



**Universidade de  
Aveiro**

**2014**

Departamento de Engenharia Mecânica

**Alexandre Miguel  
Rufino Silva**

**Elemento de viga de formulação mista para  
aplicações estruturais**





**Universidade de  
Aveiro**

**2014**

Departamento de Engenharia Mecânica

**Alexandre Miguel  
Rufino Silva**

**Elemento de viga de formulação mista para  
aplicações estruturais**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica de Francisco José Malheiro Queirós de Melo, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.



## **O júri**

Presidente

Prof. Doutor João Paulo Davim Tavares da Silva  
Professor Associado C/Agregação, Universidade de Aveiro

Arguente

Doutora Helena Maria da Costa Paiva  
Bolseira de Pós-Doutoramento do Laboratório Associado CICECO – Centro de Investigação em  
Materiais Cerâmicos e Compósitos, Universidade de Aveiro

Orientador

Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo  
Professor Associado, Universidade de Aveiro



## **Agradecimentos**

A presente dissertação conclui uma importante etapa, tanto a nível do meu percurso académico como a nível do meu crescimento pessoal. Não podia, por isso, deixar de agradecer a todos os que me têm acompanhado e ajudado, directa ou indirectamente, no desenrolar das várias fases da minha vida e que muito têm contribuído para o desenvolvimento do meu futuro.

Começo por agradecer ao Professor Francisco José Malheiro Queirós de Melo, meu orientador, toda a cooperação e disponibilidade bem como a paciência e o empenho que sempre demonstrou ter ao longo deste trabalho. Foi gratificante ter tido a oportunidade de trabalhar e aprender com alguém que considero ter um vasto leque de conhecimentos e ser um exemplo de competência e rigor. Também reconheço que ao meu orientador devo a compreensão, o apoio e as palavras de motivação que foram importantes em momentos mais críticos, quando o desenvolvimento da tese não estava a correr como o esperado.

Agradeço à minha família por me apoiar incondicionalmente e por ser a minha estrutura de suporte. Principalmente à minha mãe que me deu sempre todas condições para chegar até aqui; ao meu pai que apesar de já não estar entre nós, foi, é e será o meu ídolo e um exemplo a seguir; ao meu irmão por estar sempre disponível para me ouvir e por ter sido com ele que descarreguei alguns momentos de maior tensão e, por fim, aos restantes familiares por terem estado sempre presentes.

Um profundo agradecimento e consciencialização de que foi o vosso apoio e amor incondicional que me têm ajudado sempre ao longo da minha vida a evoluir como ser humano. Aos meus amigos mais chegados, obrigado por acreditarem sempre em mim e por me proporcionarem grandes momentos de descontração fora das horas de trabalho!

Aos meus colegas de curso, que me acompanharam nesta caminhada ao longo destes 5 anos, agradeço as dinâmicas ocasiões de boa disposição e de descompressão mas também a compatibilidade nas situações de maior esforço e pressão. A coesão que sempre tivemos permitiu consolidar uma boa amizade, ao mesmo tempo que nos ajudou a superar os vários obstáculos que se sucederam durante o curso.



## Palavras-chave

Método dos elementos finitos, teoria generalizada de vigas, dinâmica estrutural, vibrações, formulação mista, algoritmo de integração temporal

## Resumo

Os elementos de viga são modelos de grande importância na simulação numérica do comportamento destes componentes estruturais quando integrados em complexos industriais, habitacionais ou construção mecânica geral. A sua utilidade particulariza-se na evolução que tais elementos permitem na formulação de elementos de placas e cascas, assim como na previsão do seu desempenho quanto à precisão de resultados esperados. O tema proposto enquadra-se na Formulação de elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko com parâmetros nodais híbridos (esforços e deslocamentos) para aplicações estáticas e dinâmicas (Hu, 1984).

Usar-se-á o conceito de energia complementar (princípio de Hu-Washizu) para formular de modo misto estes elementos, em que os pontos nodais representam parâmetros referentes a variáveis naturais (deslocamentos ou deformações) e essenciais (forças ou tensões). Parecendo elementos portadores de grande número de graus de liberdade, eles asseguram muitas vezes melhor continuidade de tais parâmetros quando os elementos adjacentes têm descontinuidades nas propriedades mecânicas, o que acontece frequentemente com materiais compósitos laminados. A fim de reduzir o número de parâmetros nodais, procede-se à condensação de alguns graus de liberdade. No elemento de viga aqui descrito, condensam-se os graus de liberdade referentes a forças ou momentos nodais, como descrito no texto.

O comportamento dinâmico será analisado por algoritmo implícito de integração temporal da equação de equilíbrio em regime dinâmico, permitindo tal procedimento avaliar o fenómeno de propagação de ondas de flexão ao longo da viga sob acção de transitórios do tipo impulsional.

Desta forma o objectivo principal será diminuir o esforço computacional referente à simulação numérica dos elementos de viga, na medida em que o elemento formulado por condensação de alguns graus de liberdade tem menos ocupação de memória nos programas; estudar o comportamento em fenómenos de “dinâmica rápida” (fast rate Dynamics).



**Keywords**

Finite element method, generalized theory of beam, structural dynamics, vibrations, mixed formulation, time integration algorithm

**Abstract**

Beam elements are models of great importance in the numerical simulation of the behavior of structural components when integrated into industrial, residential or general mechanical construction complexes. Their utility is evidenced as these beam elements allow the evolution to the formulation of plate and shell elements, with specific field of application. Also, their performance for accuracy can be predicted with simple formulation beam elements prior more advanced plate or shell elements to be assessed. The proposed topic fits into the formulation of beam elements, following Euler-Bernoulli and Timoshenko models with hybrid nodal parameters (Strain and displacement) for static and dynamic applications (Hu, 1984).

The concept of complementary energy (principle of Hu-Washizu) will be used to formulate these mixed mode elements and then to condensate the degrees of freedom related to nodal forces or moments, so obtaining a more simplified irreducible form". The dynamic behavior will be analyzed by explicit time integration algorithm of the equilibrium equation in dynamic regime, which allows evaluating the phenomenon of propagation of bending waves along the beam under action of transient-type impulse.

One of the main objectives here will be to reduce the computational effort on the numerical simulation of beam elements, because the element formulated by condensation of some degrees of freedom has less computational effort in the programs; study the behavior of phenomena in fast rate Dynamics.





# ÍNDICE

Lista de Figuras .....	III
Lista de Tabelas .....	VII
Simbologias .....	IX
Capítulo 1. Introdução .....	1
1.1. ENQUADRAMENTO .....	1
1.2. MOTIVAÇÃO E OBJECTIVOS .....	2
Capítulo 2. Revisão Bibliográfica .....	3
2.1. ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS .....	3
2.2. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	6
2.3. ANÁLISE DE VIGAS – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	8
2.3.1. Modelo de Viga Euler-Bernoulli .....	9
2.3.2. Modelo de viga Timoshenko .....	14
Capítulo 3. Formulação dos Elementos de Viga .....	19
3.1. ANÁLISE DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI .....	19
3.2. ANÁLISE DE VIGAS DE TIMOSHENKO .....	23
3.3. ANÁLISE DA SOLUÇÃO OBTIDA .....	27
3.3.1. Efeito de Shear Locking .....	28
Capítulo 4. Elementos de Viga de Formulação Mista .....	35
4.1. APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO HÍBRIDA A VIGAS DE TIMOSHENKO .....	35
4.2. FORMULAÇÃO HÍBRIDA VS FORMULAÇÃO CLÁSSICA .....	44
4.2.1. Solução Analítica Vs Solução Aproximada -MEF .....	44
4.2.2. Campos de tensão – Formulação Mista .....	52
4.2.3. Efeito de Shear Locking – Formulação Mista Vs Formulação Clássica .....	55
Capítulo 5. Análise da Dinâmica Estrutural .....	57
5.1. SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	57
5.2. SOLUÇÃO NUMÉRICA – M.E.F. .....	63
5.2.1. Cálculo das Frequências Naturais e Modos de Vibração .....	66
5.2.2. Aplicação da Formulação Clássica em Dinâmica de Estruturas .....	67
5.2.3. Aplicação da Formulação Mista em Dinâmica de Estruturas .....	68
5.2.4. Integração Temporal das Equações de Equilíbrio .....	71

5.2.5. Campos de Tensão - Análise Dinâmica .....	81
5.2.6. Cálculo do Factor Dinâmico .....	83
5.3. SOLUÇÃO ANALÍTICA VS SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	86
5.4. TEORIA DE TIMOSHENKO EM ANÁLISE DINÂMICA.....	88
5.5. FORMULAÇÃO CLÁSSICA VS FORMULAÇÃO MISTA EM ANÁLISE DINÂMICA .....	97
Capítulo 6. Conclusões e Trabalho Futuro.....	101
6.1. CONCLUSÕES .....	101
6.2. TRABALHO FUTURO.....	101
Referências Bibliográficas .....	105
Anexos .....	107

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Representação esquemática do domínio genérico e da respectiva fronteira para o caso unidimensional.....	4
Figura 2.2 – Exemplos de funções genéricas com continuidade $C - 1, C0$ e $C1$ . .....	6
Figura 2.3 – Trabalho virtual realizado pelas forças reais.....	6
Figura 2.4 – Estrutura sujeita a deformações .....	7
Figura 2.5 - Sistema de coordenadas cartesianas adoptado.....	10
Figura 2.6 - Hipótese de Bernoulli.....	11
Figura 2.7 - Campos de esforços numa viga e componentes do tensor de tensões.....	12
Figura 2.8 - Diagrama de um corpo livre.....	13
Figura 2.9 – Hipótese de Timoshenko.....	15
Figura 2.10 - Teoria de vigas de Timoshenko. Distribuição de tensões normais e tangenciais.....	16
Figura 3.1 - Elemento de viga Euler-Bernoulli.....	19
Figura 3.2 - Representação das funções de forma para o elemento de viga de Euler-Bernoulli.....	20
Figura 3.3 – Significado físico das forças e momentos nodais equivalentes elementares .....	23
Figura 3.4 - Deslocamentos nodais elementares do elemento de viga Timoshenko .....	24
Figura 3.5 - Definição da aproximação dos campos de deslocamentos e das rotações.....	25
Figura 3.6 – Análise de uma viga contínua – exemplo 1.....	28
Figura 3.7 – Deformadas da viga contínua segundo o modelo de Timoshenko e o modelo Clássico .....	29
Figura 3.8 – Deflexão na extremidade da consola para diferentes alturas de vigas .....	30
Figura 3.9 – Evolução do rácio da deflexão na extremidade da consola para diferentes modelos de deformação .....	33
Figura 4.1 - Viga Timoshenko com parametrização nodal híbrida.....	35
Figura 4.2 – Análise de uma viga contínua – exemplo 2.....	38
Figura 4.3 – Discretização do problema estático .....	40
Figura 4.4 – Campo aproximado de deslocamentos transversos – 3 elementos viga .....	41
Figura 4.5 – Campo aproximado dos momentos de flexão – 3 elementos viga .....	42
Figura 4.6 – Campo aproximado de rotações – 3 elementos viga .....	43
Figura 4.7 – Campo aproximado de esforços transversos – 3 elementos viga.....	43
Figura 4.8 – Análise analítica – exemplo 2 .....	44
Figura 4.9 – Campo exacto de esforços transversos.....	45
Figura 4.10 – Campo exacto dos momentos de flexão .....	45
Figura 4.11 – Campo exacto das rotações .....	46
Figura 4.12 – Campo exacto dos deslocamentos.....	48
Figura 4.13 – Comparação da solução exacta com as soluções aproximadas através dos 2 modelos de deformação em estudo .....	49
Figura 4.14 – Solução aproximada dos deslocamentos segundo Timoshenko e Euler-Bernoulli – 1000 elementos viga .....	51
Figura 4.15 – Campo aproximado das tensões normais – 80 elementos viga.....	53
Figura 4.16 – Campo aproximado das tensões de corte – 80 elementos.....	53
Figura 4.17 – Valores nodais das tensões equivalentes verificadas na viga.....	54

