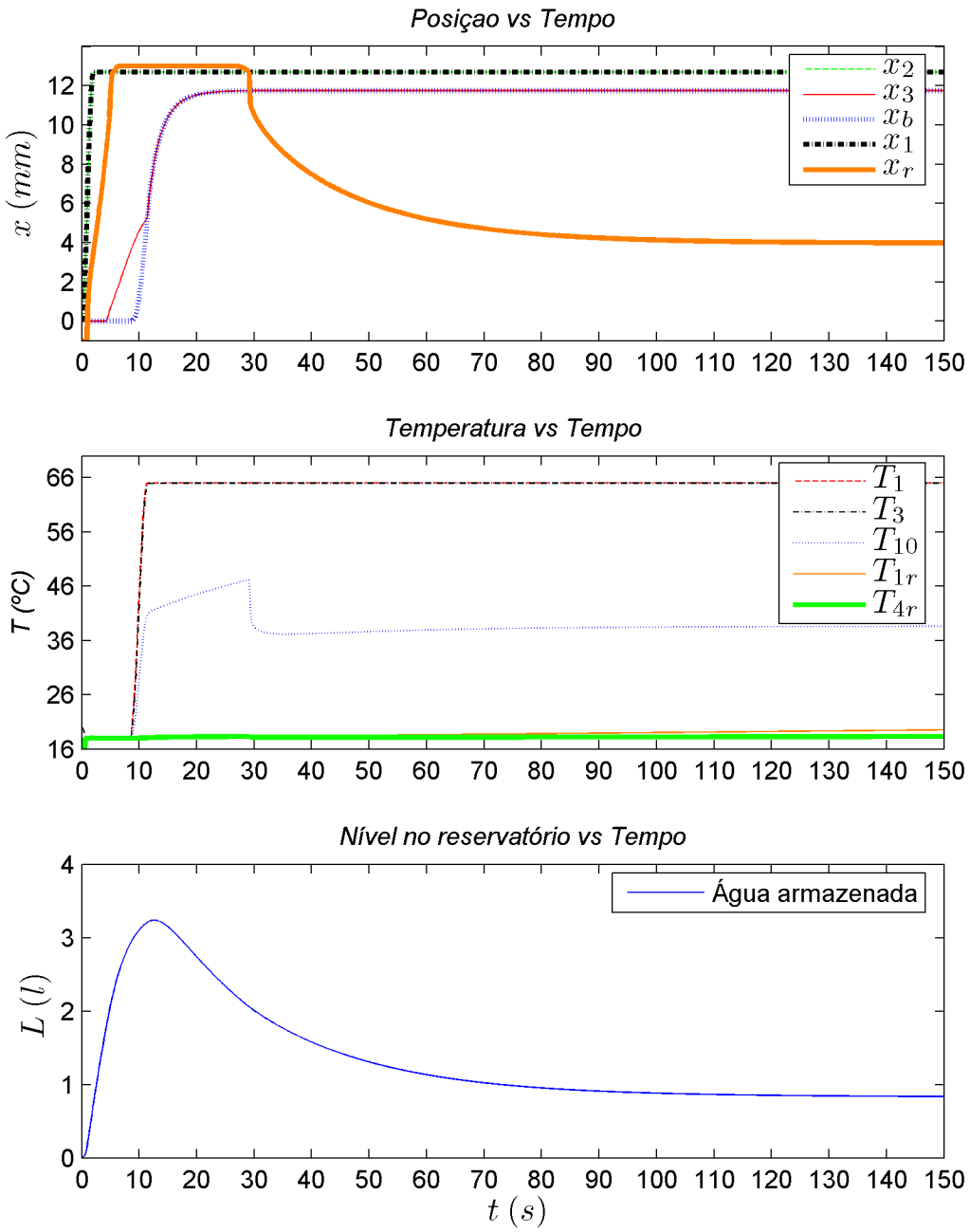


Figura 12: Resposta do sistema, em termos de posição, temperatura e volume armazenado, a uma subida da temperatura da fonte quente, com ambos os manípulos abertos. Reservatório inicialmente vazio. Áreas $A_{3,9}$ e $A_{4,1r}$ complementares.

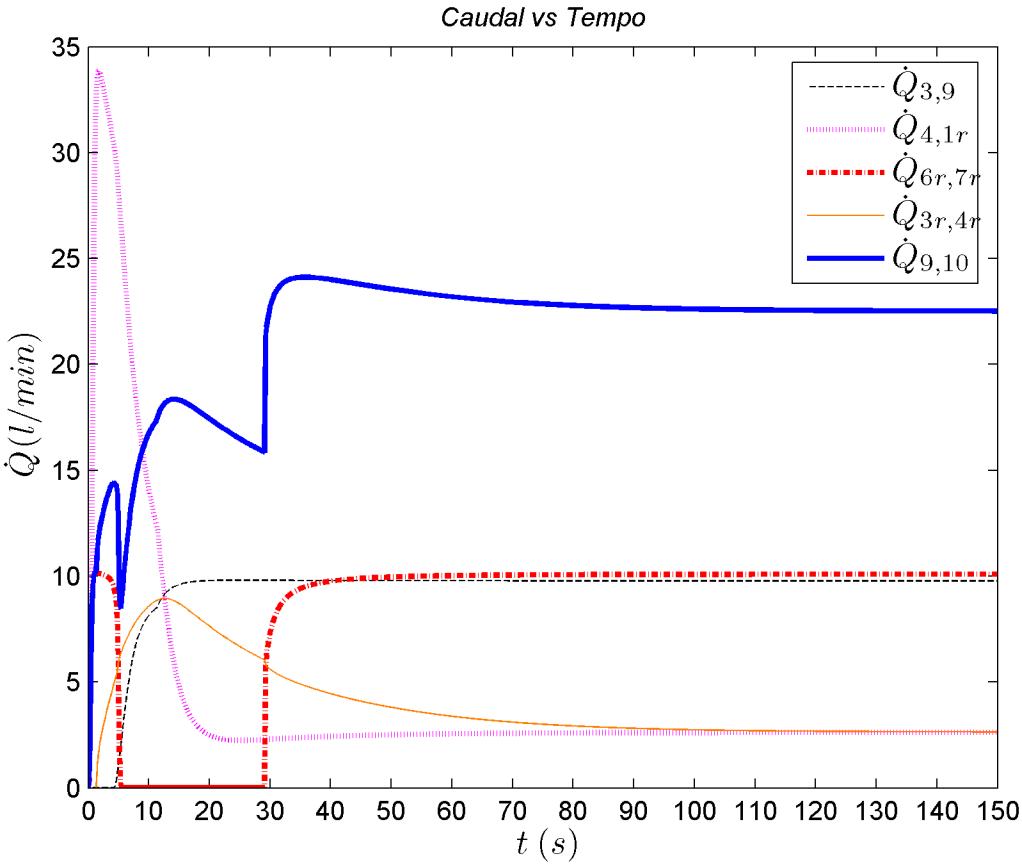


Figura 13: Resposta do sistema, em caudal, a uma subida da temperatura da fonte quente, com ambos os manípulos abertos. Reservatório inicialmente vazio. Áreas $A_{3,9}$ e $A_{4,1r}$ complementares.

5.2 Optimização de Parâmetros do Sistema

Para a optimização do sistema será necessário criar funções-objectivo escalares, cujo mínimo (ou máximo) reflictam o comportamento desejado. Todavia, há que ter em conta que, sendo estas funções criadas de forma claramente subjectiva, encontrar o seu mínimo global poderá ser desnecessário. De facto, o verdadeiro objectivo desta optimização é encontrar um conjunto de parâmetros que induzam um determinado comportamento do sistema que poderá ser atingido num mínimo local da função-objectivo criada.

No caso dos parâmetros da mola do êmbolo, tem-se por objectivo que, com o reservatório vazio e as entradas inicialmente fechadas, o corpo H se apresente inicialmente a bloquear completamente a passagem de 3 para 9 (x_3 = 0 mm) e que, com o progressivo

enchimento do reservatório, o corpo H vá avançando até um posição x_3 = 10 mm. Uma possível função objectivo poderá ser definida como

$$f(k_H, x_H^{pre}) = |x_3(inicial) - 0| + |x_3(final) - 10| \tag{69}$$

A posição x_3 final pode ser facilmente extraída dos resultados mas o mesmo não se passa com a posição inicial. De facto, devido às características do processo de simulação, sendo x_3 uma variável de estado o seu valor para o instante t = 0 s é definido *a priori*. Importa, então, avaliar os valores de x_3 para um curto intervalo de tempo, onde se pretende que x_3 não apresente uma variação muito severa na sua posição em torno da origem. Para tal, a função (69) pode ser alterada para

$$f(k_H, x_H^{pre}) = \sum_{n=0}^{m} (m+1-n) \cdot |x_3(n \cdot \Delta t) - 0| + |x_3(final) - 10| \tag{70}$$

onde m, n e Δt deverão ser escolhidos de tal forma que o instante final de avaliação de x_3 inicial não seja muito elevado. Note-se que o produto $(m-n)$ pretende dar mais peso aos primeiros instantes em detrimento dos instantes finais da avaliação da posição inicial de x_3, isto é, se m = 9, a Eq. (70) resulta no somatório dos primeiros 10 instantes de tempo (distanciados entre si em Δt segundos), começando no instante t = 0s, onde o primeiro termo tem um peso 10 (9+1 - 0), o segundo um peso 9, o terceiro 8 e assim sucessivamente e terminando do instante de tempo $m \cdot \Delta t$.

Para optimizar a função (70) utilizou-se o algoritmo *fminsearch* já incluído no *MatLab*, na sua *toolbox* de optimização. Esta função, apesar de apenas localizar mínimos locais, é bastante simples e rápida, uma vez que se trata de um simples método de bissecção modificado (para a o caso particular de funções escalares). Tal facto não levanta problemas uma vez que o pré-dimensionamento discutido anteriormente já se apresenta muito próximo do comportamento pretendido, pelo que pode ser usado como solução inicial. Assim, a optimização da função (70) originou o seguinte resultado:

$$\begin{cases} k_H = 3420\ N/m \\ x_H^{pre} = 10.3\ mm \end{cases}$$

Com estes parâmetros, o comportamento do sistema é, de facto, extremamente próximo do desejado (Figs. 14 e 15): a posição x_3 do corpo H,, com o reservatório cheio, ascende aos 10 mm pretendidos, partindo de uma posição inicial nula.

Para a optimização dos parâmetros da mola do reservatório, criou-se a seguinte função:

$$f(k_H, x_H^{pre}) = 5|max(x_r) - 12.13| + |x_r(final) - 0| \quad (71)$$

Esta função apresenta-se mais simples porque ao invés de se determinar a posição do batente R nos instantes iniciais, bastará garantir que a sua posição máxima não exceda os 12.13 mm previstos no dimensionamento prévio. O factor de multiplicação 5 deve-se ao facto do caudal que passa pelo estrangulamento causado pelo batente R ser muito mais sensível a variações na área de secção quando esta é muito reduzida, isto é, para valores de x_r elevados, sendo, por isso, mais importante garantir uma maior precisão no que toca à posição máxima atingida pelo batente R.

Mais uma vez, poder-se recorrer à função *fminsearch*. Analisando a solução pré-dimensionada, facilmente se depreende que as pressões P_{3r} e P_{7r} em regime estacionário são

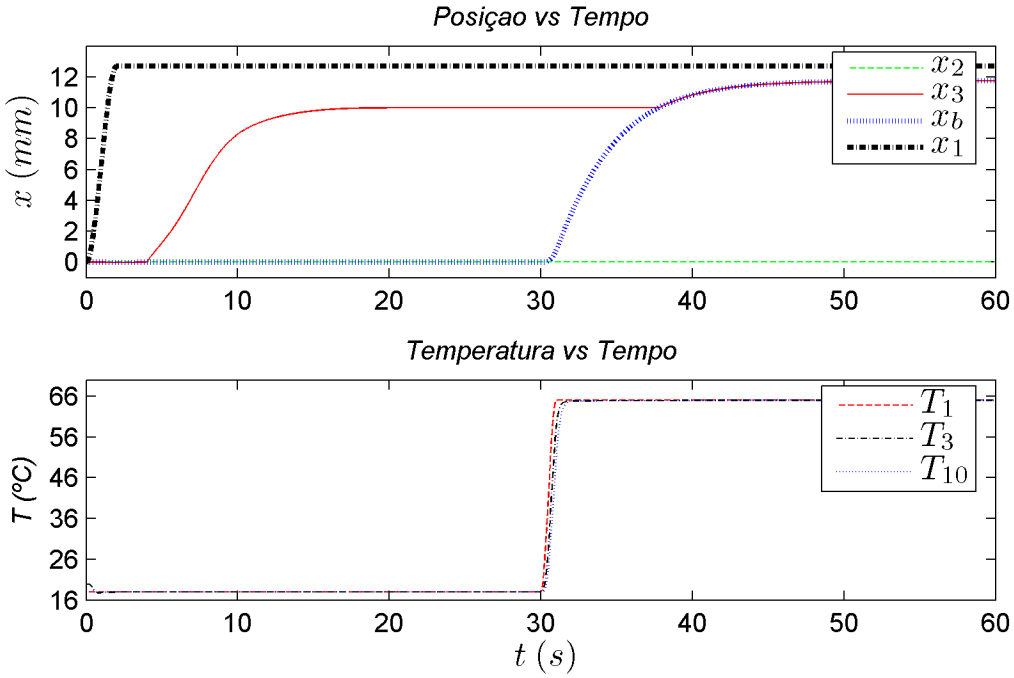


Figura 14: Resposta do sistema, em termos de posição e temperatura, a uma subida da temperatura da água da fonte quente, com o manípulo M1 totalmente aberto. Reservatório inicialmente vazio. k_H = 3420 N/m; x_H = 10.3 mm