Figura 4.18 – Formulação mista vs Formulação clássica (Integração Selectiva Reduzida) – 1 elemento .....	55
Figura 5.1 – Diagrama do corpo livre – problema dinâmico .....	58
Figura 5.2 - Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga simplesmente apoiada .....	60
Figura 5.3 – Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga em consola .....	62
Figura 5.4 – Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga duplamente encastrada .....	63
Figura 5.5 - Sistema não amortecido com 2 graus de liberdade .....	64
Figura 5.6 - Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade .....	64
Figura 5.7 – Deslocamento para a posição de equilíbrio estático .....	65
Figura 5.8 – Força impulsiva - entrada .....	71
Figura 5.9 - Análise dinâmica de uma viga contínua – exemplo 3 .....	73
Figura 5.10 - Força pulsada e intervalo de tempo em que actua na estrutura .....	74
Figura 5.11 – Cálculo aproximado da propagação das ondas de flexão nas 5 primeiras iterações – 1 elemento viga .....	77
Figura 5.12 - Deslocamento do nó B em função do tempo .....	78
Figura 5.13 – Deformada da viga para i instante $t=0.0048$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	79
Figura 5.14 - Deformada da viga para i instante $t=0.0096$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	79
Figura 5.15 - Deformada da viga para i instante $t=0.0144$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	80
Figura 5.16 - Deformada da viga para i instante $t=0.0192$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	80
Figura 5.17 - Tensão normal da viga em consola para 10 diferentes instantes .....	81
Figura 5.18 - Tensão tangencial da viga em consola para 10 diferentes instantes .....	82
Figura 5.19 – Deslocamento dinâmico da extremidade da viga em consola em comparação com o respectivo deslocamento estático .....	84
Figura 5.20 - Deslocamento dinâmico do centro da viga simplesmente apoiada em comparação com o respectivo deslocamento estático .....	85
Figura 5.21 – Deslocamento dinâmico do centro da viga duplamente encastrada em comparação com o respectivo deslocamento estático .....	85
Figura 5.22 - Deformada máxima para o primeiro modo vibração $n=1$ .....	87
Figura 5.23 - Análise dinâmica de uma viga contínua submetida a uma carga móvel – exemplo 4 .....	89
Figura 5.24 - Evolução das frequências naturais para os dois modelos .....	91
Figura 5.25 – Deformada da viga para i instante $t=0.0028$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	92
Figura 5.26 – Deformada da viga para i instante $t=0.0055$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	92
Figura 5.27 – Deformada da viga para i instante $t=0.0110$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	93

Figura 5.28 – Deformada da viga para i instante $t=0.0165$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos.....	93
Figura 5.29 – Deformada da viga para i instante $t=0.0220$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos.....	94
Figura 5.30 – Deformada da viga para i instante $t=0.0330$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos.....	94
Figura 5.31 – Deformada da viga para i instante $t=0.0413$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos.....	95
Figura 5.32 – Deslocamento no centro da viga em função do tempo até ao instante $t=0.0825$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	96
Figura 5.33 – Velocidade no centro da viga em função do tempo até ao instante $t=0.0825$ s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos .....	96
Figura 5.34 – Deslocamento extremidade livre para as duas formulações – Euler-Bernoulli .....	99
Figura 5.35 - Deslocamento extremidade livre para as duas formulações – Timoshenko .....	100
Figura 6.1 - Comportamento dinâmico de 2 sistemas - amortecido e não amortecido .....	103



## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Tipos de apoio a considerar.....	9
Tabela 3.1 – Tabela com pontos e pesos de Gauss.....	31
Tabela 4.1 – Tempos de processamento para os diferentes métodos de resolução .....	52
Tabela 5.1 – Aplicação das condições fronteira para o cálculo das constantes .....	59
Tabela 5.2 – Resposta do sistema para as 5 primeiras iterações na extremidade livre .....	76
Tabela 5.3 – Deflexão máxima de três tipos de viga (Modelo Eule-Bernoulli) no primeiro modo de vibração.....	83
Tabela 5.4 – Factor dinâmico para as 3 diferentes vigas no ponto de deflexão máxima .....	86
Tabela 5.5 – Matriz da força impulsiva .....	90
Tabela 5.6 – Primeiras frequências angulares naturais do sistema para os dois modelos de deformação .....	90
Tabela 5.7 - Frequências naturais calculadas analiticamente e por MEF – Euler-Bernoulli .....	98
Tabela 5.8 – Frequências naturais calculadas analiticamente e por MEF – Timoshenko .....	98
Tabela 5.9 - Tempos de processamento para análise dinâmica .....	99



## Simbologias

$A$	Área da secção transversal	$[m^2]$
$A_c$	Área transversal reduzida	$[m^2]$
$b$	Largura da secção transversal	$[m]$
$c$	Coeficiente de Amortecimento	$[kg/s]$
$E$	Módulo de Young	$[Pa]$
$E_c$	Energia Cinética	$[J]$
$E_p$	Energia Potencial	$[J]$
$F$	Força concentrada	$[N]$
$F(t)$	Força transitória	$[N]$
$F_{din}$	Factor dinâmico	-
$G$	Módulo de Corte	$[Pa]$
$h$	Altura da secção transversal	$[m]$
$I$	Momento de Inércia	$[m^4]$
$k$	Rigidez	$[kg/s^2]$
$L$	Comprimento longitudinal	$[m]$
$m$	Massa	$[kg]$
$\bar{m}$	Momento concentrado	$[N.m]$
$M$	Momento flector	$[N.m]$
$n$	Número de pontos de Gauss	-
$N$	Funções de forma	-
$p(x)$	Carga distribuída	$[N/m]$
$P_i$	Componentes das forças reais	$[N]$
$r$	Resíduo	-
$T$	Período Natural	$[s]$
$t$	Instante de tempo	$[s]$
$U_{corte}$	Energia de deformação por corte	$[J]$
$U_{flexão}$	Energia de deformação por flexão	$[J]$
$U_{Total}$	Energia de deformação total	$[J]$
$u_x$	Translação longitudinal	$[m]$
$V$	Esforços transversos	$[N]$
$w$	Deslocamento transversal	$[m]$
$w_{din}$	Deflexão dinâmica	$[m]$

$w_{est}$	Deflexão estática	[m]
$w_{max}$	Deflexão máxima	[m]
$w_0$	Modos de vibração (auto-vectores)	[m]
$x$	Posição	[m]
$\alpha_c$	Coefficiente de amortecimento de Rayleigh	[kg/s]
$\beta$	Constante da frequência natural	-
$\beta_c$	Coefficiente de amortecimento de Rayleigh	[kg/s]
$\beta_n$	Parâmetro de controlo (Método de Newmark)	-
$\gamma$	Deformação por corte	[rad]
$\gamma_n$	Parâmetro de controlo (Método de Newmark)	-
$\delta v_i$	Componentes do deslocamento virtual	[m]
$\delta W$	Trabalho virtual	[J]
$\delta W_{ext}$	Trabalho virtual das forças externas	[J]
$\delta W_{int}$	Trabalho virtual das forças internas	[J]
$\Delta t$	Intervalo de tempo	[s]
$\zeta$	Razão de amortecimento	-
$\theta$	Rotação da secção transversal	[rad]
$\varepsilon_{xx}$	Deformação longitudinal	-
$\kappa$	Factor de correcção	-
$\lambda$	Auto-valores	[rad/s]
$\nu$	Coefficiente Poisson	-
$\xi$	Coordenadas Iso paramétricas	-
$\rho$	Densidade	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{VM}$	Tensão de von Mises	[Pa]
$\sigma_{xx}$	Tensão normal	[Pa]
$\sigma_{xz}$	Tensão tangencial	[Pa]
$\sigma_Y$	Tensão de cedência do material	[Pa]
$\chi$	Curvatura	[m <sup>-1</sup> ]
$\omega$	Frequência angular natural	[rad/s]
$\omega_i$	Peso de integração	-

## Capítulo 1. Introdução

A dissertação encontra-se dividida em 6 capítulos devidamente organizados por forma a facilitar a compreensão progressiva dos conceitos inerentes ao problema.

Neste capítulo apresenta-se o conceito da dissertação bem como da sua estrutura. Estabelece-se simultaneamente a contextualização e objectivos a alcançar com o trabalho realizado.

### 1.1. ENQUADRAMENTO

Pode-se afirmar que as vigas foram criadas, ainda que inconscientemente, pela mão do homem como um elemento de sustentação (NASCIMENTO, 2005).

Uma viga é um elemento estrutural linear, que trabalha tanto na posição horizontal como inclinada. Num sistema laje-viga-pilar a viga tem a função de transmitir os esforços transversos recebidos da laje para o pilar, ou de transmitir uma carga concentrada, caso sirva de apoio a um pilar. Esta pode ser composta por madeira, metais (tais como aço ou alumínio), ou por betão armado. Em engenharia estrutural, apresentam-se três tipos de vigas, que diferem na forma como são ligadas aos seus apoios. Temos então as vigas em consola (somente um apoio), vigas biapoiadas e vigas contínuas (mais que 2 apoios).

Ao contrário dos elementos do tipo barra, as vigas têm a particularidade de transmitirem, além de esforços normais, momentos flectores e esforços transversos nas ligações entre elementos.

Aparentemente o astrónomo italiano Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a fazer uma abordagem científica sobre a resistência dos sólidos, dando origem à Mecânica dos Materiais. Nos dois primeiros capítulos da sua última publicação, “Diálogos sobre Duas Novas Ciências” (1638), faz-se a referência ao estudo do problema de uma viga em consola, carregada com o seu peso próprio mais um peso adicional. Os resultados obtidos da análise do problema mostraram-se incorrectos, sendo que não foram resolvidos de maneira apropriada até 1855.

Um pouco antes da Mecânica Newtoniana se estabelecer como o principal fundamento da física clássica, Robert Hooke (1635-1703) estudou a elasticidade dos materiais, formulando a “Lei de Hooke” publicada em 1676.

Desenvolvedor da denominada Mecânica Newtoniana, Isaac Newton (1642-1727) publicou a obra “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, onde descreve a lei da gravitação e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica. Isaac também desenvolveu o cálculo diferencial e integral.

O século XVIII fica marcado pelas maiores contribuições na mecânica dos sólidos. A partir dos princípios enumerados por Isaac Newton, os irmãos Jacob (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) desenvolveram estudos de vigas em consola, rotação de vigas, problemas de dinâmica e o princípio dos deslocamentos virtuais. Seguindo os passos do pai, o filho de Johan, Daniel Bernoulli (1700-1782), em conjunto com o aluno Leonard Euler (1707-1783), desenvolveu a teoria de flexão de vigas mais conhecida como Modelo de Viga Euler-Bernoulli e que ainda hoje é válida.

Destacam-se ainda contribuições mais recentes no que diz respeito à resistência dos materiais, onde Timoshenko (1878-1972) tem relevância especial. O modelo de Timoshenko considera a deformação de corte presente nas secções transversais da viga.

Até meados da primeira metade do século XX, os problemas físicos eram descritos matematicamente na forma de equações diferenciais ordinárias e/ou parciais, época em que vários engenheiros e investigadores contribuíram para a criação de vários métodos aproximados, entre os quais do Método dos Elementos Finitos.

A solução exacta é usualmente fruto de um método de solução analítica encontrado através de métodos algébricos e diferenciais aplicados a geometrias e condições de contorno particulares. A aplicação generalizada dos métodos analíticos para os mais diversos problemas, torna impraticável ou até mesmo impossível a obtenção das respectivas soluções analíticas exactas.

O Método dos Elementos Finitos, com a sigla abreviada MEF, consiste na modelação de um problema genérico que envolve meios contínuos, através da subdivisão da geometria do problema em elementos menores (discretização), chamados elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exacta pode ser obtida por interpolação de uma solução aproximada. Pode-se dizer portanto que este método passa por resolver um problema complexo, ou mesmo sem solução analítica, através da resolução sequencial e estruturada de vários problemas mais simples e com solução matemática (exacta ou aproximada) que, quando ensamblados, constituem a solução do problema global inicial.

Actualmente o MEF encontra aplicação nas mais variadas áreas da engenharia que vão desde as análises de tensões e deformações, até às análises térmica, electrostática ou do escoamento de fluidos (Dias *et al.*, 2010).

## **1.2. MOTIVAÇÃO E OBJECTIVOS**

Ao contrário de outros métodos utilizados no passado, o Método dos Elementos Finitos só tem utilidade prática se tivermos à disposição um computador digital, atendendo à grande quantidade de cálculos que é necessário realizar, mais especificamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares. Assim se explica o desenvolvimento deste método que coincidiu com a evolução e criação de computadores cada vez mais potentes, máquinas de armazenamento de dados, processamento de dados e cálculos em grande escala, para além de outros inúmeros atributos.

Com a “proliferação” de microcomputadores ocorrida no final da década de 80 e principalmente na década de 90, o MEF chega finalmente às mãos dos projectistas de estruturas, sendo que os recentes estudos neste campo estão direccionados para a melhoria do método, com o objectivo de obter melhores resultados a um mínimo esforço computacional.

Este trabalho tem precisamente essa finalidade, sendo a implementação de uma formulação mista tanto em elementos de viga Euler-Bernoulli como de Timoshenko o meio escolhido para atingir esse objectivo.

A aplicação e estudo de um elemento de viga de parâmetros híbridos far-se-á quer em problemas estáticos como em problemas dinâmicos.

## Capítulo 2. Revisão Bibliográfica

O intuito deste capítulo é o de descrever os conceitos de base subjacentes ao trabalho. Para tal abordam-se os seguintes temas: Método dos Elementos finitos – elementos de viga unidimensionais – e os dois modelos de deformação a abordar, ou seja, o modelo de viga Euler-Bernoulli e o modelo de viga Timoshenko.

Procura-se assim estabelecer uma relação entre teoria e prática, de forma a compreender melhor a importância destas matérias no dia-a-dia e quais as aplicações que delas podem surgir.

### 2.1. ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS

Hoje em dia, o Método dos Elementos Finitos apresenta-se como a técnica numérica mais utilizada na resolução de problemas estruturais. Muito dessa popularidade se deve à sua simplicidade, robustez e elegância conceptual, para além de se adaptar a diferentes tipos de elementos estruturais e a vários regimes de comportamento.

Esta ferramenta, apesar da sua grande versatilidade, deve ser usada com algum critério uma vez que está associada à obtenção de soluções aproximadas onde não vêm verificadas de forma local as condições de equilíbrio.

A solução matemática da maioria dos problemas de engenharia com significado físico tangível passa por estabelecer uma aproximação ao comportamento de uma estrutura, formulando-se um modelo em que o seu comportamento é caracterizado por parâmetros desconhecidos ou incógnitas. Para que tal modelo seja fisicamente admissível, ele deve estar sujeito a restrições de ordem física ou matemática de modo generalizado.

O objectivo dos modelos numéricos é possibilitar a solução do problema com incógnitas no domínio  $\Omega$ , que representam variáveis físicas e à qual se dá o nome de graus de liberdade. Os graus de liberdade passarão a ser representados pelo vector  $u$ .

Numa abordagem unidimensional que vai de encontro ao propósito deste trabalho, o domínio genérico  $\Omega$  pode-se converter numa linha que representa uma viga por exemplo. A fronteira  $\Gamma$  é representada pelos pontos correspondentes à extremidade da viga, como se pode visualizar na Figura 2.1.

A definição completa de um problema é formada através de um conjunto de equações diferenciais  $X(u)$  e pelas respectivas condições fronteira  $y(u)$  que constituem a designada formulação forte desse problema e que estão representadas na equação (2.1) e equação (2.2) respectivamente.

A resolução de sistemas de equações diferenciais pode ser complexa em termos matemáticos, sendo que, através do MEF, poderemos transformar estas mesmas equações num sistema de equações algébricas de fácil resolução.

Este processo consegue-se através da subdivisão do domínio do sistema, ao qual se dá o nome de discretização.

Adicionalmente, no caso do Método dos Elementos Finitos, é necessário proceder-se à transformação da formulação forte de um problema na sua formulação fraca equivalente.

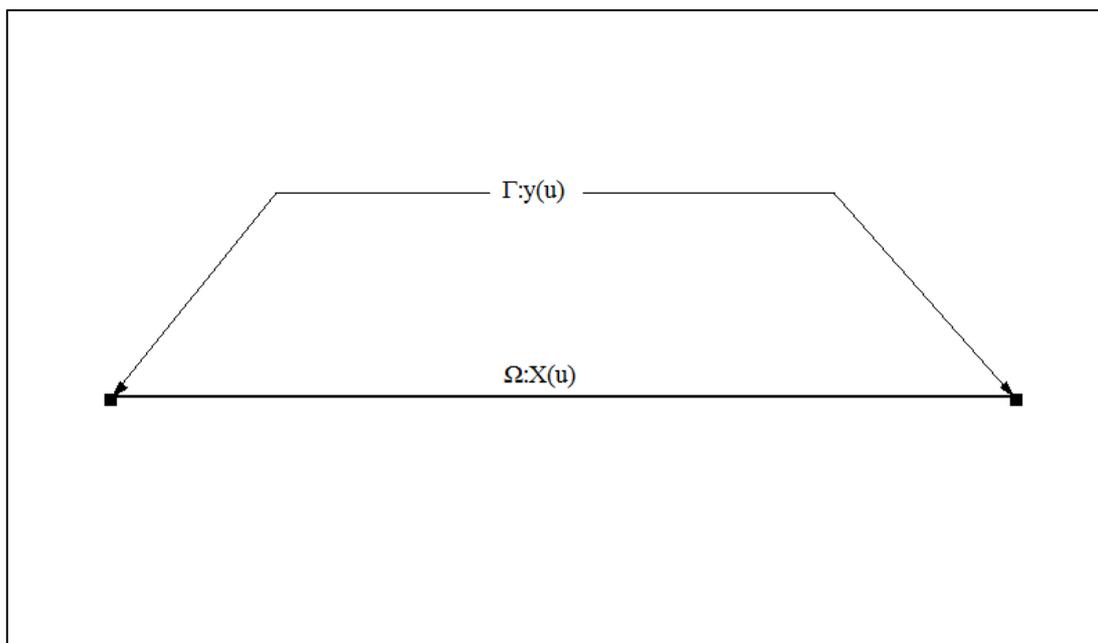


Figura 2.1 - Representação esquemática do domínio genérico e da respectiva fronteira para o caso unidimensional

$$X(u) = \begin{Bmatrix} X_1(u) \\ X_2(u) \\ \vdots \\ X_n(u) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$y(u) = \begin{Bmatrix} y_1(u) \\ y_2(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

A obtenção da formulação fraca mais não é do que reduzir a ordem das derivadas nas equações diferenciais que definem a formulação forte do problema. Tal procedimento permite que no caso de soluções aproximadas possam usar polinómios interpoladores de baixa ordem (ou pelo menos mais baixa do que o exigível na forma diferencial original).

Para levar a cabo esta etapa são necessários apenas alguns conhecimentos elementares de cálculo diferencial e cálculo integral. Recorrendo à regra da integração por partes, também conhecida como Formula de Green é possível definir a formulação fraca do problema unidimensional.

#### Integração por partes

Considerando  $f(x)$  e  $g(x)$  funções diferenciáveis e com derivada contínua em  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g \quad (2.3)$$

Reorganizando a derivada do produto das funções obtém-se:

$$f \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(fg) - \frac{df}{dx}g \quad (2.4)$$

Integrando todas as parcelas em ambos os membros da equação anterior, com limites de zero ao domínio total do problema,  $L$ , chega-se à relação correspondente à regra de integração por partes:

$$\int_0^L f \frac{dg}{dx} dx = \int_0^L \frac{d}{dx}(fg) dx - \int_0^L \frac{df}{dx} g dx \quad (2.5)$$

Isto é,

$$\int_0^L f \frac{dg}{dx} dx = fg - \int_0^L \frac{df}{dx} g dx \quad (2.6)$$

Uma vez obtida a formulação fraca, a aplicação de funções de aproximação, também designadas por funções de forma, completa o conjunto de passos necessários para aplicar eficazmente o MEF. Evidentemente, a interpolação polinomial garante que o deslocamento axial é contínuo dentro do elemento, bem como na fronteira e entre os elementos.

Uma função contínua com primeira derivada descontínua é designada por função com continuidade  $C^0$ . Já uma função contínua que admite  $n$  derivadas contínuas possui continuidade  $C^n$ . Neste caso, a sua derivada de ordem  $n + 1$  apresenta descontinuidades pontuais correspondentes ao desfaseamento entre subdomínios em que é constante. Não obstante, tais descontinuidades não impedem que esta derivada seja integrável em todo o seu domínio.