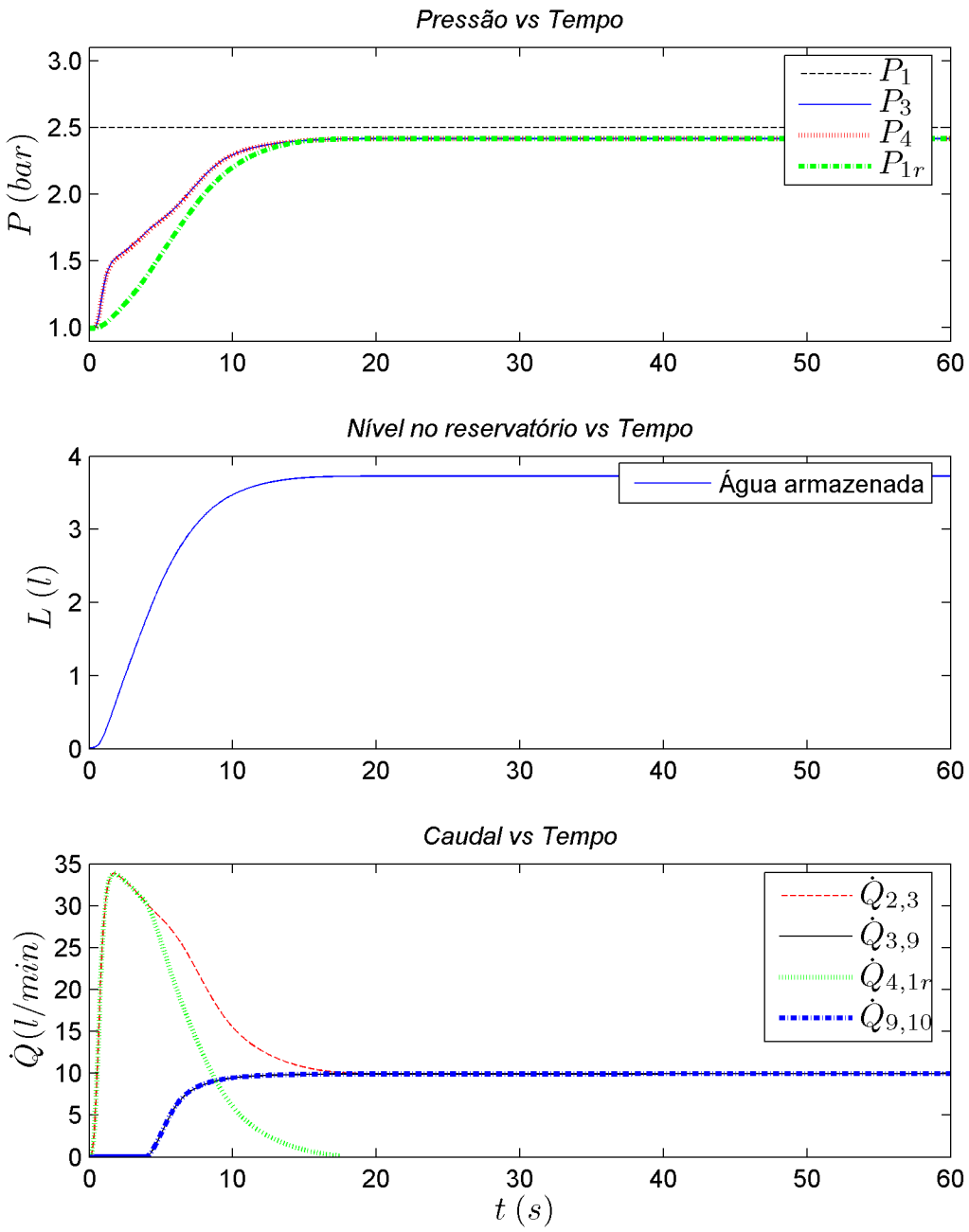


Figura 15: Resposta do sistema, em termos de pressão, nível do reservatório e caudal, a uma subida da temperatura da água da fonte quente, com o manípulo M1 totalmente aberto. Reservatório inicialmente vazio. k_H = 3420 N/m; x_H = 10.3 mm

praticamente idênticas, pelo que a solução inicial a utilizar poderá ser baseada no pré-dimensionamento, alterando apenas este parâmetro.

$$\left(k_r, x_r^{pre}\right)_{inicial} = \begin{cases} k_r & = & 1125 & N/m \\ x_r^{pre} & = & 0 & mm \end{cases}$$

A solução encontrada, desta forma, foi a seguinte:

$$\begin{cases} k_r & = & 1138 & N/m \\ x_r^{pre} & = & 0 & mm \end{cases}$$

Esta solução é claramente insuficiente, como se pode constatar pelos gráficos da Fig. 16. Apesar de a posição final ser a desejada, o batente R continua a encostar ao fim-de-curso introduzido, o que não permite a correcta conjugação dos caudais da secção do reservatório. Esta optimização não foi bem sucedida porque a função-objectivo apresenta um mínimo local perto da solução inicial. A forma mais expedita de encontrar uma nova solução inicial será explorando a função-objectivo para diversos valores de rigidez para a

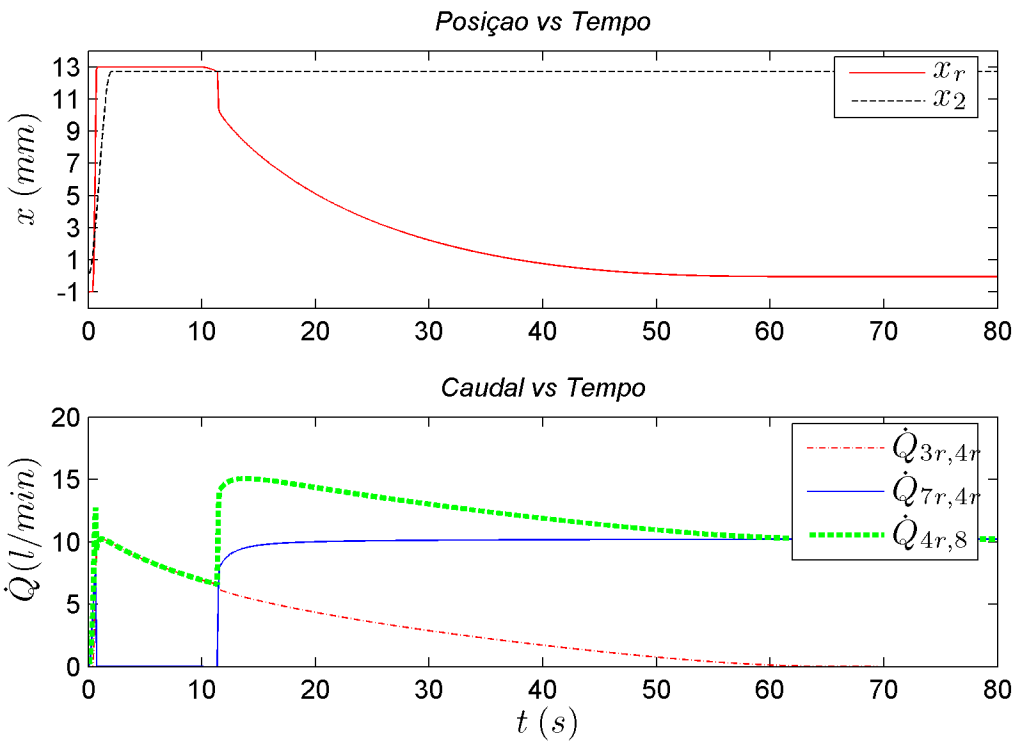


Figura 16: Resposta do sistema, em termos de posição e caudal, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente cheio. k_r = 1138 N/m; x_r^{pre} = 0 mm;

mola do batente R, fixando a pré-compressão a 0 *mm*, uma vez que este valor é obrigatório para que a posição final de x_3 seja a pretendida.

Como se pode observar pela Fig. 17, a função objectivo não varia muito para rigidezes da mola do batente R entre 1000 *N/m* e 2000 *N/m,* o que explica o insucesso da primeira solução inicial usada para a optimização. Por outro lado, junto de $k_r = 2500$ *N/m*, a função objectivo apresenta um claro mínimo (local, pelo menos), pelo que se poderá utilizar novamente a função *fminsearch* com a seguinte solução inicial:

$$\left(k_r, x_r^{pre}\right)_{inicial} = \begin{cases} k_r & = & 2500 & N/m \\ x_r^{pre} & = & 0 & mm \end{cases}$$

Com esta solução inicial, a solução optimizada obtida foi a seguinte:

$$\begin{cases} k_r & = & 2619 & N/m \\ x_r^{pre} & = & 0 & mm \end{cases}$$

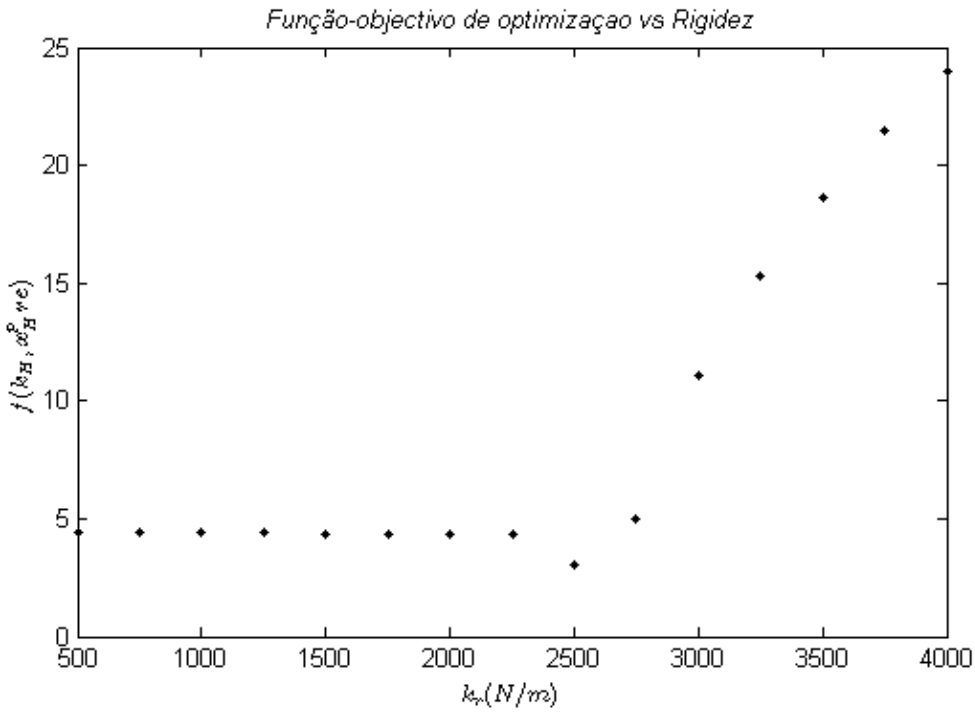


Figura 17: Valores da função objectivo para a optimização dos parâmetros do batente R em função da rigidez da mola associada. $x_r^{pre} = 0$ *mm;*

O comportamento para o batente R, com o reservatório inicialmente cheio e a entrada de água quente fechada, será, então, descrito pelos gráficos das Figs. 18 e 19.

Com estes parâmetros, a posição final do batente R é de -0.015 mm, atingindo um máximo de 12.17 mm, ou seja, praticamente idêntico ao pretendido. Porém, o caudal de saída da zona de água fria ($\dot{Q}_{4r,8}$) continua a apresentar um comportamento algo oscilatório, isto é, com o reservatório cheio, o caudal de saída nos primeiros segundos (~5 *s*) oscila entre os ~12-18 *l/min*. Tal deve-se, como já foi referido, a uma grande sensibilidade do caudal da rede com a área de passagem deixada livre pelo batente, quando esta é pequena. De facto, se se analisar o factor C_3 da Eq. (67) em função da posição do batente verifica-se a maior sensibilidade daquele em função das posições mais elevadas deste, isto é, na zona de menores percentagens de área livre (Fig. 20). Note-se que a zona com maior progressão do factor C_3 situa-se entre os 0-15% de área livre, ou seja, entre x_r = 10-12.7mm. Um deslocamento do batente R na ordem de 2 mm seria muito difícil de garantir em termos de fiabilidade do sistema, pelo que será necessário explorar outras soluções para a geometria do batente R.

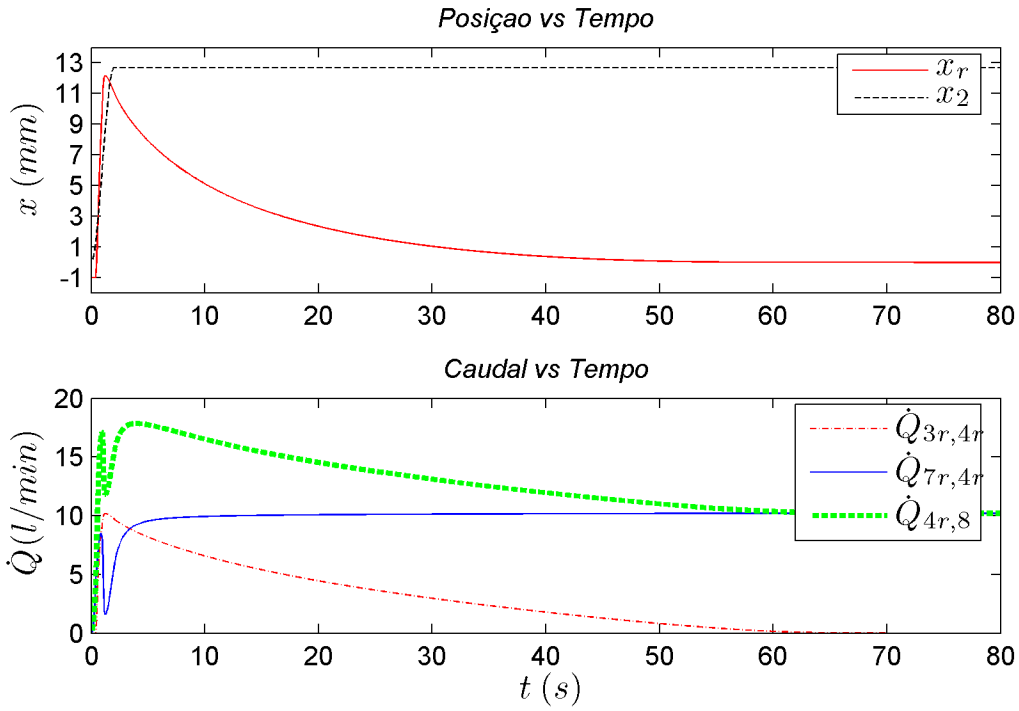


Figura 18: Resposta do sistema, em posição e caudal, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente cheio. k_r = 2619 N/m; x_r^{pre} = 0 mm;