A utilização da formulação fraca pode levar à utilização de uma função com continuidade  $C^0$ , sendo que a sua primeira derivada apresentará descontinuidades pontuais, correspondente a uma função do tipo  $C^{-1}$ . Por exemplo, no caso da variável física a ser estudada ser o deslocamento, e se o respectivo campo for de continuidade  $C^0$ , então o campo de deformação – definido com base na primeira derivada do deslocamento – possui continuidade  $C^{-1}$ . Na Figura 2.2 estão ilustrados exemplos de funções genéricas com continuidade  $C^{-1}$ ,  $C^0$  e  $C^1$ . Devido à simplicidade das funções com continuidade  $C^0$ , este tipo de funções é usualmente utilizado na resolução de problemas com base no método dos elementos finitos.

De uma forma geral o objectivo da análise estrutural é determinar esforços internos e externos (cargas e reacções nos apoios) e as correspondentes tensões resultantes, bem como a determinação dos deslocamentos e deformações na estrutura. Dentro desta definição, também é importante compreender os conceitos de trabalho e energia, visto que esses conceitos permitem que o comportamento estrutural seja melhor entendido.

O termo “formulação fraca” aplica-se, de um modo geral, a qualquer tipo de problema. No entanto, na linguagem clássica de mecânica estrutural, formulações deste tipo são frequentemente designadas por Princípio dos trabalhos Virtuais (PTV).

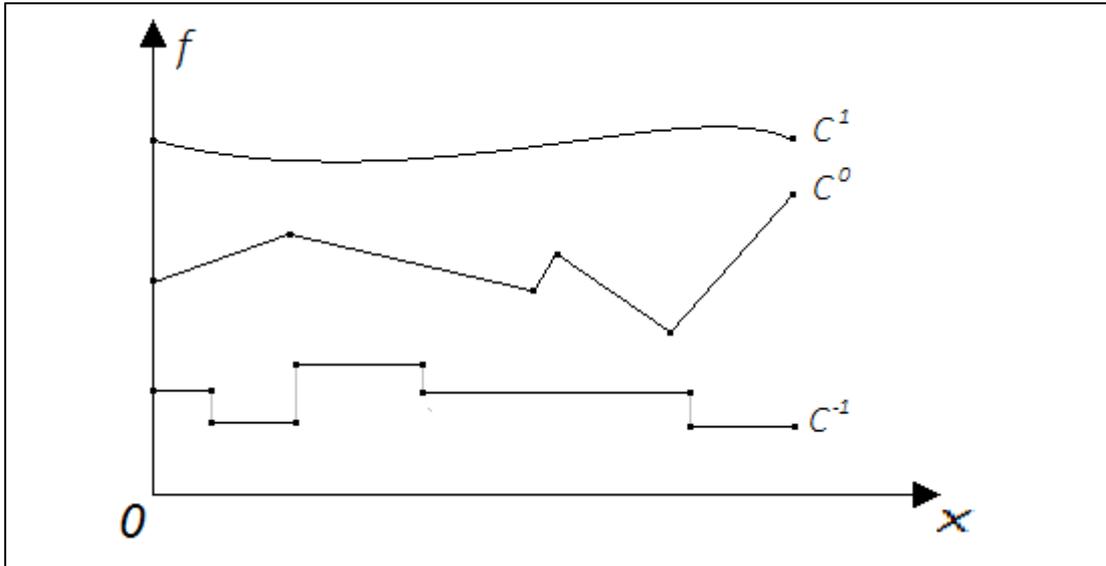


Figura 2.2 – Exemplos de funções genéricas com continuidade  $C^{-1}$ ,  $C^0$  e  $C^1$ .

## 2.2. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

A palavra “virtual” significa que as quantidades não existem no sentido real ou físico. Deste modo, o deslocamento virtual  $\delta v_i$  é um deslocamento infinitesimal e arbitrariamente imposto sobre o sistema estrutural. Já o trabalho realizado por forças reais  $P_i$  durante um deslocamento virtual é designado de trabalho virtual (Franco, [s.d.]).

Seja um corpo rígido sujeito a um sistema de forças reais constantes e integralmente aplicadas a um corpo rígido conforme mostrado na Figura 2.3.

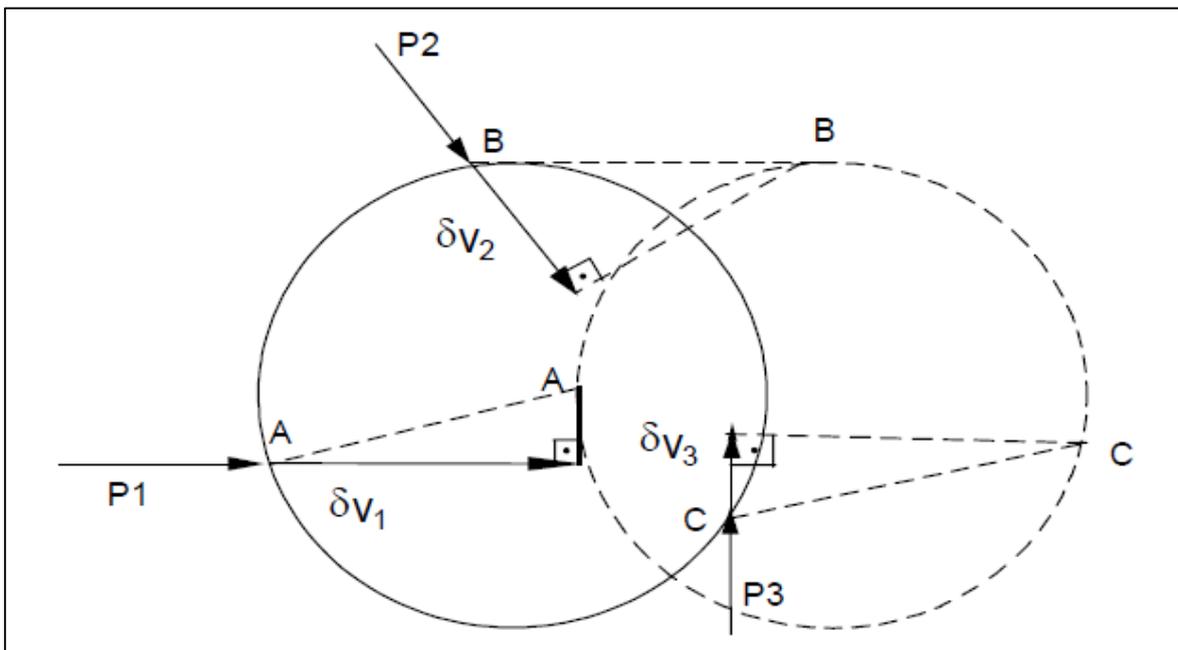


Figura 2.3 – Trabalho virtual realizado pelas forças reais

O trabalho virtual realizado pelas forças reais durante o deslocamento virtual é dado por:

$$\delta W = P_1 \delta v_1 + P_2 \delta v_2 + P_3 \delta v_3 \Rightarrow \delta W = \sum_{i=1}^3 P_i \delta v_i \quad (2.7)$$

Numa situação de equilíbrio, na realização de um deslocamento virtual num corpo rígido, o trabalho realizado pelas forças que actuam nesse determinado ponto material deve ser nulo. Esta afirmação consiste no princípio dos trabalhos virtuais.

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 P_i \delta v_i = 0 \quad (2.8)$$

Também é possível aplicar o PTV nos casos de estruturas deformáveis. Para esta situação pode-se imaginar um corpo elástico em equilíbrio, sob a acção de um sistema de forças. A estrutura é submetida a uma deformação virtual que consiste numa pequena mudança na sua forma original, como descrito na Figura 2.4.

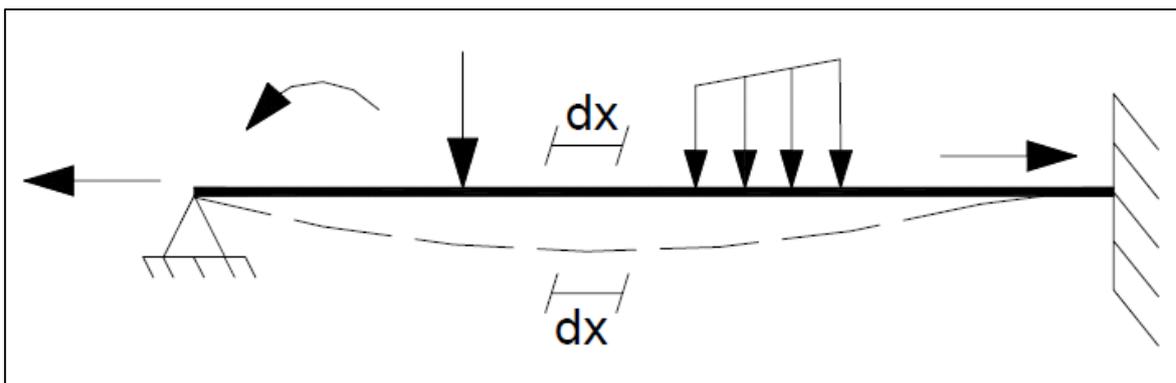


Figura 2.4 – Estrutura sujeita a deformações

Durante a deformação virtual, cada elemento da estrutura  $dx$  será deslocado para uma nova posição. Em consequência da mudança de forma, as forças exercidas no elemento realizarão trabalho virtual  $\delta W_{ext}$ .

Pelo Princípio da Conservação da Energia, o trabalho realizado pelas forças exteriores que actuam sobre a estrutura, é igual à energia de deformação armazenada que representa o trabalho virtual das tensões resultantes, ou seja, o trabalho virtual interno total  $\delta W_{int}$ .

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.9)$$

Designando a energia potencial do sistema por  $E_p$ , que consiste numa componente de acção do meio exterior sobre o sistema e outra de resposta do corpo elástico a essa acção, fica:

$$\delta E_p = -\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \quad (2.10)$$

A equação é uma representação do princípio da energia potencial estacionária, isto é, no caso de a energia potencial de uma estrutura ser expressa em função dos deslocamentos nodais desconhecidos, o sistema estará em equilíbrio quando estes forem tais que levem a energia potencial virtual  $\delta E_p$  atingir um valor estacionário. Se a estrutura está em equilíbrio estável, então a energia potencial virtual terá um valor mínimo (princípio da energia potencial mínima).

### 2.3. ANÁLISE DE VIGAS – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

As vigas são consideradas como peças lineares rectilíneas. Neste contexto portanto, a viga é tratada como um elemento unidimensional, fazendo-se a hipótese que o seu comprimento é bem maior que as dimensões da secção transversal. O problema principal está relacionado às acções de movimento que desta forma causam a flexão da estrutura. As forças exteriores actuam perpendicularmente ao eixo da viga, não sendo consideradas, neste documento, forças actuantes na direcção do eixo da peça.

Ao longo do trabalho assume-se que:

- O material tem um comportamento elástico linear, permitindo estabelecer-se uma relação directa entre esforços e deformações;
- O material estrutural é homogéneo e isotrópico, apresentando as mesmas propriedades físicas independentemente da direcção considerada;
- Linearidade geométrica que garante estabilidade elástica, evitando que os deslocamentos de um elemento estrutural não sejam proporcionais às forças aplicadas.

Observe-se que a análise de vigas é um dos problemas mais comuns de engenharia, tornando fundamental o estudo da teoria de vigas. Para esta finalidade, consideram-se os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A diferença mais flagrante entre os dois elementos reside na deformabilidade por corte que é desprezada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e considerada no modelo de viga Timoshenko (Castro, 1998).