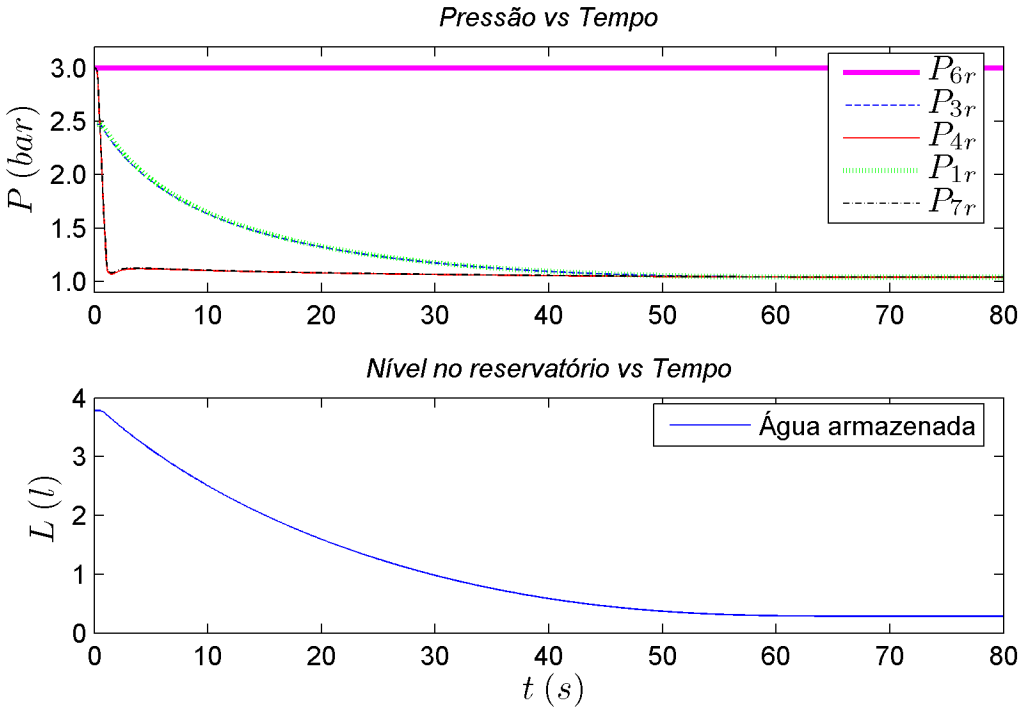


Figura 19: Resposta do sistema, em pressão e nível do reservatório, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente cheio. k_r = 2619 N/m; x_r^{pre} = 0 mm;

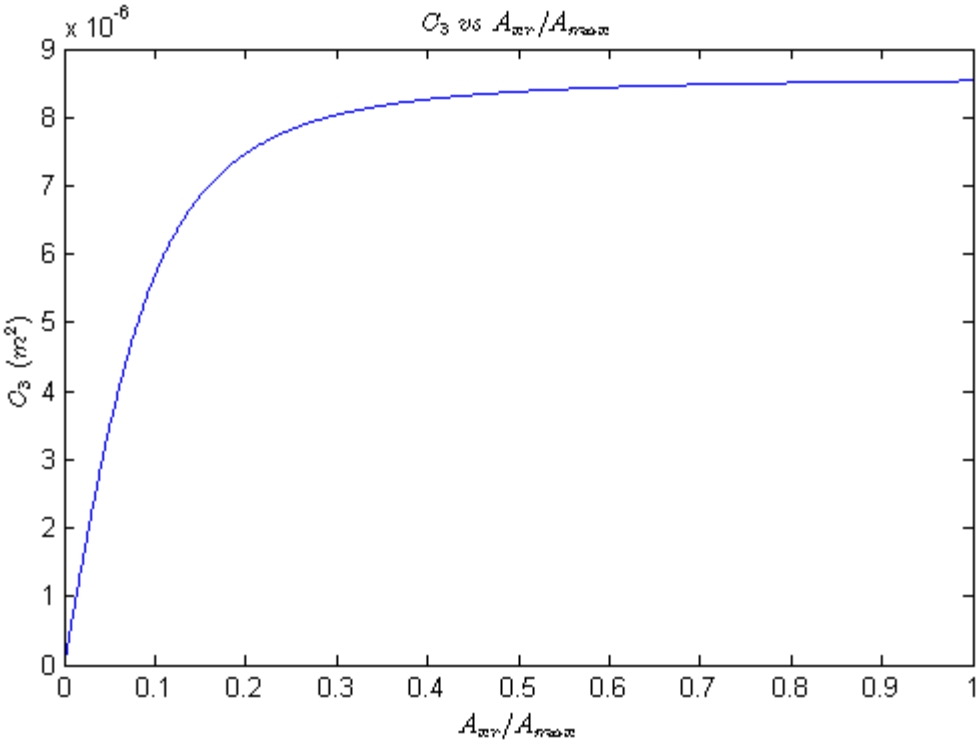


Figura 20: Progressão do factor C_3 em função da percentagem de área de passagem deixada aberta pelo batente R.

A solução para este problema poderá passar por um batente paralelepipédico mas com duas faces chanfradas de ângulo constante δ (Fig. 21), sendo, obviamente, a geometria do volume de controlo 7r complementar. Desta forma, definindo os valores de deslocamento e ângulo δ do chanfro do batente R, é possível controlar com maior precisão a área de passagem aberta, cuja relação está definida na Eq. (72) (Fig. 21).

$$A_{xr} = w\,a = w \sin(\delta)\, x_r \tag{72}$$

Note-se que o referencial de x_r mudou de posição, estando agora a sua origem solidária com a posição onde o batente R encosta ao volume de controlo 7r.

Para dimensionar correctamente o ângulo e deslocamento a utilizar na nova geometria do batente há que ter em conta que se pretende ter uma variação do caudal $\dot{Q}_{6r,7r}$ o mais suave possível. Por outro lado, qualquer conjugação de deslocamento/ângulo usada tem de garantir a existência de solução das Eqs. (66) e (67), ou seja, tem de garantir significado físico ao valor da área do restritor $A_{6r,7r}$ dentro das condições de dimensionamento discutidas em 4. Pré-dimensionamento do Sistema.

Analisando a influência do ângulo δ na evolução do parâmetro C_3 (presumindo a mesma área máxima de abertura), rapidamente se depreende que este parâmetro apresenta uma evolução tanto mais suave quanto mais baixo for o ângulo δ (Fig. 22). Por outro lado, atendendo ao intervalo de caudal que se pretende obter da fonte de água fria (1-10 *l/min*), um ângulo muito reduzido implicaria um deslocamento muito elevado (Fig. 22). É

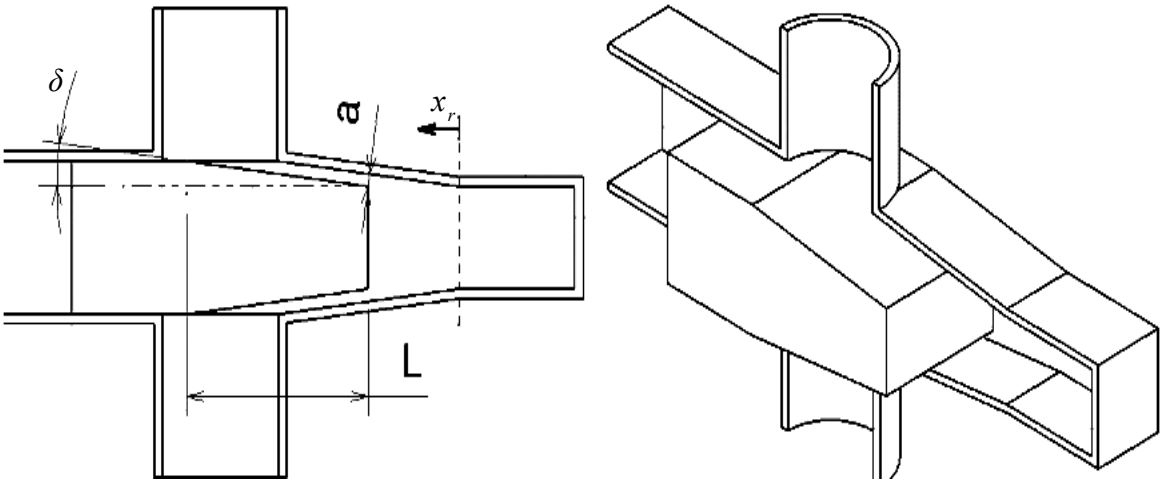


Figura 21: Geometria do novo batente, com representação do ângulo δ, comprimento L, profundidade w e origem de referencial x_r. À direita, representação tridimensional em corte da zona do batente R.

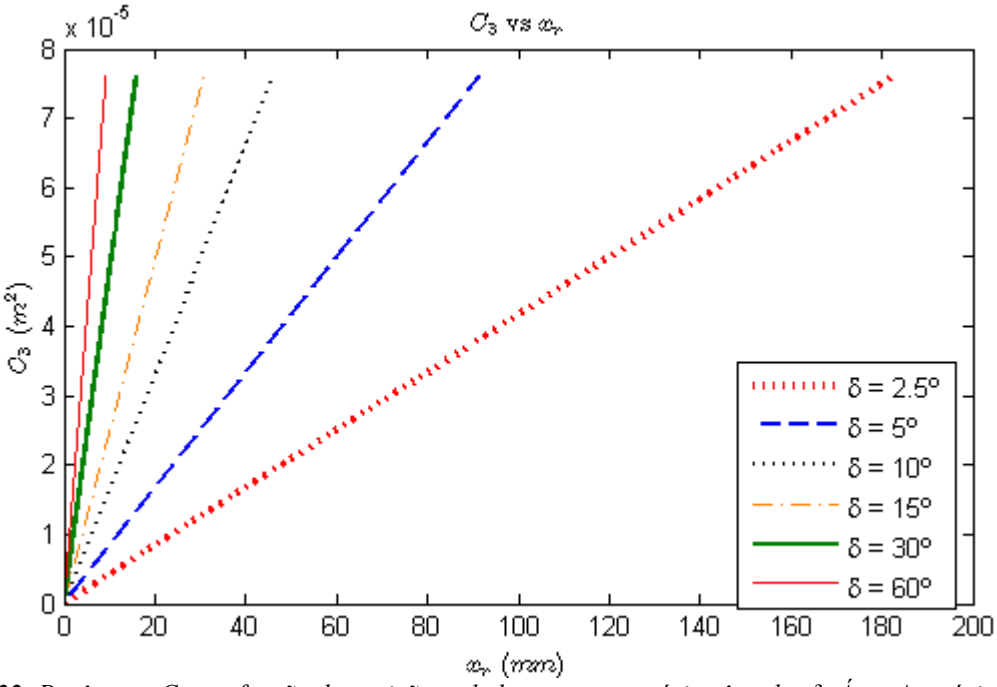


Figura 22: Parâmetro C_3, em função da posição x_r do batente, para vários ângulos δ. Área A_{xr} máxima fixa e área do restritor A_{6r7r} determinada para um caudal de 10 l/min.

necessário, então, encontrar um par de valores deslocamento/ângulo que sejam razoáveis do ponto de vista do deslocamento e que permitam, ainda, que o caudal fornecido pela rede se encontre dentro dos valores requeridos.

Na Fig. 23 encontra-se a evolução da área do restritor $A_{6r,7r}$ em função do ângulo δ, com um valor de deslocamento L fixo de 20 mm. Como se pode observar, para ângulos δ inferiores a 3.6º, a área do restritor é virtualmente nula e para ângulos δ entre 3.6º e 3.63º, a área do restritor não tem significado físico, pois seria superior à área de passagem da própria tubagem. Desta forma, mantendo o ângulo δ o mais baixo possível, um valor 3.75º será razoável. Assim, com um deslocamento total de 20 mm, a área do restritor $A_{6r,7r}$ necessária rondaria 41% da área de uma tubagem com ½" de diâmetro, sendo que a área de passagem A_{xr} máxima ficaria pelos 16.42% da área da mesma referência. Ainda nestas circunstâncias, a área de passagem A_{xr} mínima deverá ser cerca de 1.63% da área de uma tubagem com ½" de diâmetro ($x_r \approx 2\ mm$) de modo a garantir o caudal residual de 1 l/min.

Para o dimensionamento dos parâmetros da mola associados ao novo batente R, recorreu-se a uma metodologia em tudo semelhante à anteriormente usada para os mesmos

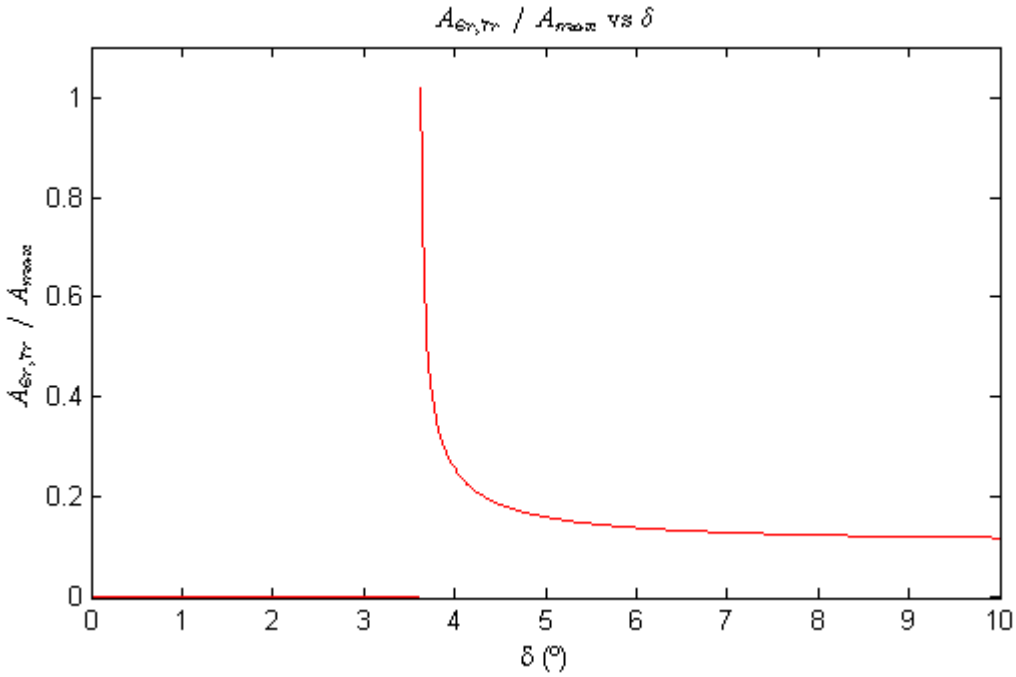


Figura 23: Fracção de área do restritor $A_{6r,7r}$ em função do ângulo δ, com um comprimento L fixo de 20 mm.

parâmetros. Para não repetir a exposição do processo (o que seria exaustivo), apenas se apresentam os parâmetros já optimizados.

$$\left(k_r, x_r^{pre}\right)_{opti} = \begin{cases} k_r & = & 1684 & N/m \\ x_r^{pre} & = & 0.0063 & m \end{cases}$$

Com estes parâmetros, o comportamento do sistema, a um pedido de água fria abrindo totalmente o manípulo M2 e com o reservatório inicialmente cheio, encontra-se exposto nos gráficos das Figs. 24 e 25. Como se pode constatar, o caudal $\dot{Q}_{6r,7r}$ já apresenta uma evolução muito mais suave, variando entre 1 *l/min* e 10 *l/min*. Desta forma, o caudal de saída $\dot{Q}_{4r,8}$ regista um máximo de apenas 13 *l/min*, sem que se verifique o comportamento oscilatório anterior.

Outras geometrias poderiam ser estudadas no sentido de suavizar ainda mais a evolução do caudal $\dot{Q}_{6r,7r}$. Porém, pretendeu-se manter a simplicidade do sistema por forma a não afectar eventuais custos de produção ou até comprometer a fiabilidade do sistema. Por outro lado, o caudal $\dot{Q}_{4r,8}$ em excesso apresentado não é permanente nem

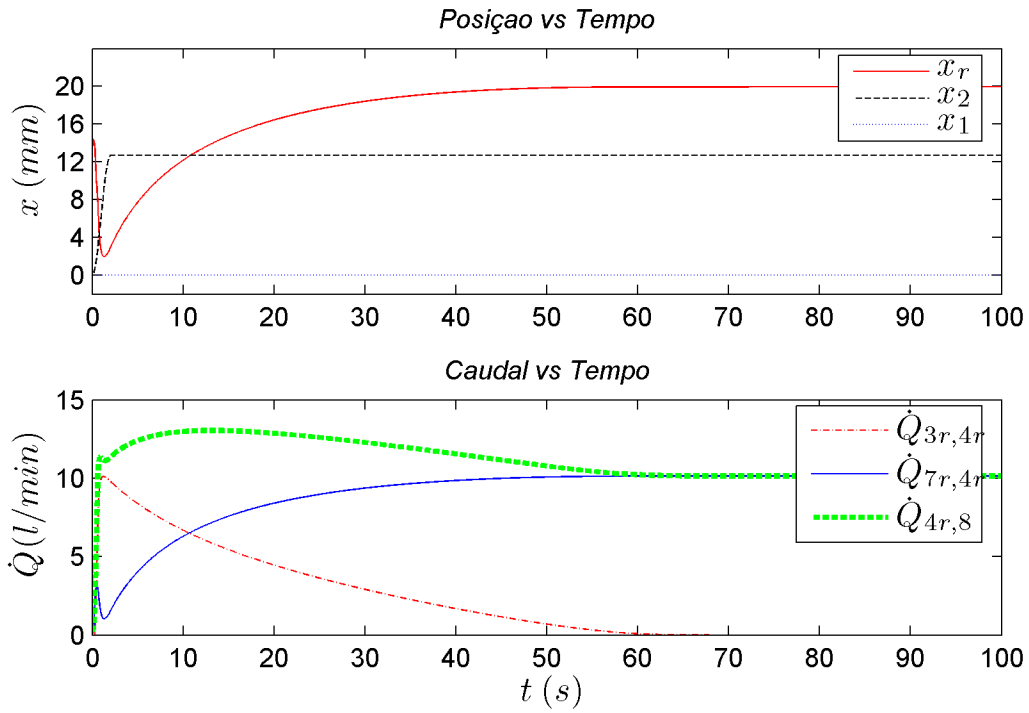


Figura 24: Resposta do sistema com nova geometria do batente R, em termos de posição e caudal, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente cheio. k_r = 1684 N/m; x_r^{pre} = 6.3 mm;

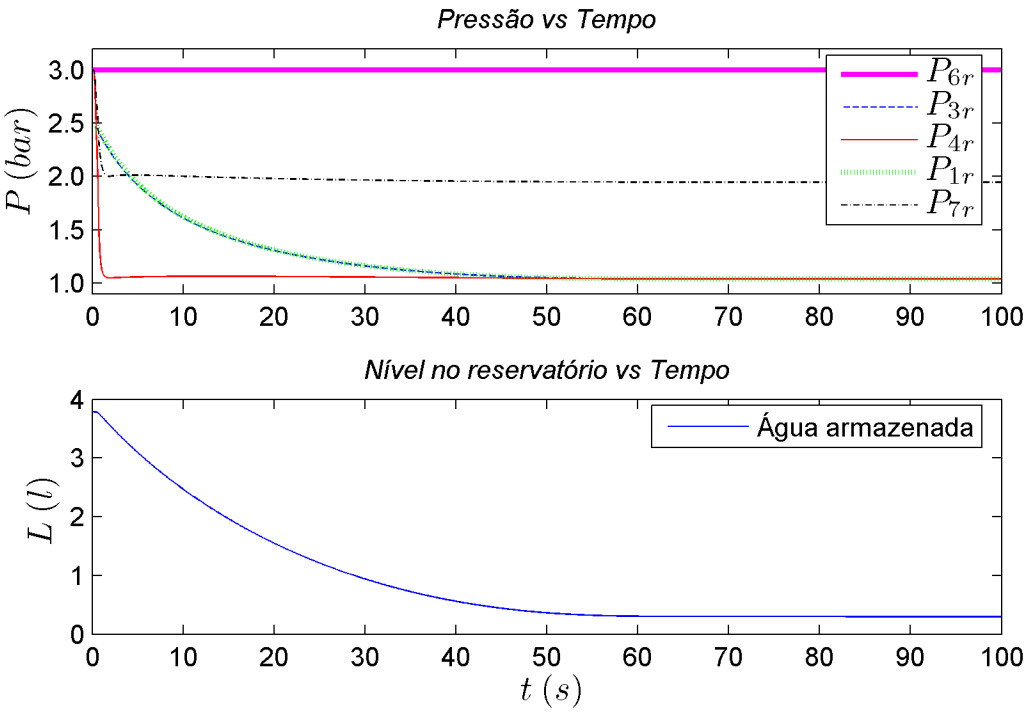


Figura 25: Resposta do sistema com nova geometria do batente R, em termos de pressão e nível do reservatório, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente cheio. k_r = 1684 N/m; x_r^{pre} = 6.3 mm;

abusivo, além de que o utilizador do sistema poderá facilmente regular o caudal obtido através do manípulo M2.

Por último, no que toca ao posicionamento relativo entre a passagem de 3 para 9 e de 4 para 1r, os resultados obtidos pelo pré-dimensionamento mostram que será necessário estrangular um pouco mais a passagem de 4 para 1r, quando o corpo H se encontra na sua posição máxima, isto é, com o bolbo completamente dilatado. Este estrangulamento não deve ser demasiado severo pois é imperativo que o *feedback* da pressão no reservatório

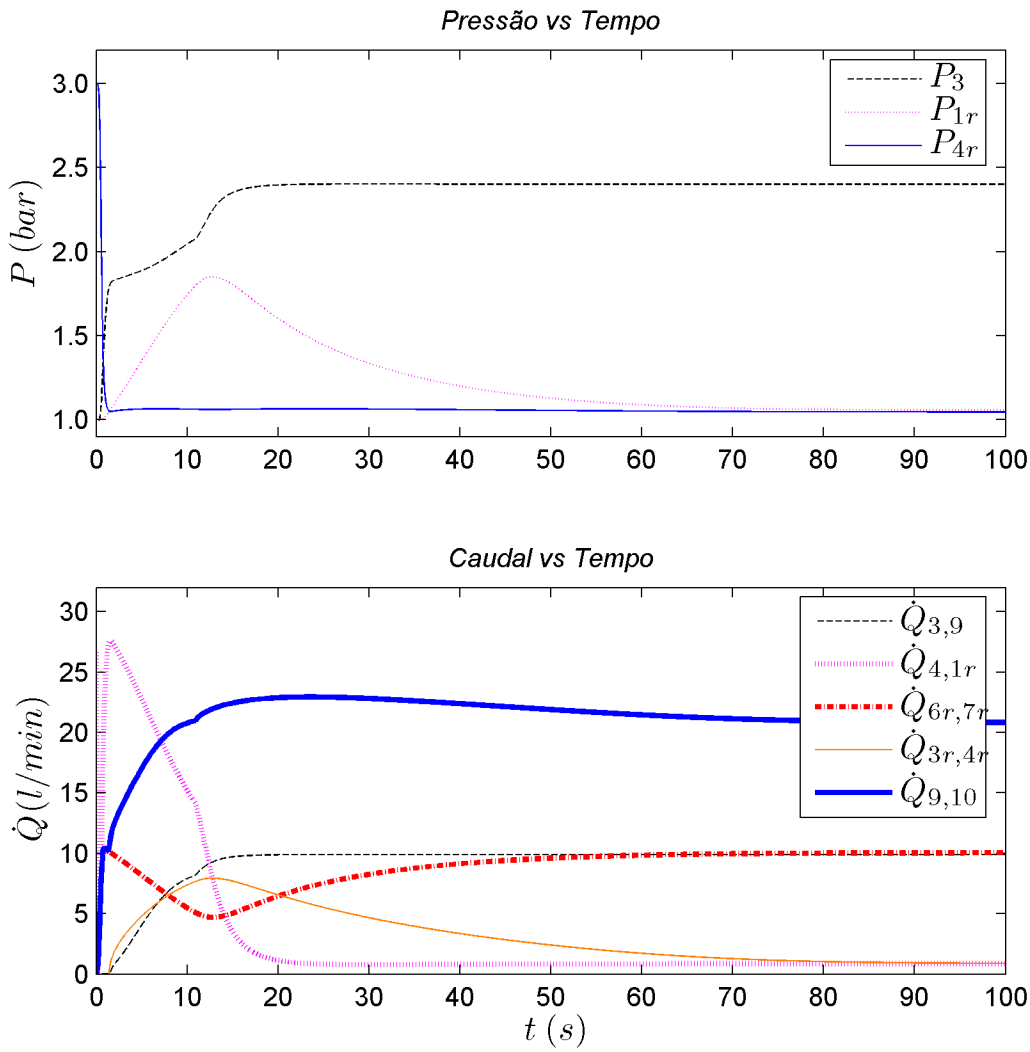


Figura 26: Resposta do sistema, em termos de pressão e caudal, a um pedido de água em ambos os manípulos. Reservatório inicialmente vazio.

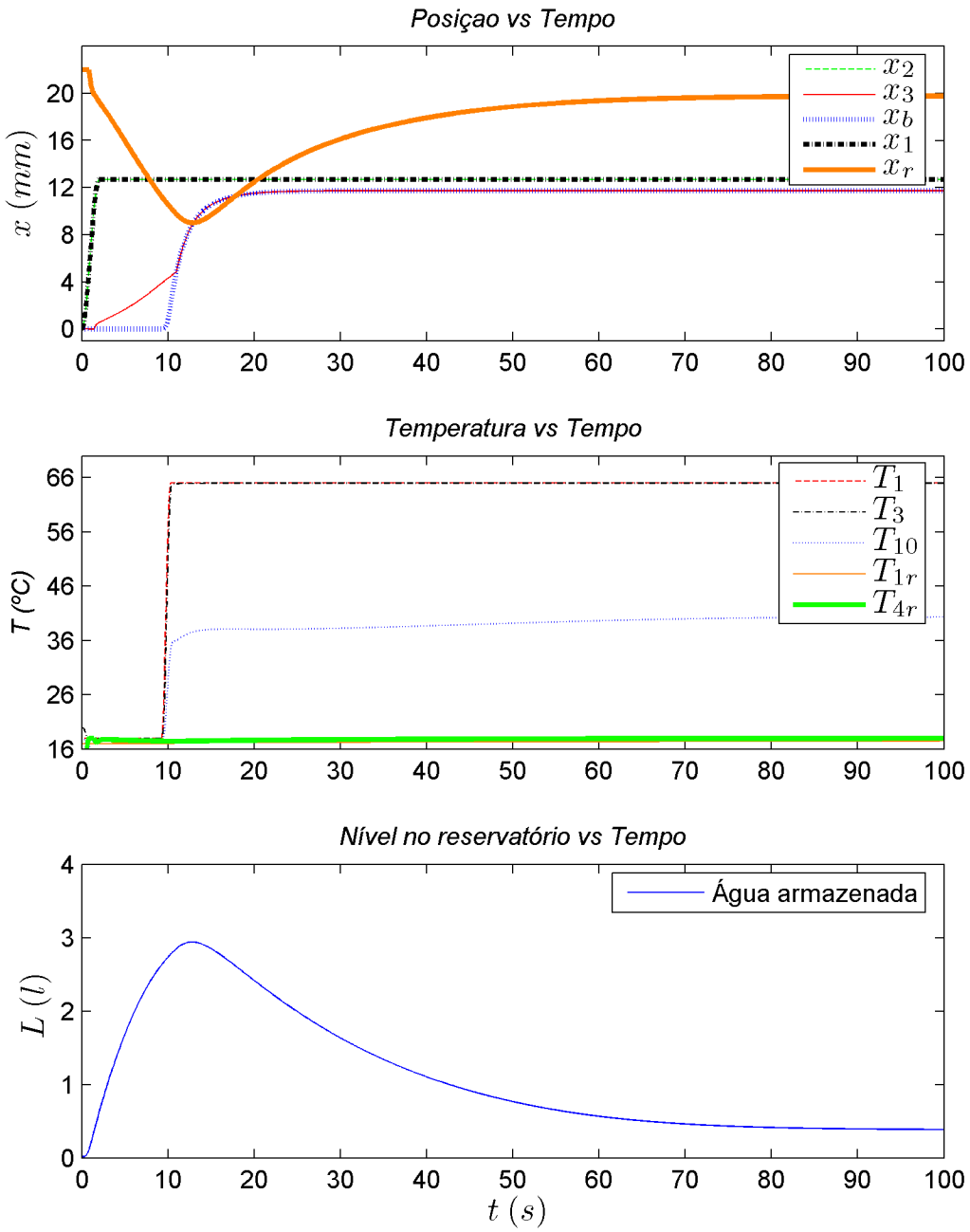


Figura 27: Resposta do sistema, em termos de posição, pressão e nível do reservatório, a um pedido de água em ambos os manípulos. Reservatório inicialmente vazio.

seja sempre sentido na câmara 4. Assim, propondo uma área mínima da passagem de 4 para 1r de cerca de 1%, as duas passagens referidas deverão estar sobrepostas em cerca de 0.6 mm, isto é, a distância entre os centros das circunferências das tubagens deverá ser de $(\phi_{1/2"} - 0.6\,mm)$. Com esta solução, o caudal indevido de água quente para a zona de água fria, em regime estacionário, é reduzido a 0.89 *l*/*min*, como está exemplificado nos gráficos das Figs. 26 e 27.

5.3. Análise Dinâmica do Sistema Optimizado

Estando o sistema dimensionado e optimizado, pode-se, então, analisar o seu o comportamento dinâmico a uma série de diferentes solicitações e avaliar a sua funcionalidade.

A solicitação mais importante prende-se com o próprio conceito do sistema: poupar a água fria proveniente da fonte de água quente. Para testar esta capacidade do sistema, realizou-se uma simulação onde, com o reservatório inicialmente vazio, se abre o manípulo M1 totalmente (o manípulo M2 permanece fechado). Inicialmente, a temperatura da água proveniente da fonte quente é de 18ºC e, após esta debitar 3.8 *l*, a temperatura sube para 65ºC em 1 *s* (seguindo, novamente, uma trajectória do 3º grau). A resposta do sistema encontra-se exposta nos gráficos das Figs. 28 e 29.