A formulação correspondente aos elementos de viga Euler-Bernoulli é a mais usada quando se pretende analisar estruturas correntes na área de Engenharia Civil.

Num problema estático, a adopção da formulação de elementos de viga de Timoshenko só se justifica (isto considerando mais uma vez a viga como uma peça de material homogéneo onde não ocorre delaminação – a rotura mais comum verificada nos laminados compósitos) quando a altura da secção transversal for considerável ou quando se pretende simplificar a formulação de elementos finitos para a análise deste tipo de estruturas, como veremos mais adiante.

De salientar que a teoria de vigas de Euler-Bernoulli pode ser considerada um caso limite da teoria de Timoshenko à medida que a relação vão/altura tende para valores relativamente elevados. Deste modo, no caso de vigas esbeltas, a deformação de corte passa a ser desprezável e os resultados dos dois modelos tendem a coincidir.

O cálculo da solução para uma viga, independentemente da teoria utilizada, deve satisfazer em simultâneo as condições de equilíbrio, elasticidade bem como todas as restrições que o modelo possa estar submetido. Estas restrições designam-se frequentemente por condições fronteira, que estão dependentes dos diferentes tipos de apoio verificados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Tipos de apoio a considerar

Encastrado	S. Apoiado	Livre
		

Numa extremidade encastrada o deslocamento transversal, bem como a rotação devem ser nulos. Se esse apoio se verificar no nó inicial, é possível escrever:

$$w(x = 0) = 0 , \theta(x = 0) = 0 \quad (2.11)$$

Já numa extremidade apoiada, o deslocamento transversal deve ser nulo e como é permitida rotação, o momento no apoio também é igual a zero, excepção para o caso em que esteja aí aplicado algum momento concentrado  $\bar{m}$ . Particularizando de novo para o nó inicial e se  $\bar{m} = 0$  é possível definir:

$$w(x = 0) = 0 , M(x = 0) = 0 \quad (2.12)$$

Finalmente, numa extremidade livre o momento flector e o esforço transversal devem ser iguais às cargas concentradas  $F$  e momentos concentrados  $\bar{m}$  respectivamente, no caso de estes existirem. Admitindo que não existem forças nem momentos concentrados escreve-se:

$$V(x = 0) = 0 , M(x = 0) = 0 \quad (2.13)$$

### 2.3.1. Modelo de Viga Euler-Bernoulli

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, consideram-se vigas uniformes (de secção transversal constante) com comprimento longitudinal  $L$  como dimensão predominante. Seguindo o sistema de coordenadas definido na Figura 2.5, admite-se que todos os pontos pertencentes à mesma secção transversal plana apresentam o mesmo valor de deslocamento na direcção  $z$ , mais conhecido como deslocamento transversal  $w(x)$ . A rotação da secção transversal em torno do eixo  $y$  é denotada por  $\theta(x)$ .

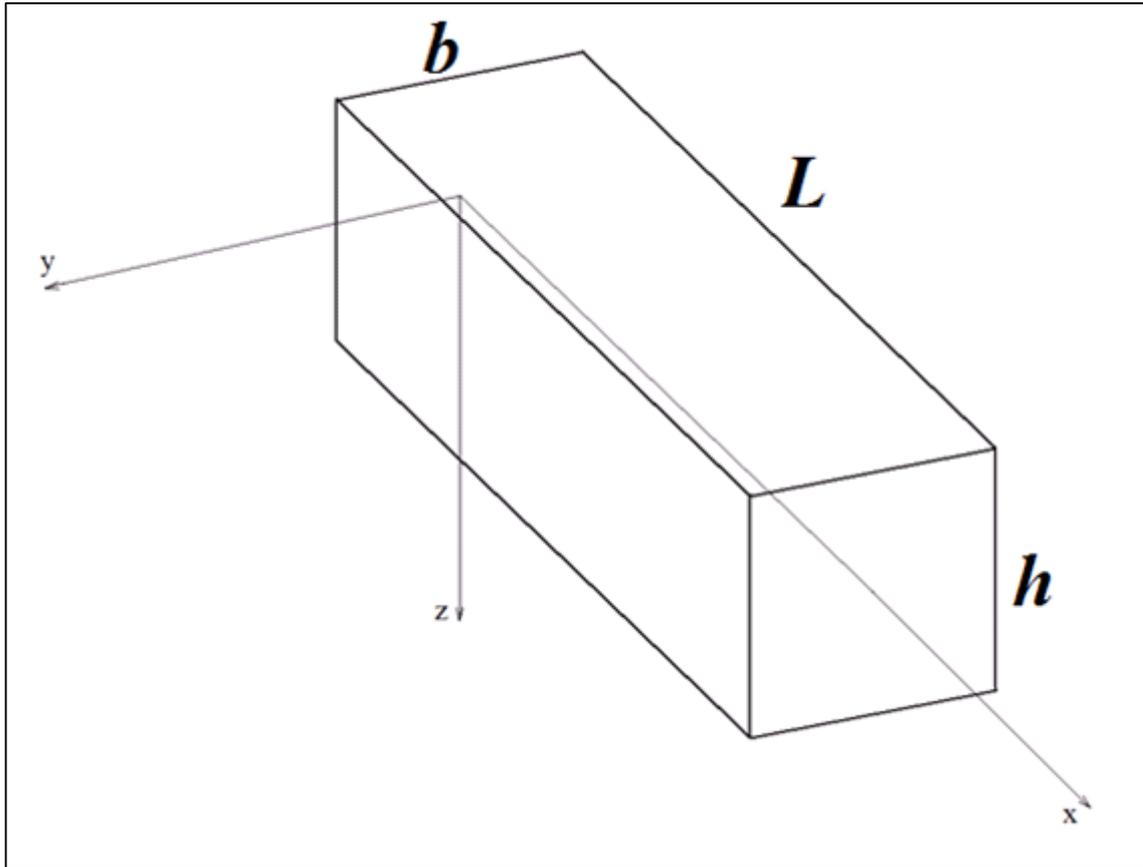


Figura 2.5 - Sistema de coordenadas cartesianas adoptado

Admite-se que secções planas, inicialmente perpendiculares ao eixo da peça continuem a permanecer planas e perpendiculares a esse eixo após a deformação do elemento estrutural. Tendo em conta que não se considera a existência da deformação por corte  $\gamma(x)$ , é possível verificar que o valor da rotação da secção transversal  $\theta(x)$  é, em valor absoluto, igual ao valor da inclinação do eixo longitudinal da viga, definido pela derivada do campo dos deslocamentos transversais eixo  $\frac{dw(x)}{dx}$  como se pode verificar pela Figura 2.6.

$$\gamma(x) = 0 \Rightarrow \theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.14)$$

Obtém-se desta forma:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.15)$$

Quando ocorre deformação por flexão as fibras longitudinais (fibras com a direcção do eixo da peça) sofrem extensões axiais. É possível definir as deformações axiais  $\epsilon_{xx}$  em função dos deslocamentos. Deste modo e sabendo que a translação longitudinal aparece na forma:

$$u_x(x, y, z) = -z\theta(x) \quad (2.16)$$

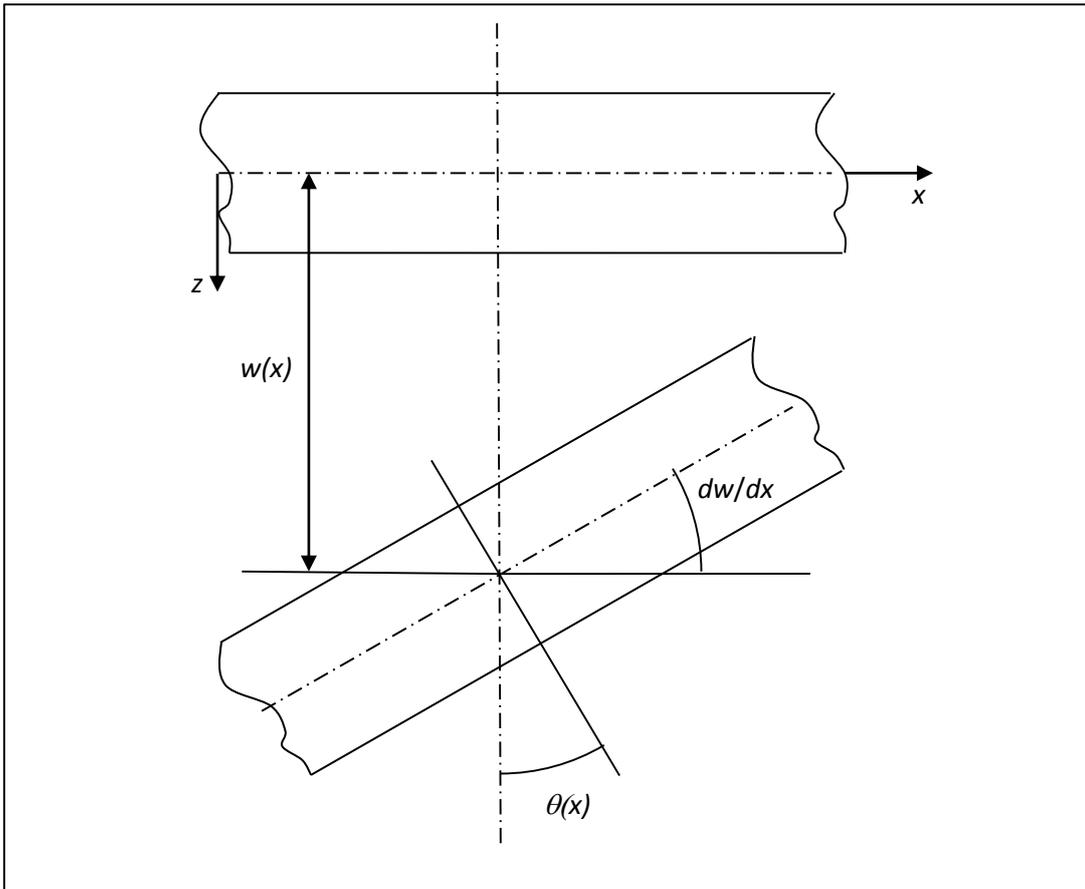


Figura 2.6 - Hipótese de Bernoulli

Então a deformação segundo o eixo  $x$  pode ser expressa por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} = -z \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2.17)$$

À grandeza que caracteriza o comportamento da peça à flexão é usual dar-se o nome de “curvatura”, a qual é definida pela igualdade:

$$\chi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2.18)$$

Relacionando directamente o campo de curvaturas com o campo de deslocamentos transversais pode-se reescrever a equação (2.19) como:

$$\chi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (2.19)$$

O campo de deslocamentos tem origem nos esforços e momentos que intervêm de forma a deformar a viga, ao mesmo tempo que o campo de esforços e o campo de

momentos correspondem à resultante das componentes do tensor das tensões definida ao longo da secção transversal e exibida na Figura 2.7:

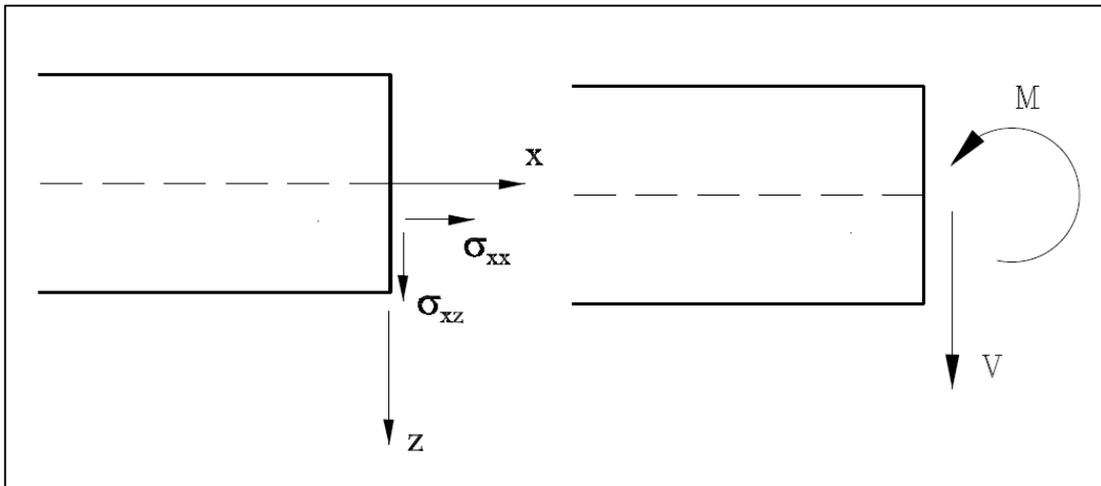


Figura 2.7 - Campos de esforços numa viga e componentes do tensor de tensões

A tensão normal é obtida pela Lei de Hooke como:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = zE \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2.20)$$

Ao passo que a tensão de corte (ou tensão tangencial) apresenta-se como:

$$\sigma_{xz} = G\gamma(x) \quad (2.21)$$

Através da definição das tensões normais e de corte, os campos dos momentos flectores  $M(x)$  e dos esforços transversos  $V(x)$  podem ser traduzidos através das seguintes expressões:

$$M(x) = \int_{\Omega} z \sigma_{xx} d\Omega \quad (2.22)$$

$$V(x) = \int_{\Omega} z \sigma_{xz} d\Omega \quad (2.23)$$

No entanto, visto que não é considerada deformação por corte (consequentemente a tensão tangencial também é negligenciada), a determinação dos esforços transversos  $V(x)$  não pode ser efectuada directamente através da aplicação das relações de elasticidade.

As condições de equilíbrio, num troço considerado infinitesimal, estabelecem as relações que devem existir entre os campos de esforços e as cargas transversais e momentos distribuídos que aí estejam aplicadas como descrito na Figura 2.8.

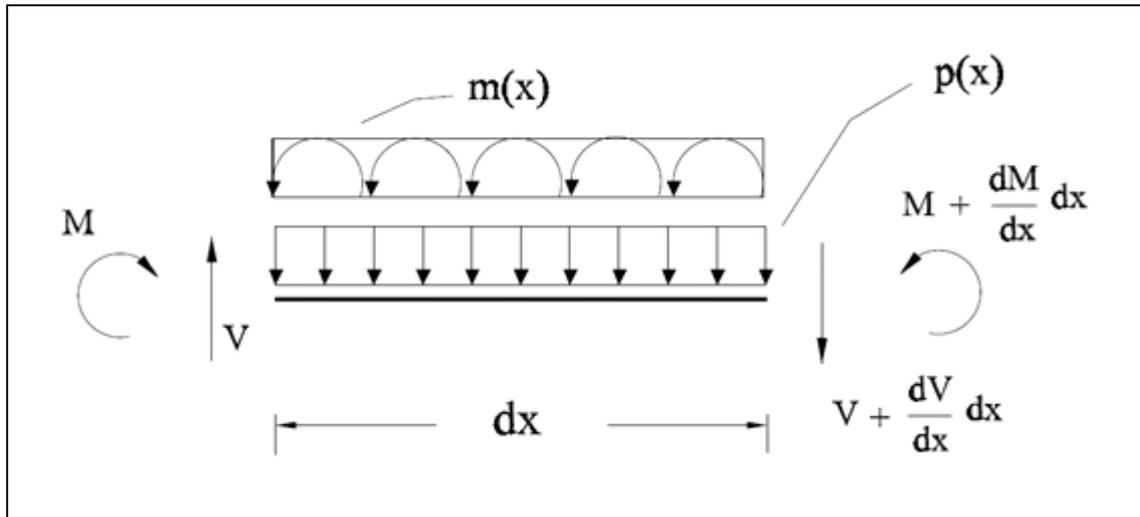


Figura 2.8 - Diagrama de um corpo livre

A equação de equilíbrio para o somatório das cargas transversais permite obter:

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow V - \left( V + \frac{dV}{dx} dx \right) - p dx = 0 \quad (2.24)$$

Simplificando a equação anterior obtém-se a primeira condição de equilíbrio:

$$\frac{dV(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (2.25)$$

Impondo que a resultante dos momentos calculada no extremo inicial do troço infinitesimal seja nula, pode-se escrever:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M + \left( M + \frac{dM}{dx} dx \right) + m dx - \left( V + \frac{dV}{dx} dx \right) dx - p dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.26)$$

Desprezando os infinitésimos de ordem superior, chega-se à segunda equação de equilíbrio:

$$\frac{dM(x)}{dx} + m(x) - V(x) = 0 \quad (2.27)$$

No caso de se desprezar os momentos distribuídos então os esforços transversos aparecem na forma:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (2.28)$$

Novamente a aplicação da Lei de Hooke aos materiais permite estabelecer uma relação entre a resultante do tensor de tensões e os campos de deformação instalados na viga:

$$M(x) = \int_{\Omega} z E \varepsilon_{xx} d\Omega \quad (2.29)$$

Desenvolvendo ainda mais a equação anterior obtém-se:

$$M(x) = \int_{\Omega} z^2 E \chi(x) d\Omega \quad (2.30)$$

$$M(x) = E \int_{\Omega} z^2 d\Omega \chi(x) \quad (2.31)$$

$$M(x) = EI \chi(x) \quad (2.32)$$

Onde  $E$  corresponde ao módulo de Young do material e  $I$  representa o momento de inércia definido pela secção transversal.

Juntando as duas condições de equilíbrio já expostas (equação (2.25) e equação (2.28)) obtemos a equação diferencial que rege o comportamento da viga quando se assumem hipóteses Euler-Bernoulli:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad (2.33)$$

Contudo é de salientar mais uma vez que, na análise de um problema específico, a determinação da solução requer que se especifiquem à partida as condições de contorno.

### ***2.3.2. Modelo de viga Timoshenko***

Na teoria de Timoshenko, consideram-se vigas uniformes (de secção transversal constante), sendo este um modelo mais adequado para tratar problemas de “vigas curtas”, ou seja vigas onde a altura  $h$  da secção transversal apresenta valores relativamente consideráveis quando comparados ao vão da peça  $L$ .

Tal como nas vigas de Euler-Bernoulli, o principal interesse reside em estudar os deslocamentos transversais  $w(x)$  na direcção do eixo  $z$  e as rotações transversais em torno do eixo  $y$ .

Dada a existência de deformação por corte  $\gamma(x)$ , as secções planas inicialmente perpendiculares ao eixo da viga, permanecem planas mas não necessariamente perpendiculares a esse eixo como ilustra a figura Figura 2.9.

Desta forma, o valor da rotação  $\theta(x)$  não pode ser determinado directamente a partir da inclinação do eixo da viga  $\frac{dw(x)}{dx}$ .

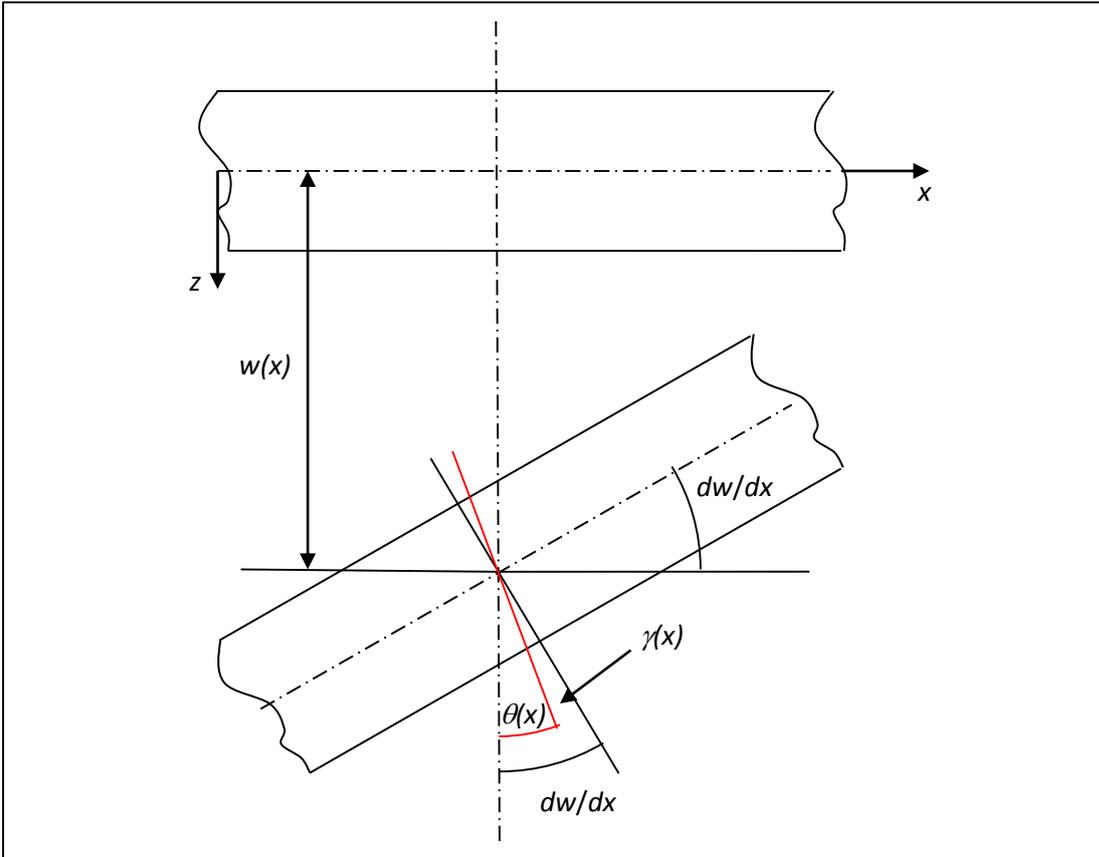


Figura 2.9 – Hipótese de Timoshenko

Para caracterizar a deformação de corte, é necessário determinar a variação angular das fibras inicialmente perpendiculares e dispostas segundo a direcção  $x$  e  $z$ . De notar que a translação segundo  $x$  já está exposta na equação (2.16), ao passo que a translação segundo  $z$  não é mais do que o deslocamento transversal  $w(x)$ :

$$u_z(x, y, z) = w(x) \quad (2.34)$$

A deformação correspondente é dada pela igualdade:

$$\gamma(x) = \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial x} = \theta(x) - \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.35)$$

Nas vigas de Timoshenko os campos de deformação e de esforços são em tudo semelhantes aos que foram considerados no caso das vigas de Euler-Bernoulli, à excepção, como é claro, do acréscimo da deformação de corte. A relação entre os campos flectores  $M(x)$ , e os campos de curvaturas  $\chi(x)$  apresentam-se da mesma forma para as duas formulações como se pode verificar na equação (2.32) e equação (2.18) respectivamente.