Nestas circunstâncias, o utilizador recebe apenas 0.81 *l* de água até que a temperatura da água na câmara 3 atinja 90% da temperatura final, o que ocorre por volta do instante $t = 10.3$ *s*. Até este instante de tempo, a fonte de água quente debita cerca de 4.02 *l* de água, ficando 3.21 *l* dessa água armazenadas no reservatório. Desta forma, o sistema permite poupar praticamente 80% da água que seria usualmente desperdiçada. O tempo de actuação do sistema é, portanto, de 10.3 *s* o que é perfeitamente aceitável.

Por outro lado, será interessante analisar o comportamento do sistema a um pedido de água fria, tanto com o reservatório inicialmente cheio como inicialmente vazio. Nesta última situação, como se pode observar nas Figs. 30 e 31, a válvula misturadora comporta-se como uma válvula comum, fornecendo cerca de 10 *l*/*min*, provenientes integralmente da rede.

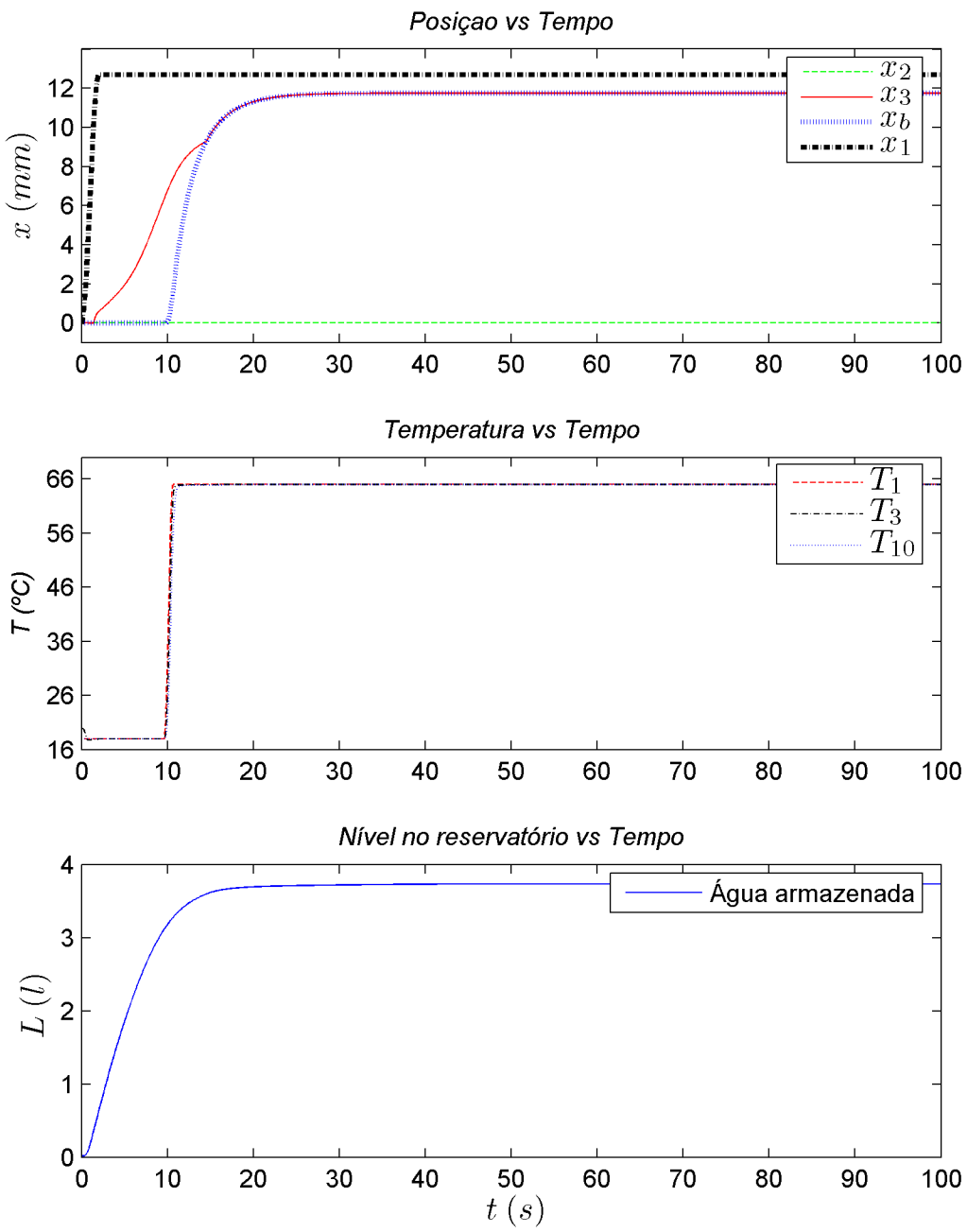


Figura 28: Resposta do sistema, em termos de posição, temperatura e nível do reservatório, a um pedido de água quente. Reservatório inicialmente vazio.

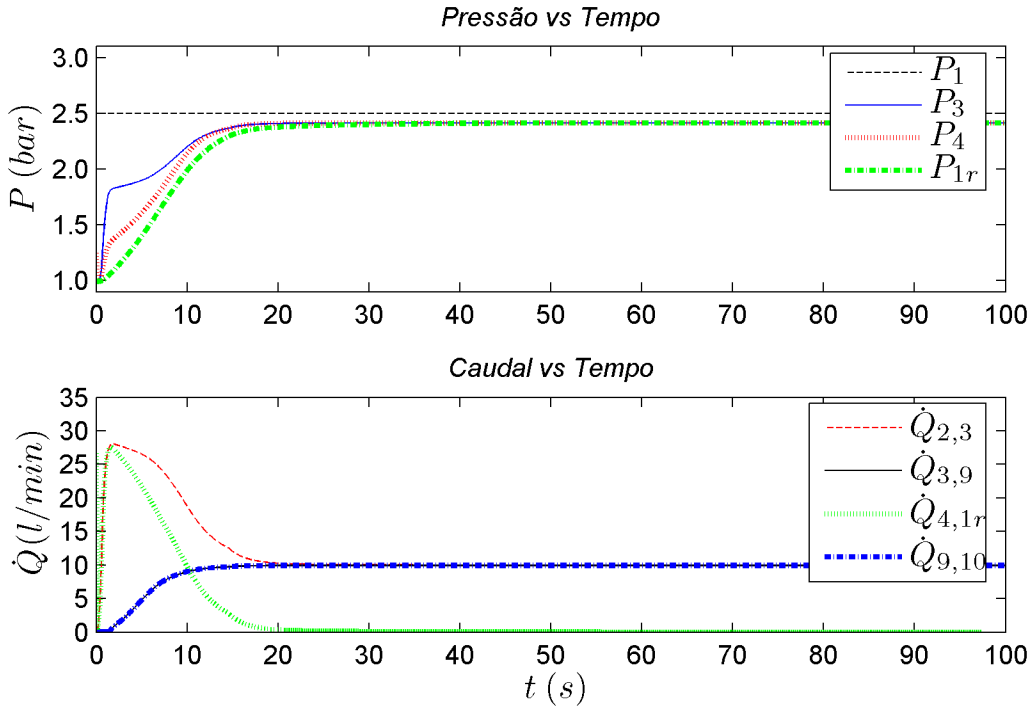


Figura 29: Resposta do sistema, em termos de pressão e caudal, a um pedido de água quente. Reservatório inicialmente vazio.

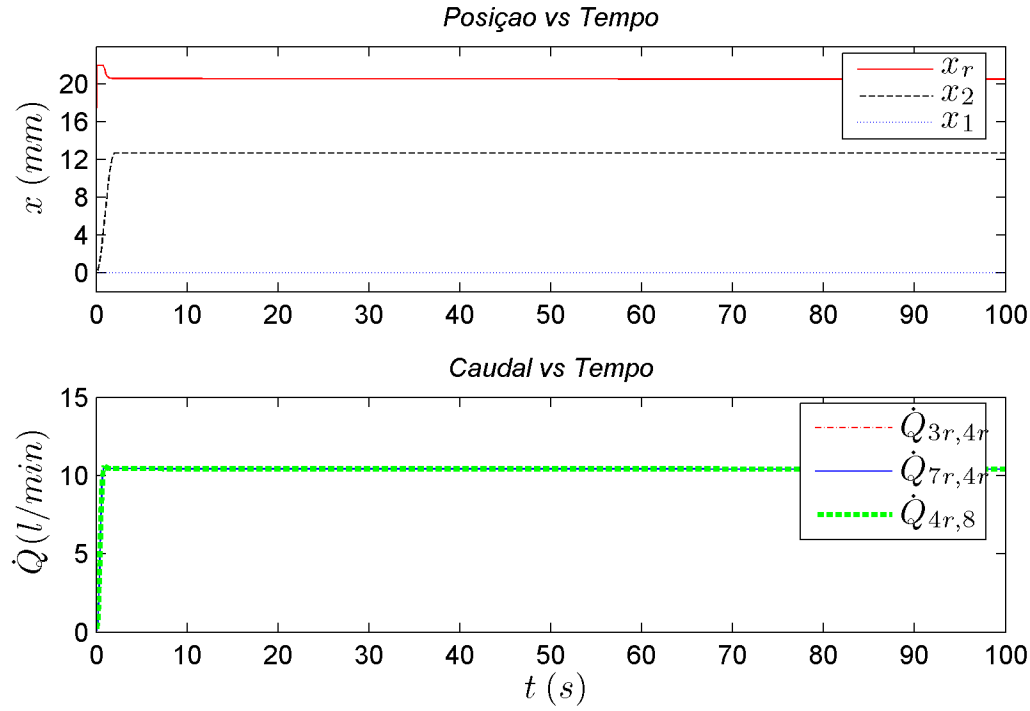


Figura 30: Resposta do sistema , em termos de posição e caudal, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente vazio.

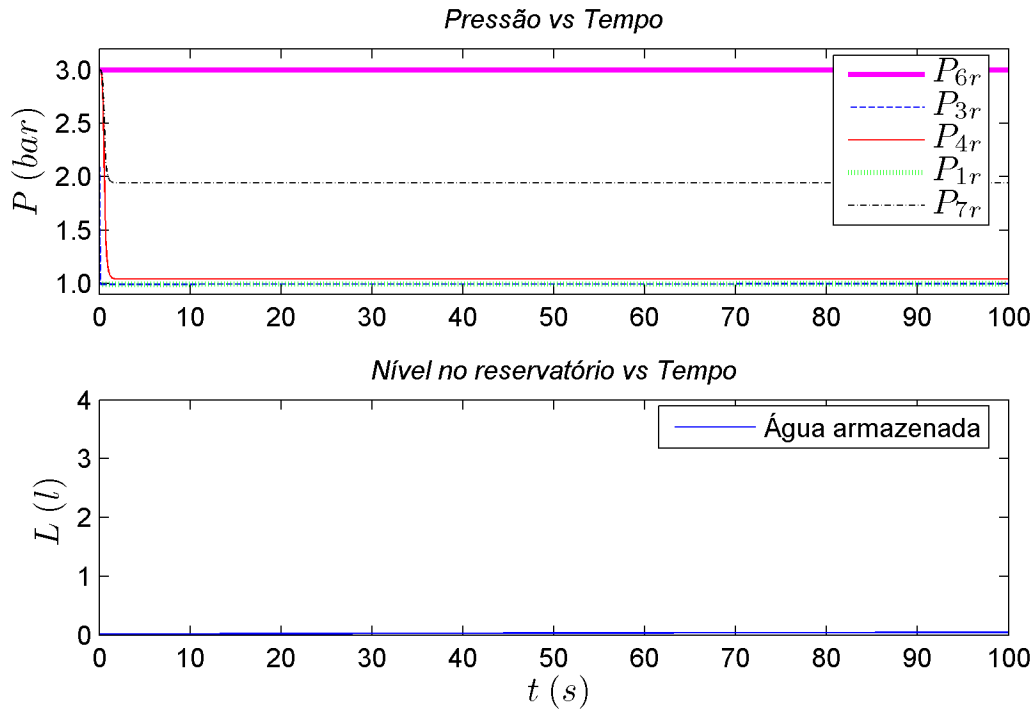


Figura 31: Resposta do sistema , em termos de pressão e nível do reservatório, a um pedido de água fria, abrindo o manípulo M2 totalmente. Reservatório inicialmente vazio.

Na situação em que o reservatório se encontra inicialmente cheio, o comportamento do sistema é o já anteriormente descrito nos gráficos das Figs. 24 e 25. Nesta situação, o sistema efectivamente dá primazia à água armazenada no reservatório, apresentando um caudal de um pouco superior a 10 l/min durante o período de vazão do reservatório, que demora cerca de 60 s. Este intervalo de tempo, embora significativo, não é excessivo nem compromete o correcto funcionamento do sistema.

Finalmente, o sistema poderá ser solicitado a um pedido de água em ambos os manípulos, com o reservatório inicialmente vazio. Se se assumir uma abertura total dos manípulos, a resposta do sistema é a representada nas Figs. 32 e 33. Neste caso, o sistema demonstra uma progressão relativamente suave do caudal de saída do sistema até ao instante em em que a temperatura da água na câmara 3 atingiu 90% da sua temperatura final. A partir deste instante (~10 s), o caudal de saída estabiliza por volta dos 21.7 l/min. Note-se que, até à subida da temperatura da fonte quente, o reservatório atingiu um nível máximo de 3 l, implicando que o batente R fosse obstruindo a entrada de água pela fonte de água fria.