No entanto, a determinação do campo de esforços transversos  $V(x)$ , pode ser efectuada directamente através da aplicação das relações de elasticidade, em contraste

com o que acontece na teoria de Euler-Bernoulli, uma vez que a tensão de corte  $\sigma_{xz}$  é considerada.

A definição apresentada na equação (2.23) para o esforço transversal pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$V(x) = \int_{\Omega} G\gamma(x) d\Omega \quad (2.36)$$

$$V(x) = GA\gamma(x) \quad (2.37)$$

Onde  $G$  corresponde ao módulo de corte, o qual é definido por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.38)$$

Sendo que  $\nu$  corresponde ao coeficiente de Poisson do material estrutural.

Analisando a distribuição exacta das tensões normais e tangenciais a distribuição suposta pela teoria de vigas de Timoshenko, expostas na Figura 2.10, observa-se que a variação linear das tensões normais  $\sigma_{xx}$  ao longo do eixo  $z$ , na teoria de vigas de Timoshenko coincide com a distribuição exacta.

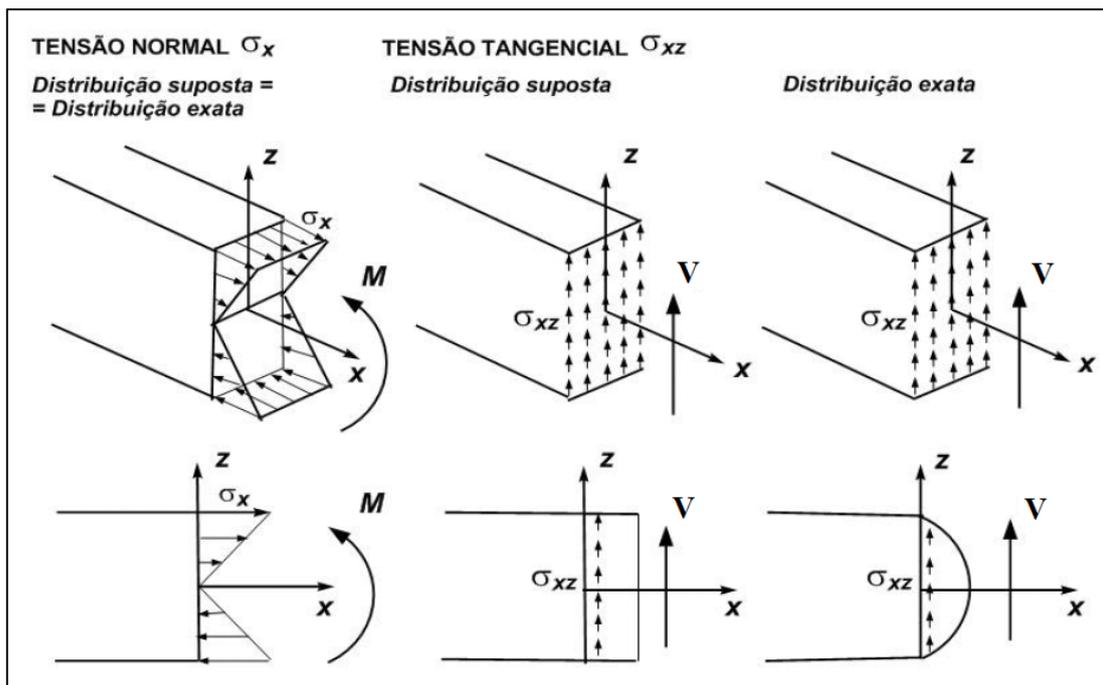


Figura 2.10 - Teoria de vigas de Timoshenko. Distribuição de tensões normais e tangenciais.

Pelo contrário, a variação uniforme da tensão tangencial  $\sigma_{xz}$  ao longo da secção transversal, obtida pela teoria de Timoshenko, entra em contradição com a distribuição exacta (comportamento em forma parabólica). Desta forma é necessário introduzir um factor adimensional de correcção  $\kappa$ . Para secções rectangulares, é usual utilizar o valor

de  $\kappa = 5/6$ . Dependendo do tipo de secção transversal em causa, o factor de correcção vai mudando. Desta forma por exemplo, para uma secção circular maciça tem-se  $\kappa = 9/10$  e para uma secção circular tubular (parede fina) tem-se  $\kappa = 1/2$  (Feodosiev, 1972).

$$\sigma_{xz} = \kappa G \gamma(x) \quad (2.39)$$

Por essa mesma razão, a área da secção transversal é substituída pela área reduzida de corte  $A_c$ , a qual pode ser definida através de:

$$A_c = \kappa A \quad (2.40)$$

A equação (2.37) é desenvolvida então como:

$$V(x) = G A_c \gamma(x) \quad (2.41)$$



## Capítulo 3. Formulação dos Elementos de Viga

Neste capítulo é discutida a aplicação do método dos elementos finitos (MEF) na resolução de problemas segundo a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko.

Faz-se igualmente uma análise das características das soluções obtidas para cada tipo de modelo de deformação.

### 3.1. ANÁLISE DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

A aplicação do Método dos Elementos Finitos requer primeiramente que a estrutura seja discretizada, isto é, dividir a estrutura em subdomínios de geometria simples, aos quais damos o nome de elementos, para posteriormente definir uma aproximação dos deslocamentos transversais.

Para garantir a verificação das condições de compatibilidade é obrigatório que a aproximação garanta a continuidade do campo de deslocamentos e das duas primeiras derivadas, tanto no domínio do elemento como na fronteira entre elementos. Deste modo é necessário envolver na definição do campo de deslocamentos transversais, para além do valor dos deslocamentos nodais também os respectivos valores das rotações nodais, obtendo desta forma interpolações com polinómios de terceiro grau.

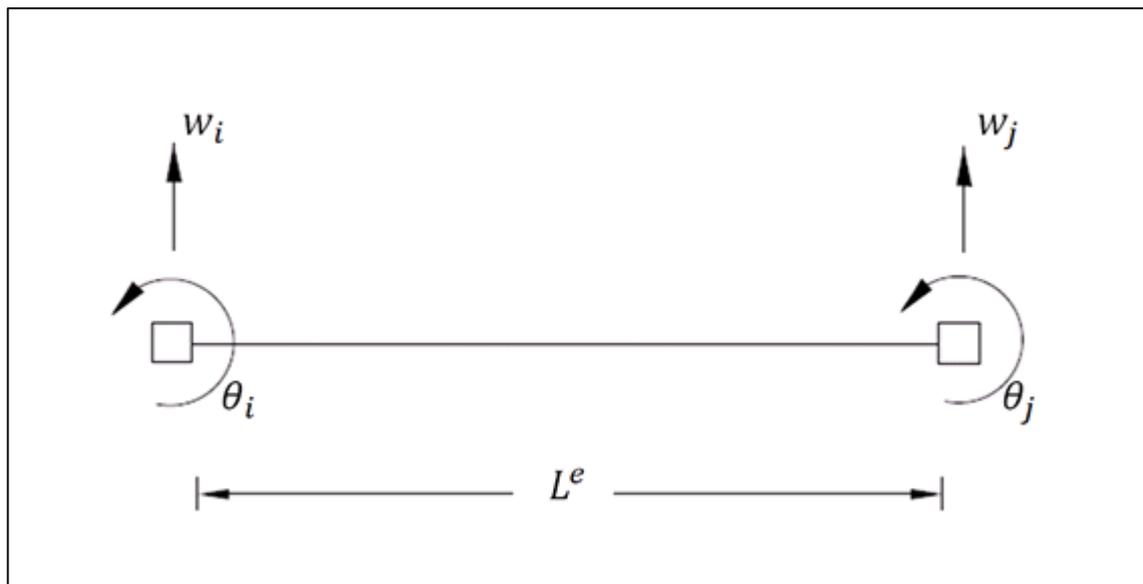


Figura 3.1 - Elemento de viga Euler-Bernoulli

A aproximação para o campo de deslocamentos transversais de um elemento é expressa no seguinte formato:

$$w(x_e) = N_1(x_e)w_i + N_2(x_e)w_j + N_3(x_e)\theta_i + N_4(x_e)\theta_j \quad (3.1)$$

De salientar que os cálculos são efectuados segundo o referencial associado a cada elemento, podendo escrever-se:

$$0 \leq x_e \leq L \quad (3.2)$$

Cada uma das funções de aproximação tem um significado físico, na medida em que quando se impõe um valor unitário ao deslocamento nodal ou rotação nodal, tem-se a garantia que os restantes valores nodais são nulos. Estas funções de forma são representadas na Figura 3.2.