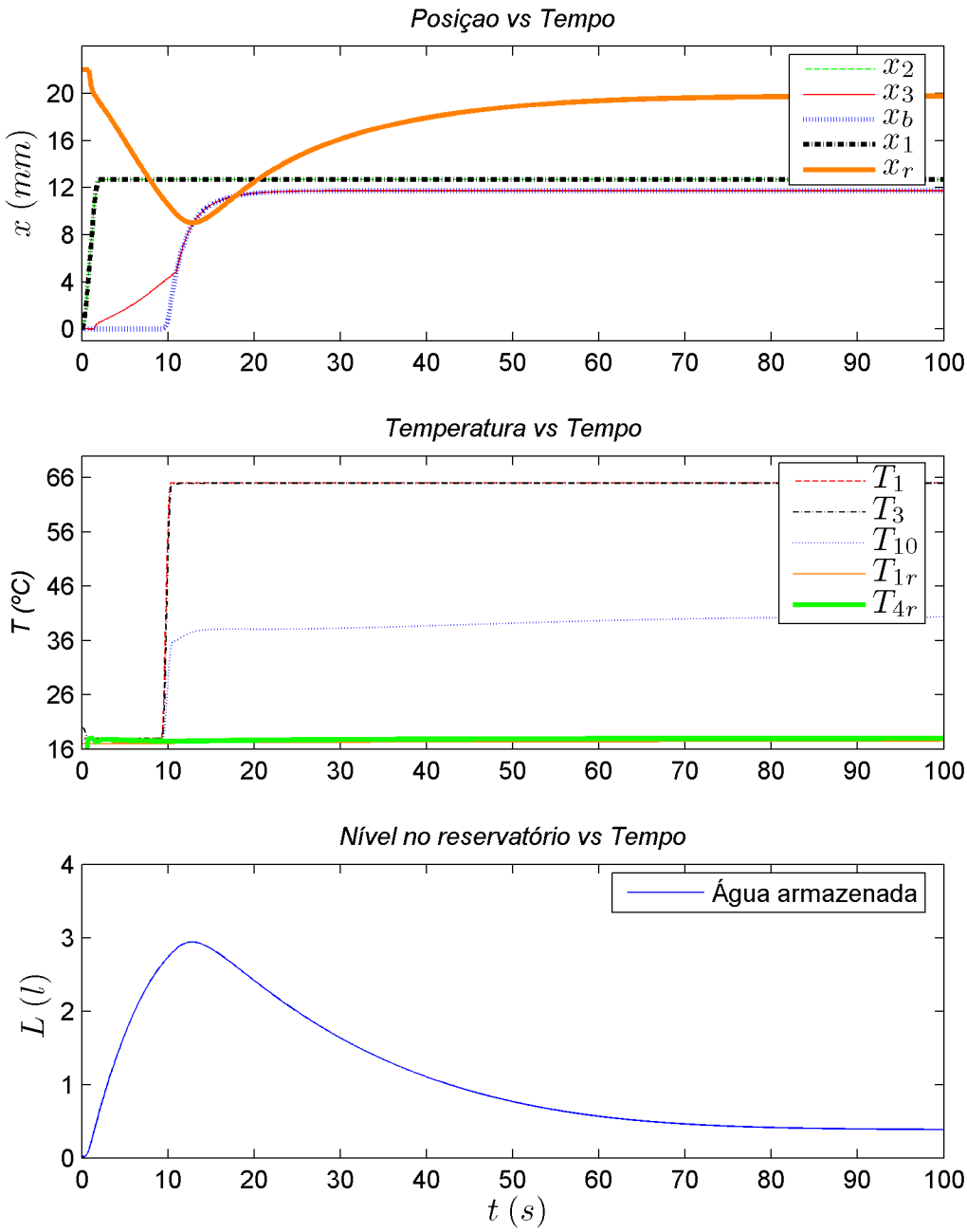


Figura 32: Resposta do sistema, em termos de posição, temperatura e nível do reservatório, a um pedido de água em ambos os manípulos. Reservatório inicialmente vazio.

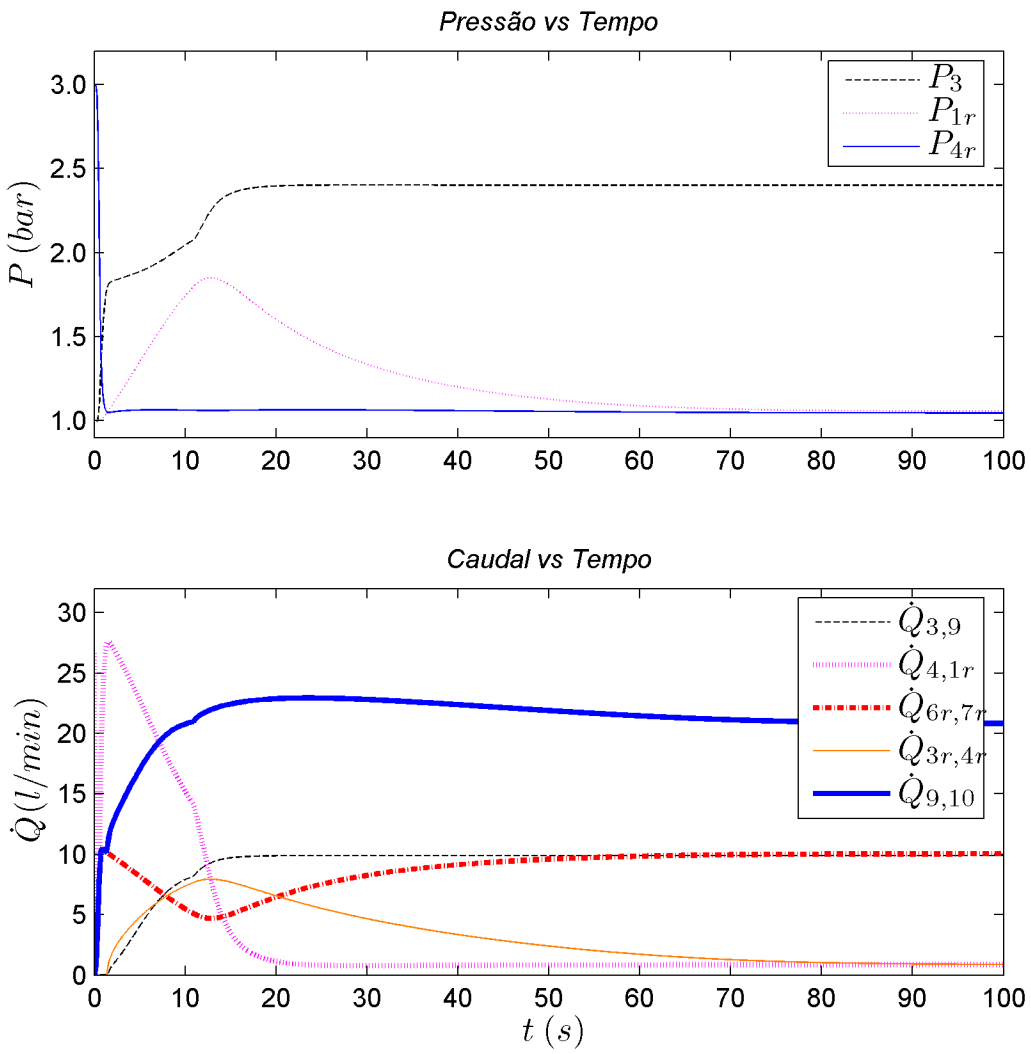


Figura 33: Resposta do sistema, em termos de pressão e caudal, a um pedido de água em ambos os manípulos. Reservatório inicialmente vazio.

A poupança de água efectiva nesta situação é um pouco menor do que na situação anterior. Na verdade, até ao instante referido, a fonte de água quente forneceu 4.12 *l* de água dos quais 2.75 *l* ficaram armazenados (o máximo do nível do reservatório dá-se depois deste instante devido ao tempo de resposta) e apenas 0.66 *l* foram debitados pela saída 3-9, ou seja, desperdiçados. Tal facto traduz-se numa poupança de 67% da água fria debitada pela fonte de água quente. O restante volume debitado pela fonte de água quente durante este período (0.71 *l*) escoou pela passagem 4-1r-3r-4r, fazendo com que fosse solicitado um menor caudal à rede, mantendo relativamente estável o caudal $\dot{Q}_{4r,8}$

(gráfico de caudal da Fig. 33). O caudal indevido de água quente para a zona de água fria, em regime permanente, é de 0.89 *l*/min, como visto anteriormente.

Resta, então, analisar o comportamento do sistema para o caso em que a abertura dos manípulos é parcial, com o reservatório inicialmente vazio, por forma a que a válvula misturadora disponibilize um caudal de saída de cerca de 15 *l*/*min*. Como se pode verificar nas Figs. 34 e 35, este caso induz num comportamento um pouco mais errático do sistema durante o período em que a fonte de água quente disponibiliza água a uma temperatura

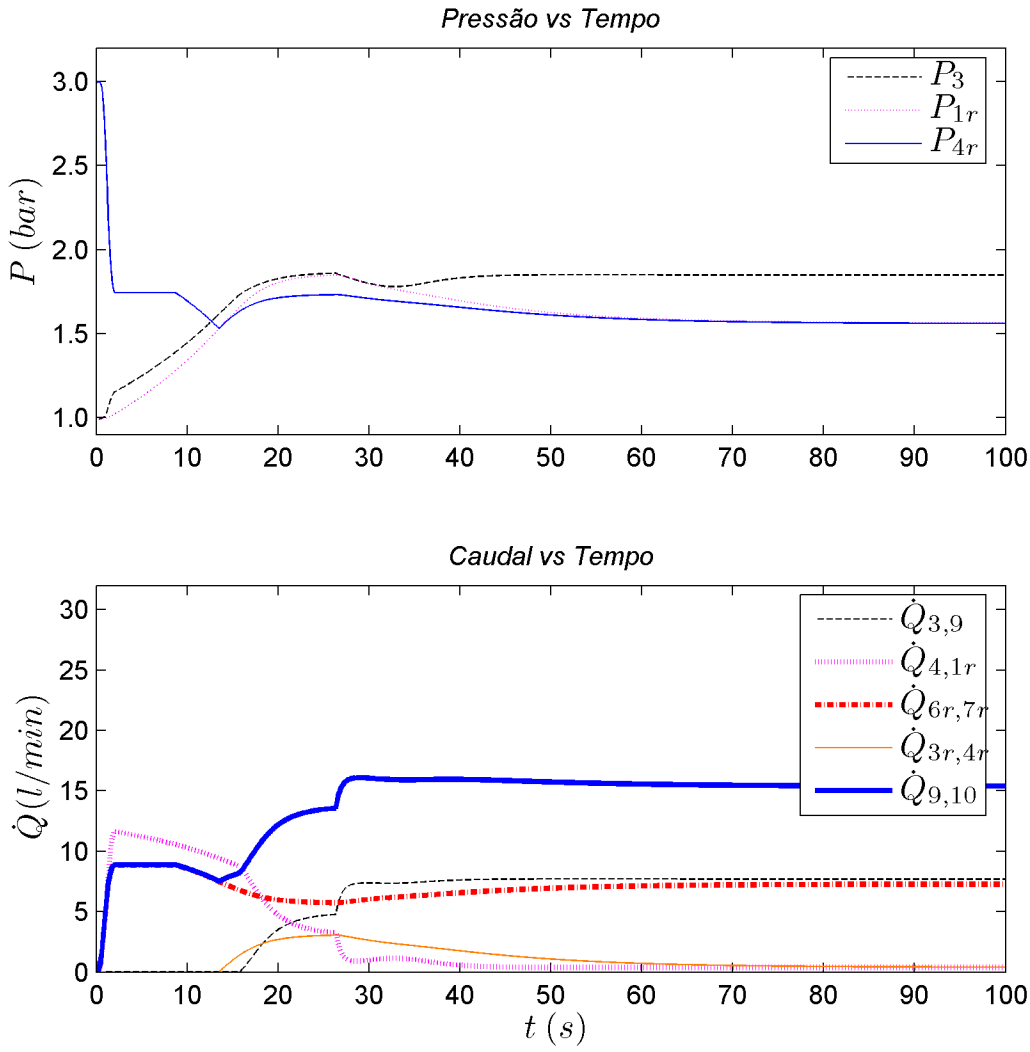


Figura 34: Resposta do sistema, em termos de pressão e caudal, a um pedido de água em ambos os manípulos (abertos parcialmente). Reservatório inicialmente vazio.

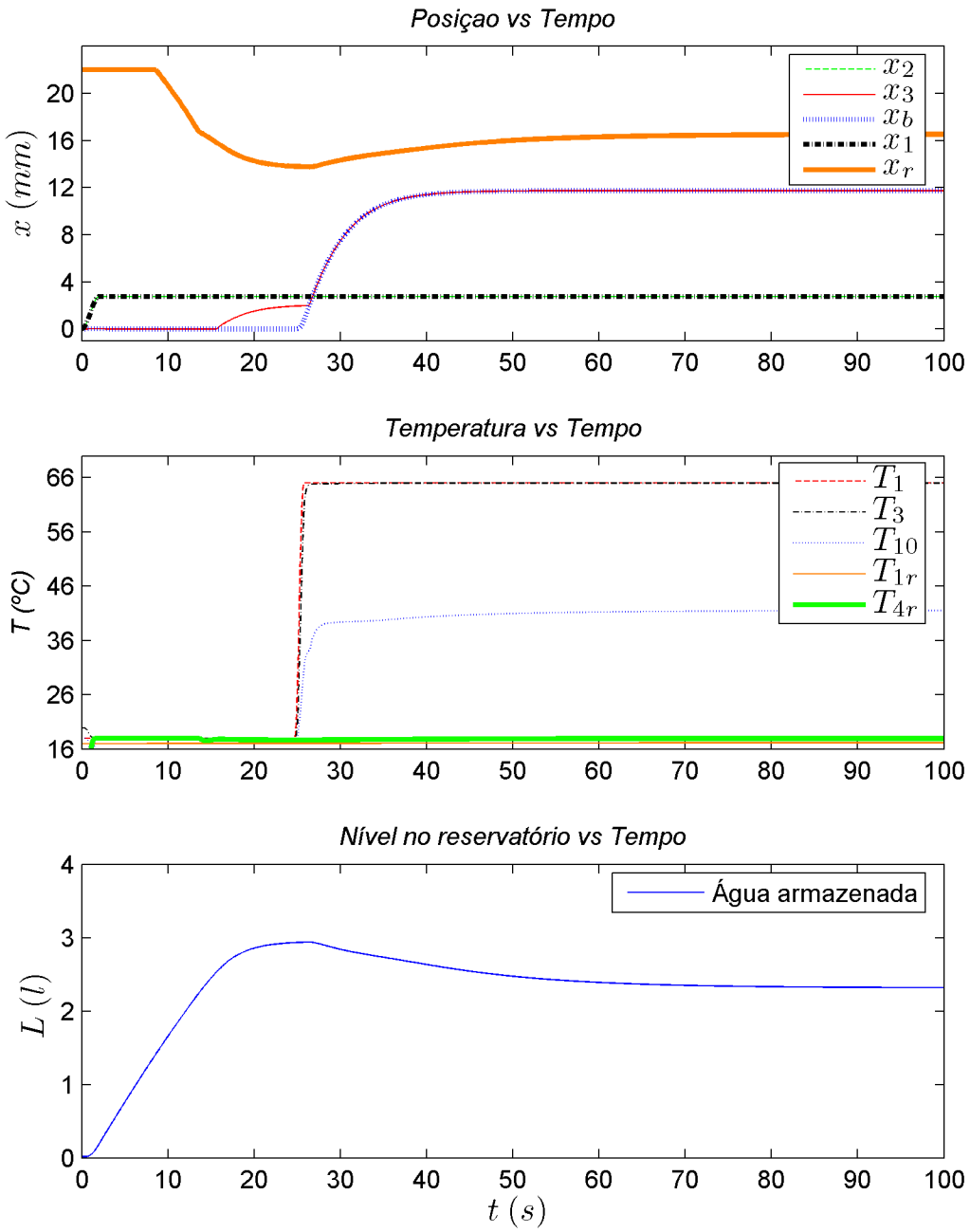


Figura 35: Resposta do sistema, em termos de posição, temperatura e nível do reservatório, a um pedido de água em ambos os manípulos (abertos parcialmente). Reservatório inicialmente vazio.

baixa. A subida da temperatura ocorre, por outro lado, num intervalo de tempo maior ($t \approx 25.4$ *s*), mas ainda assim aceitável.

No entanto, o principal aspecto a reter é o facto de o reservatório não se esvaziar por completo após a subida da temperatura da água proveniente da fonte de água quente. Na verdade, o reservatório atinge um nível máximo de 2.9 *l*, dos quais apenas 0.6 *l* são utilizados mais tarde. Tal acontece porque a não abertura total do manípulo M2 provoca uma pressurização da câmara 4r. De facto, com o manípulo M2 totalmente aberto, a pressão na câmara 4r é de 1.05 *bar* (Fig. 33), ao passo que, na presente situação, a mesma pressão sobe para 1.57 *bar* (Fig. 34). Este efeito pode ser confirmado numa simulação onde, começando com o reservatório inicialmente cheio, se realiza um pedido de água fria no manípulo M2, mas com um caudal mais reduzido (Fig. 36).

No entanto, este comportamento, apesar de indesejável, não será crítico pois uma maior abertura do manípulo proporcionará sempre um maior aproveitamento da água armazenada no reservatório, pelo que as sucessivas utilizações a que este sistema seria sujeito na sua solicitação diária permitiria uma total reciclagem da água armazenada no reservatório.

Uma última nota para a sensibilidade do caudal fornecido pela válvula misturadora com pequenas aberturas dos manípulos. Com apenas 2.75 mm de deslocamento consegue-se obter um caudal na saída da válvula misturadora de 15 *l*/*min*, o que significa que com 22% da abertura em ambos os manípulos (em termos de diâmetro) se consegue 69% do caudal total máximo que a válvula misturadora permite.

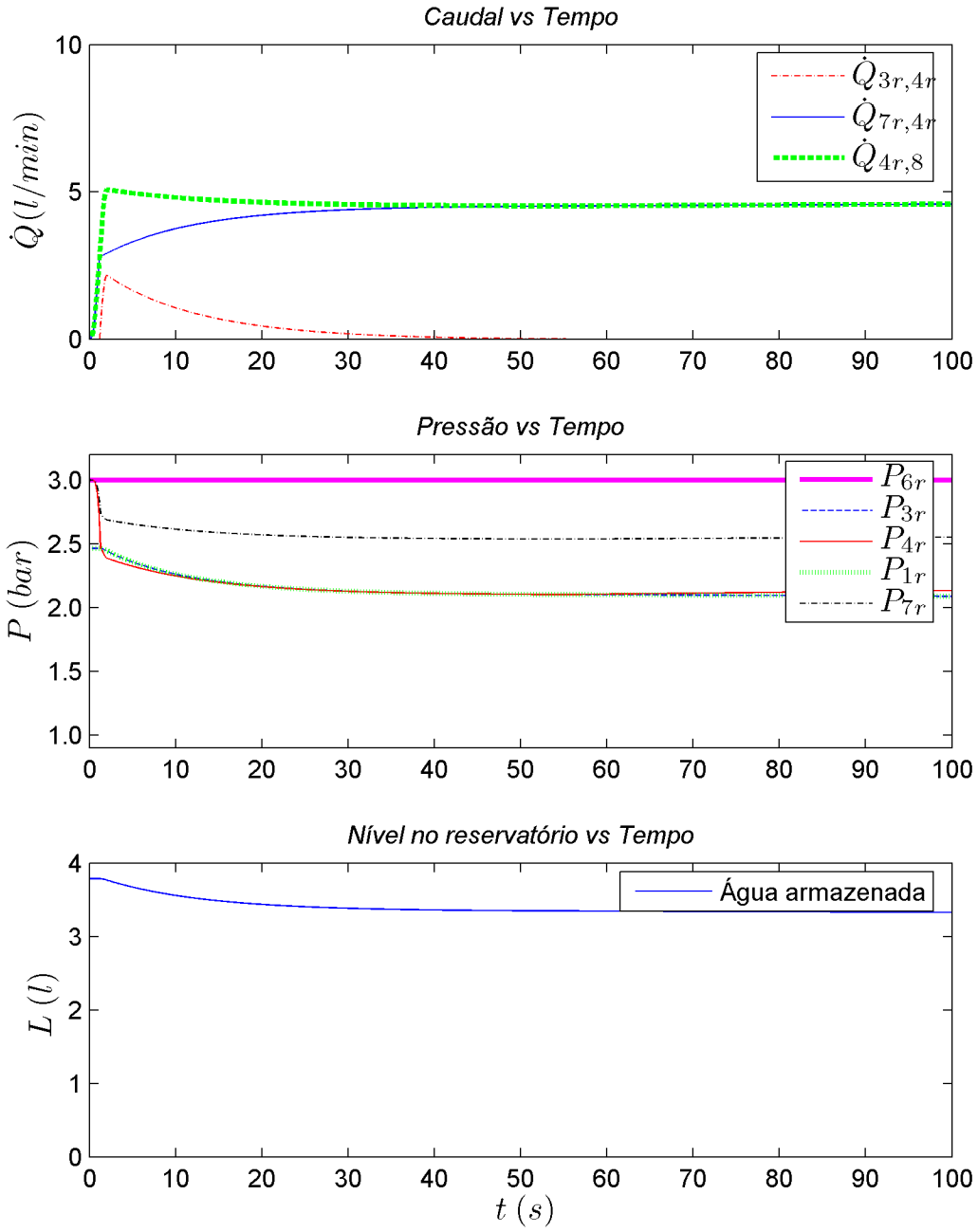


Figura 36: Resposta do sistema, em termos de caudal, pressão e nível do reservatório, a um pedido de água fria. Manípulo aberto parcialmente e reservatório inicialmente cheio.

6. Conclusões

São vários os sistemas já existentes que pretendem abranger o conceito de poupança de água potável aqui apresentado. Porém, nenhum deles se revela tão abrangente na sua abordagem como o sistema proposto. De facto, os mais simples, de mais fácil construção e consequentemente mais baratos, são incompletos na medida que a água desviada não possui uma aplicação imediata. Por outro lado, os mais complexos são consequentemente mais caros e de mais difícil operação e manutenção. Desta forma, o sistema proposto afigura-se como uma boa solução quer pela sua simplicidade de construção e fiabilidade, quer pela sua facilidade de operação, uma vez que o utilizador comum usará o sistema como se de uma normal válvula misturadora se tratasse.

Para a modelação do sistema proposto, a forma mais simples e directa de estabelecer a sua dinâmica, por forma a obter-se um modelo fiável e estável, parte de três grandes princípios:

- Conservação da massa: através da formulação integral da conservação da massa para cada câmara estabelece-se uma relação entre a varição da sua pressão (primeiro membro da Eq. (2)) e os caudais de e para essa mesma câmara (segundo membro a mesma equação).
- Conservação da quantidade de movimento, ou Segunda Lei de Newton: uma vez que o sistema possui partes móveis que interagem com o escoamento do fluido, a conservação da quantidade de movimento permite definir a relação entre as forças envolvidas e a dinâmica dessas partes móveis. Na verdade, para que o sistema seja completamente automático e actue como previsto, é necessário conhecer a posição de cada parte móvel do sistema em cada instante.
- Conservação da energia: apenas através deste princípio é possível obter a temperatura em cada câmara. Apesar de um fluido possuir energia sob outras formas (pressão, energia cinética, energia potencial...), os termos térmicos sobrepõem-se, permitindo implementar uma relação simples para o balanço de energia de onde se extrai facilmente a temperatura.

Adicionalmente a estes princípios, é possível utilizar algumas correlações empíricas para modelar os restantes fenómenos, tais como a transferência de calor por convecção ou a dilatação do bolbo.

Porém, a descrição mais ou menos exacta do sistema físico nem sempre é suficiente para se produzir um modelo matemático fiável e, sobretudo, estável a nível numérico. De facto, uma vez que a computação do modelo matemático é feita sempre através de algoritmos numéricos (cuja solução nunca é exacta), o modelo pode apresentar-se com problemas de rigidez (ou seja, necessidade de reduzir consideravelmente o intervalo de tempo de integração) ou até instabilidades que produzam singularidades. Assim, além da consideração dos modelos matemáticos e dos fenómenos físicos é necessário introduzir alguns factores que acondicionem o sistema, por forma a que se possa obter uma resolução célere e fiável do problema. Caso disso é a implementação da histerese no comportamento dos caudais ou a introdução de caudais de fuga em localizações onde, supostamente, o fluido não pode escoar. Em todo o caso, estes artifícios deverão ter a menor influência possível no resultado final obtido, mesmo que esses factores acabem por conferir uma menor exactidão na modelação do sistema físico, como por exemplo os caudais de fuga implementados. Com efeito, os caudais de fuga registados representavam não mais do que 0.1% do caudal total disponibilizado pela válvula misturadora.

Um outro aspecto essencial na obtenção de resultados fiáveis é o bom condicionamento dos valores iniciais para as variáveis de estado do modelo. Com efeito, foi observado que se um problema tiver um mau condicionamento inicial isso pode afectar sobejamente os resultados obtidos. Assim, sempre que se alterem as condições de fronteira do problema é extremamente importante observar a dinâmica das variáveis de estado para garantir que não haja um gradiente desproporcionado nos instantes iniciais, isto é, que as variáveis de estado não apresentem uma variação "instantânea" inicial muito severa.

Por fim, um último comentário para o comportamento do sistema proposto. Tendo por referência o conceito subjacente, o sistema mostrou-se capaz de poupar uma parte significativa de água fria proveniente da fonte de água quente: as simulações apontam para poupanças de 3.21 *l* de água, no caso de um pedido de água quente, representando 80% da

água fornecida e uma poupança de 2.75 *l* no caso de um pedido de água em ambas os manípulos (representando 67% da água debitada pela fonte de água quente). Porém, o sistema nunca conseguirá apresentar um comportamento on/off, devido ao mecanismo intrínseco baseado nas pressões, pelo que haverá sempre um desperdício de uma parcela de água fria proveniente da fonte de água quente.

No que toca ao comportamento do reservatório e do batente R, verificou-se que, em situações de abertura total do manípulo 2, o sistema efectivamente confere prioridade à água armazenada no reservatório, mesmo restando algum volume residual (cerca de 0.3 *l*, menos de 10% do volume total armazenado). Contudo, nas simulações exposta nas Figs. 34, 35 e Fig. 36 observa-se que, caso o manípulo não seja aberto totalmente, a câmara 4r adquire uma pressão suficientemente alta para que o reservatório não desça significativamente. De facto, na primeira simulação referida, o reservatório apenas permitiu reciclar 0.6 *l* de água (0.7 *l* na segunda simulação), vazando menos de 50% da água nele armazenada. Tal deve-se ao comportamento hiperbólico da pressão do gás aprisionado no reservatório com o nível deste. De facto, a Eq. (9b) pode ser reescrita da seguinte forma

$$P_{1r} = \frac{m_g R_g T_{1r}}{A_{1r}} \frac{1}{y_{1r}}$$

onde y_{1r} é a cota da altura de água contida no reservatório, desde a sua base. Se atendermos a uma área de base de cerca de 144 cm^2, a cota do nível do reservatório encontrar-se-à sempre no intervalo 0 a 0.263 *m*, ou seja, precisamente numa zona de grande sensibilidade da pressão P_{1r} à variável y_{1r} (considerando as variações de temperatura negligenciáveis face ás variações do nível). Este comportamento poderia ser contornado se, ao invés de uma membrana contendo ar, a pressão P_{1r} fosse controlada por um êmbolo e uma mola. Esta solução, no entanto, além de não resolver completamente o problema, seria sempre mais dispendiosa e complexa e poderia trazer problemas ao nível da vedação entre o êmbolo e as paredes do reservatório.

Além deste problema, observou-se ainda existência de um escoamento indevido de água desde a zona da água quente (câmara 3) até à câmara de saída da água fria (câmara

4r), aquando um pedido de água em ambos os manípulos. No entanto, um o correcto posicionamento das tubagens de ligação inerentes permite que este caudal indevido se reduza a menos de 1 *l/min*, não tendo qualquer efeito na temperatura da câmara 4r nem na temperatura de saída T_{10}, mesmo após um período prolongado de dois minutos e meio (gráfico de temperatura da Fig. 32).

No que toca ao dimensionamento dos parâmetros, todos eles se encontram dentro dos valores usuais utilizados, até no que toca a questões de precisão do seu processo de fabrico. De facto, a rigidez das molas rondou sempre uma ordem de grandeza de 10^3 *N/m*, a sua pré-compressão na ordem dos milímetros e, por exemplo, a distância entre as tubagens de ligação 3-9 e 4-1r na ordem da décima de milímetro.

Em termos de poupança efectiva de água fria proveniente de uma fonte de água quente, conceito base por detrás do sistema, será legítimo afirmar que o sistema atinge o seu objectivo base. Desviando água fria proveniente de uma fonte de água quente para um reservatório, o sistema permite não só evitar o seu desperdício como reaproveitá-la num pedido de água fria. De facto, as simulações ao sistema apontam para que este consiga armazenar 80% da água fria debitada pela fonte de água quente enquanto a temperatura desta não atinge 90% da temperatura final de 65ºC. Em termos absolutos, significa que, até ao momento em que a temperatura na câmara 3 (onde se encontra o sensor de temperatura – o bolbo) atingiu os 58.5ºC, dos 4.02 *l* debitados pela fonte de água quente o sistema evitou o desperdício de 3.21 *l*. Por oposição, uma válvula misturadora comum implicaria a perda da totalidade do volume de água entre esta e a fonte água quente, que neste caso foi considerado como sendo cerca de 3.8 *l*. Se for solicitado um caudal de água fria em simultâneo com o pedido de água quente, o sistema já não é tão eficiente, armazenando 2.75 *l* de água de um total de 4.12 *l* fornecidos pela fonte de água quente, ou seja, cerca de 67%.

Em condições de abertura parcial de ambos os manípulos, o sistema acumulou 2.94 *l* de um total de 3.94 *l* debitados pela fonte de água quente (75%) durante o período em que a temperatura de entrada não atingiu 90% da sua temperatura final. Porém, no que toca ao reaproveitamento da água armazenada, uma abertura parcial do manípulo da fonte fria

provoca uma pressurização das câmaras a jusante do reservatório, impedindo que o reservatório seja a principal fonte de água fria. Tal deve-se à forma como a pressão sentida neste volume de controlo varia: encontrando-se solidário com uma massa de ar aprisionada, a pressão na câmara variará de forma muito brusca, devido às condições termodinâmicas médias em que o ar se encontra, isto é, o domínio de operação da Eq. (9b). Por outro lado, no caso de abertura total do manípulo M2, o sistema reutiliza mais de 90% da água armazenada no interior do reservatório (se este se encontrar inicialmente cheio), registando um volume residual em regime estacionário de apenas 0.3 *l*.

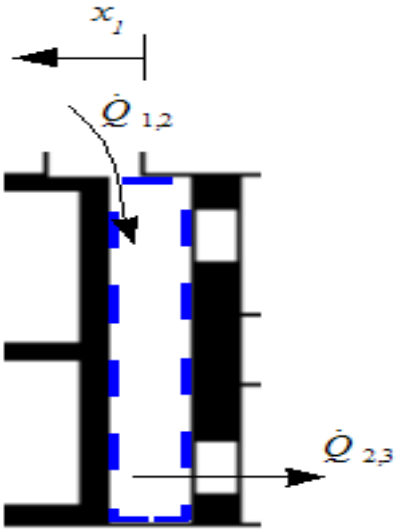
Em suma, o sistema proposto mostra potencial para evitar o desperdício de uma parte significativa de água fria proveniente de uma fonte de água quente e, posteriormente, reutilizá-la num pedido de água fria. Apesar do seu comportamento já ser satisfatório, o sistema possui flexibilidade para, com maior desenvolvimento, melhorar a sua dinâmica. Igualmente importante é o facto de o sistema se apresentar de simples utilização (em tudo igual a uma válvula misturadora comum), com bons tempos de resposta e, ao mesmo tempo, de simples construção e manutenção.

7. Bibliografia

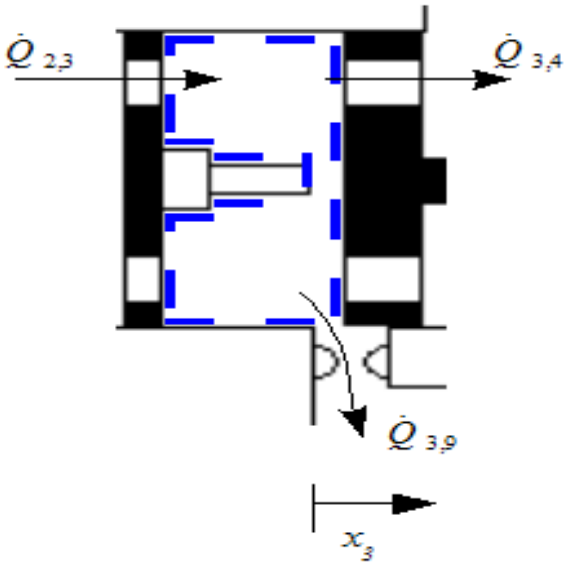
1: Kjéllen, M., McGranahan, G., *Comprehensive Assessment of the Fresh Water Resources of the World*, Stockholm Environment Institute,1997
2: *Water shortage drives recycling and reuse markets around the world*, Membrane Technology, Número 6,8-9,2006
3: Yuhas, E., Daniels, T., The US freshwater supply shortage: Experiences with desalination as part of the solution, *Journal of Environmental Planning and Management*, Vol. 49, Cap., 4, pp. 571 - 585, 2006
4: Bouwer, H., Integrated water management: emerging issues and challenges, *Agricultural Water Management*, Vol. 45, Cap., 3, pp. 217-228, 2000
5: Frazekas, D.J., *Control Means and Processing for Domestic Hot-Water Re-Circulating System*, Patente EUA nº 4750472, 1988
6: Gill, M.R., *Water Conervation System and Method*, Patente EUA 4922943, 1990
7: Woolman, R.F., *Diverter Aparatus and Method for Saving Fresh Water*, Patente EUA 5165456, 1992
8: Hall Jr., J.E., *Apparatus for Recovering and Saving Chilled Water in Hot Water Lines Having Adjustable Thermostatic Control*, Patente EUA 5603344, 1997
9: Chu, L.T., *Water Temperature Regulator*, Patente EUA 6098213, 2000
10: Popper, S., Friedman, R., Litbak, A., Petel, Y., *Smart Device and System for Improved Domestic Use and Saving of Water*, Patente EUA 6895985, 2005
11: Alemany, R., *Water Saving Method, Device and Installation*, Patente Europeia 1 783 284 A1, 2007
12: Advanced Eco Technologies Pty Ltd., EcoVerta (TM), 21/05/2008, http:www.advecotech.com.au/
13: Costa, V.A.F., *Sistema Misturador com Função de Poupança de Água e Respectivo processo de utilização*, Patente PT104037, pendente, 2008
14: White, F.M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill,1986
15: Merrit, H.E., *Hydraulic Control Systems*, John Wiley & Sons,1967
16: Idel'cik, I.E., *Memento des Pertes de Charge*, Eyrolles,1979
17: Moran, M.J., Shapiro,H.N., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, Wiley,1993
18: Incropera, F.P., DeWitt, D.P., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons,2002
19: Mattsson, S.E., Elmqvist, H., *Modelica -- an international effort to design the next generation modeling language*, 7th IFAC Symp. on Computer Aided Control Systems Design, CACSD'97,1997
20: Ferreira, J.A.F., *Modelação de Sistemas Hidráulicos para Simulação com Hardware-in-the-loop*, Tese de Doutoramento, 2003
21: Shampine, L.F.,Reichelt, M.W., The MatLab ODE Suite, *Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, Cap., 1, pp. 1-22, 1997
22: Shampine, L.F., Reichelt, M.W., Kierzenka, J.A., Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 41, Cap., 3, pp. 538 - 552, 1999
23: Shampine, L.F., Hosea, M.E., Analysis and Implementation of TR-BDF2, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 20, Cap., 1-2, pp. , 1996
24: Costa, V.A.F., Ferreira, J.A.F., Igreja, R.A.A.T., Santos, V.M.F., Modeling and simulation of a thermostatic mixer with an anti-scaldingor anti-cold system, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47, Cap., 7, pp. 903-917, 2008

8. Anexos

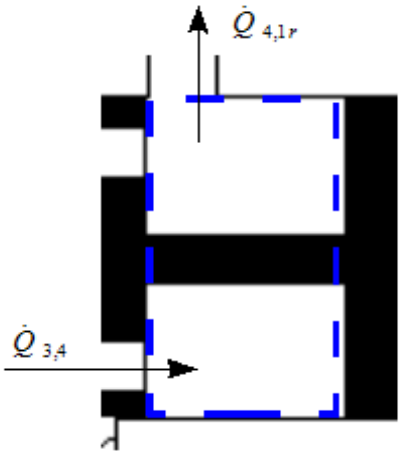
8.1. Volumes de Controlo



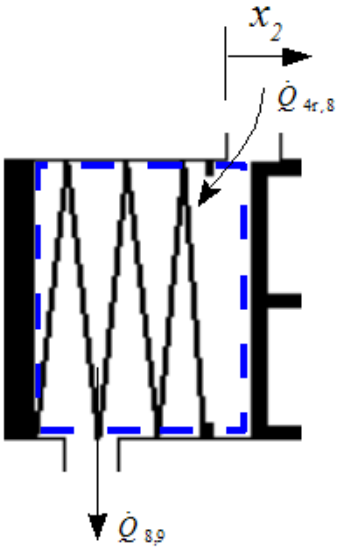
Volume de Controlo 2



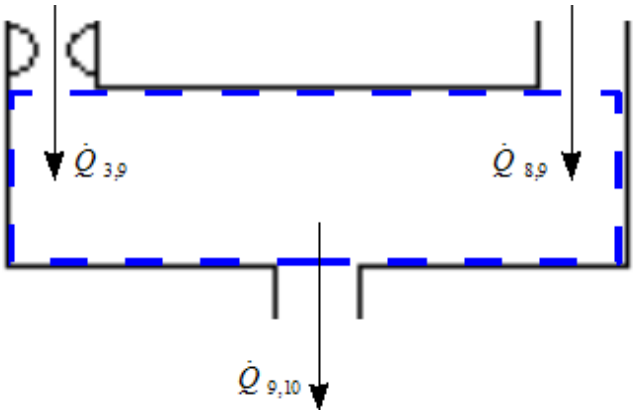
Volume de Controlo 3



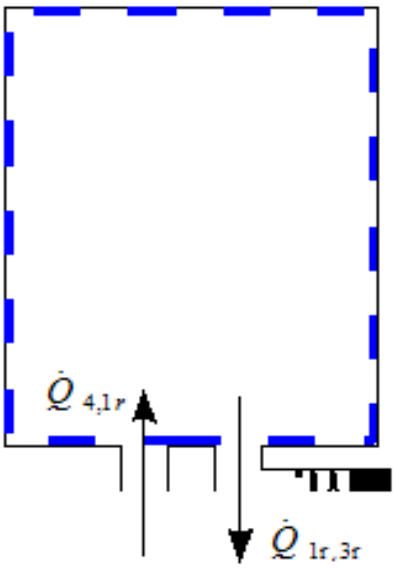
Volume de Controlo 4



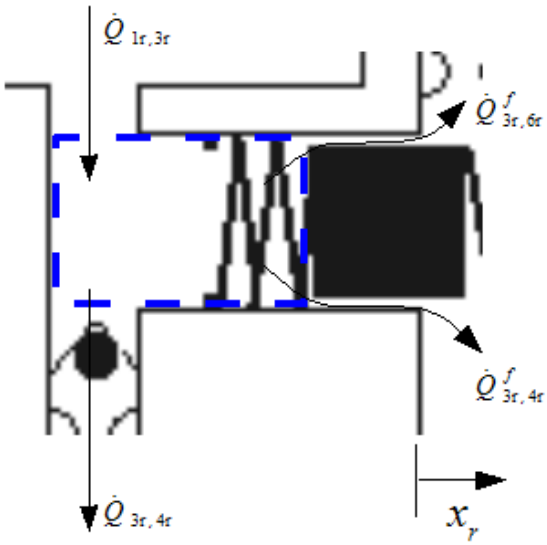
Volume de Controlo 8



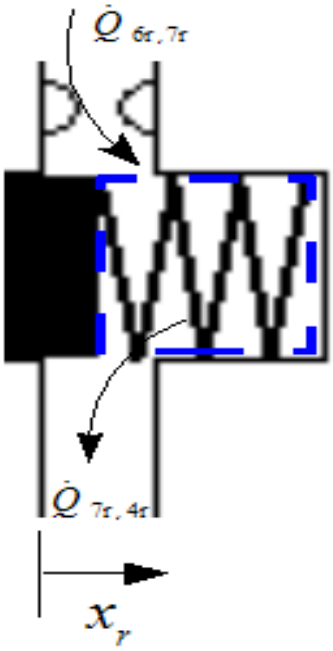
Volume de Controlo 9



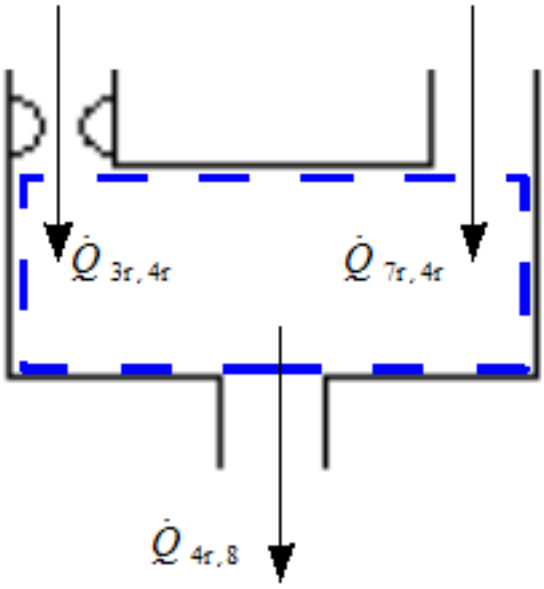
Volume de Controlo 1r



Volume de Controlo 3r



Volume de Controlo 7r



Volume de Controlo 4r

8.2. Dimensões Genéricas e Propriedades Físicas

Secção	*Diâmetro*
1	1/2"
2	25 mm
3	25 mm
4	25 mm
6	1/2"
7	1/2"
8	25 mm
10	1/2"
6r	1/2"

Secção	*Volume (Permanente)*
V_2	$2.4544\times10^{-6}\ m^3$
V_3	$2.2187\times10^{-5}\ m^3$
V_4	$2.4936\times10^{-5}\ m^3$
V_8	$2.4544\times10^{-5}\ m^3$
V_9	$2.4581\times10^{-5}\ m^3$
V_{3r}	$4.4571\times10^{-5}\ m^3$
V_{4r}	$4.2780\times10^{-5}\ m^3$
V_{7r}	$1.9635\times10^{-5}\ m^3$

Propriedades da Água[18]

ρ	$985.4\ kg\ m^{-3}$
β	$2.4\times10^{9}\ Pa^{-1}$
c	$4.1927\times10^{3}\ J\ kg^{-1}K^{-1}$
h_{ref}	$82.87\times10^{3}\ J\ kg^{-1}$
Pr*	7.3
k*	$0.6\ W\ m^{-1}K^{-1}$

Secção	Área Transversal
1r	$1.44\times10^{-2}\ m^2$
3r	$2.533\times10^{-4}\ m^2$
4r	$7.379\times10^{-4}\ m^2$
7r	$2.533\times10^{-4}\ m^2$
9	$9.677\times10^{-4}\ m^2$

Orifício	*Área*
$A_{o2,3}$	$7.854\times10^{-5}\ m^2$
$A_{o3,4}$	$7.854\times10^{-5}\ m^2$
$A_{o5,9}$	$1.6656\times10^{-5}\ m^2$
$A_{o8,9}$	$1.2668\times10^{-4}\ m^2$
$A_{o1r,3r}$	$1.2668\times10^{-4}\ m^2$
$A_{o3r,4r}$	$1.4314\times10^{-5}\ m^2$
$A_{o6r,7r}$	$5.1964\times10^{-5}\ m^2$

Bolbo

m	0.0185 kg
c	$600\ J\ kg^{-1}K^{-1}$
α	$0.25\ mm\ K^{-1}$
diâmetro	10 mm
comprimento	30 mm

Popriedades do Ar (Convecção)[18]

υ*	$1.5\times10^{-5}\ m^2 s$
α_T*	$2.1\times10^{-5}\ m^2 s$
k*	$0.0255\ W\ m^{-1}K^{-1}$
Pr*	0.71

Propriedades da Água[18]

μ*	1.04×10^{-3} Pa s

Popriedades do Ar (Convecção)[18]

β_T	$1/T$ K^{-1}

Outros

Cd	0.6
m_H	0.058 kg
m_r	0.055 kg
b_H	0.1 N s m^{-1}
b_r	0.1 N s m^{-1}
g	9.81 m s^{-2}
m_g	7.536 g
R_g	286.69 J $kg^{-1}K^{-1}$

*Valores variáveis com as condições de temperatura do fluido. O valor apresentado é uma média.