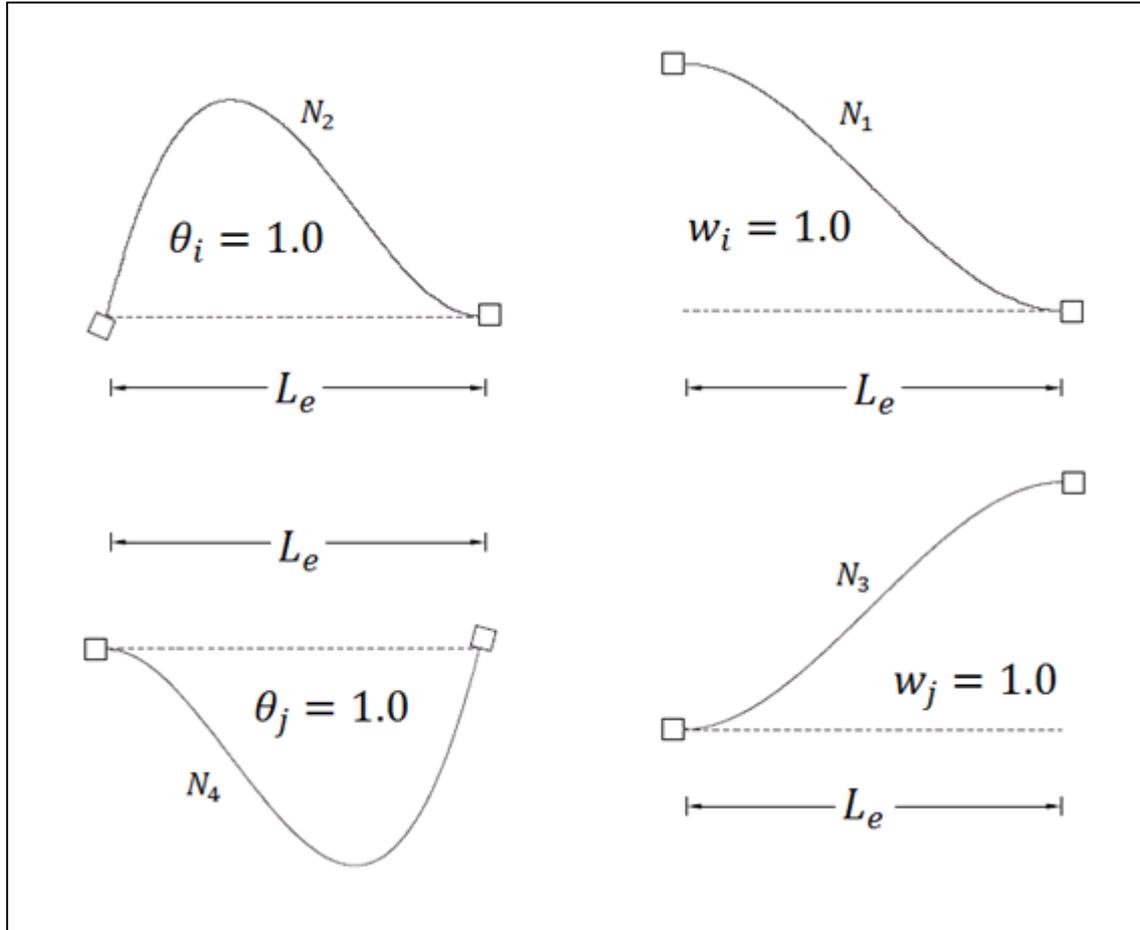


Figura 3.2 - Representação das funções de forma para o elemento de viga de Euler-Bernoulli

Na equação (3.1), as funções  $N_1(x)$  e  $N_3(x)$  representam as funções de forma dos deslocamentos transversos nos nós  $i$  e  $j$  do elemento finito respectivamente. Já as funções  $N_2(x)$  e  $N_4(x)$  representam as funções de forma para as rotações nodais equivalentes.

$$N_1(x) = -1 + \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.3)$$

$$N_2(x) = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (3.4)$$

$$N_3(x) = -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.5)$$

$$N_4(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (3.6)$$

Como se pode verificar estas funções são polinómios de terceiro grau em  $x$ . Voltando à aproximação (3.1), esta pode ser apresentada matricialmente na forma:

$$w(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [N]\{a\} \quad (3.7)$$

Da mesma forma, a aproximação do campo de curvaturas pode ser escrita matricialmente, através da matriz das derivadas das funções de forma  $[B]$  e do vector dos graus de liberdade nodais  $\{a\}$ , na forma:

$$\chi(x) = \left[ -\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [B]\{a\} \quad (3.8)$$

Chegando ao campo de curvaturas, através da consideração da relação de elasticidade descrita na equação (2.32), é possível escrever:

$$M(x) = [EI] \left[ -\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \ -\frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [D][B]\{a\} \quad (3.9)$$

Na equação anterior, a matriz  $[D]$  retrata a rigidez à flexão do elemento de viga, que contém as propriedades mecânicas que permitem caracterizar o comportamento elástico linear do material estrutural.

Tendo-se já definido o conceito da matriz  $[D]$  e  $[B]$ , pode-se calcular a matriz de rigidez elementar, dependente das características geométricas e mecânicas do elemento finito considerado. O seu cálculo passa pela aplicação da seguinte equação:

$$[k]^e = \int_0^{L^e} [B]^t [D] [B] dx \quad (3.10)$$

Efectuando as integrações definidas na equação (3.10) é possível obter a matriz  $[k]$  com o seguinte formato :

$$[k]^e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}^e \quad (3.11)$$

A matriz rigidez elementar permite relacionar os deslocamentos e rotações nodais elementares  $[a]^e$ , com os correspondentes carregamentos nodais  $[F]^e$ , resultando num sistema de equações na forma genérica:

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e \quad (3.12)$$

Ou na sua forma estendida:

$$\begin{Bmatrix} V_i^e \\ M_i^e \\ V_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

No nó  $i$ , por exemplo, o vector dos carregamentos nodais tem duas componentes que representam as forças nodais equivalentes  $V_i^e$  e os momentos nodais equivalentes  $M_i^e$ .

No caso de haver cargas distribuídas,  $p(x)$ , ao longo do vão elemento de viga, as forças nodais equivalentes são determinadas de forma a garantir que realizam o mesmo trabalho que as cargas distribuídas que substituem.

Esta equivalência estática conduz à seguinte definição genérica:

$$\{F\}^e = - \int_0^{L^e} [N]^t p(x) dx \quad (3.14)$$

O sinal negativo que afecta o integral em (3.14) surge porque as forças nodais elementares  $V_i^e$  e  $V_j^e$  são positivas de acordo com o sentido convencional para esta grandeza. Se a carga aplicada for uniformemente distribuída,  $p(x) = P$ , então o vector dos carregamentos nodais é dado por:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{LP}{2} \\ \frac{L^2P}{12} \\ \frac{LP}{2} \\ -\frac{L^2P}{12} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

No caso de existirem forças nodais e momentos nodais directamente aplicadas à estrutura, essas têm de ser consideradas. Veja-se então o exemplo que se segue de uma carga uniformemente distribuída em simultâneo com duas forças concentradas e dois momentos concentrados, aplicadas nos nós do elemento:

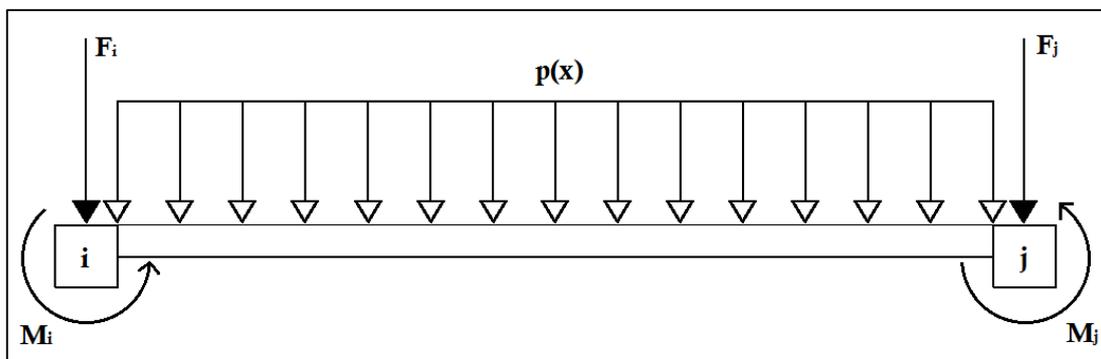


Figura 3.3 – Significado físico das forças e momentos nodais equivalentes elementares

Ora como se verificam tanto cargas distribuídas como cargas concentradas, o vector de carregamentos nodais tem de admitir forças distribuídas e forças concentradas em simultâneo, bem como os momentos concentrados (J.N.Reddy, 2005).

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{LP}{2} \\ \frac{L^2P}{12} \\ \frac{LP}{2} \\ -\frac{L^2P}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.2. ANÁLISE DE VIGAS DE TIMOSHENKO

Em semelhança com o que acontece na teoria de Euler-Bernoulli, é necessário numa primeira fase definir a aproximação para os campos de deslocamentos. Este método tem a particularidade de se definirem duas aproximações independentes para o elemento estrutural, uma para o campo de deslocamentos transversais  $w(x)$  e outra para o campo de rotações  $\theta(x)$ . Isto acontece porque estes campos são independentes quando se considera deformação de corte  $\gamma(x)$ . Esta independência faz com que nas

equações de compatibilidade surjam somente primeiras derivadas dos campos  $w(x)$  e  $\theta(x)$  como se pode verificar nas seguintes equações:

$$M(x) = EI \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.17)$$

$$V(x) = GA_c \left( \theta(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (3.18)$$

Desta forma, a definição das aproximações resulta bastante simplificada no caso de se adoptar a teoria de Timoshenko, uma vez que é apenas necessário garantir a continuidade dos campos que são directamente aproximados, como consequência da utilização de interpolações de primeiro grau.

A definição da aproximação para os campos considerados na teoria de Timoshenko é baseada exclusivamente no conhecimento do valor que a respectiva grandeza física toma num determinado número de nós definidos no elemento finito.

Assim, para elementos com dois nós os campos  $w(x)$  e  $\theta(x)$  são escritos da seguinte forma:

$$w(x_e) = N_i(x_e)w_i + N_j(x_e)w_j \quad (3.19)$$

$$\theta(x_e) = N_i(x_e)\theta_i + N_j(x_e)\theta_j \quad (3.20)$$

De realçar que o tipo de sinal utilizado nas funções para os campos de deformação surge por motivos de convenção dos sentidos dos deslocamentos nodais da viga.

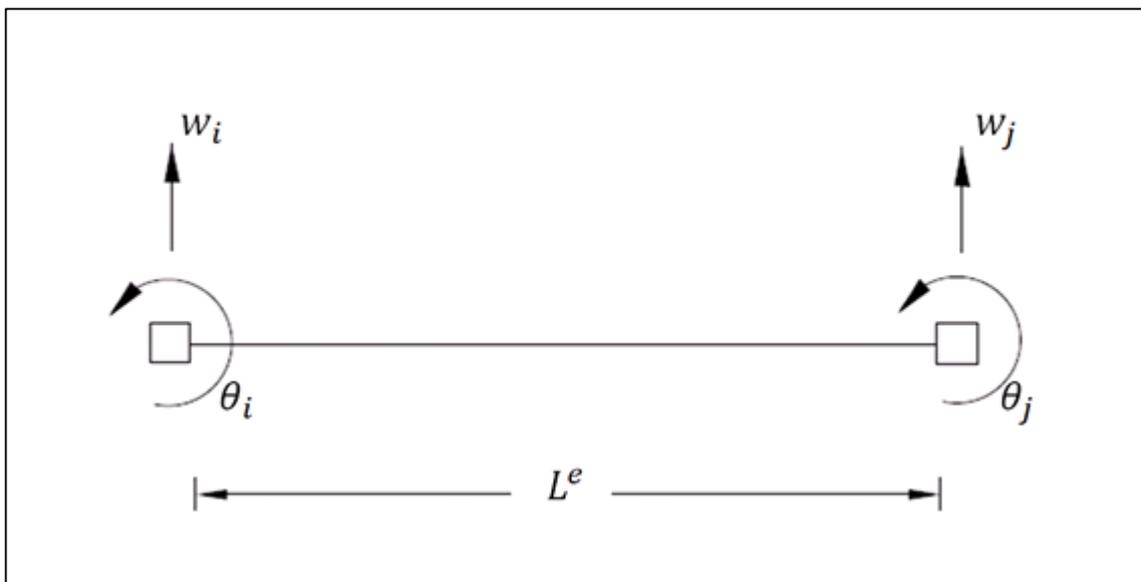


Figura 3.4 - Deslocamentos nodais elementares do elemento de viga Timoshenko

As equações (3.21) e (3.22) são as funções de forma dos nós  $i$  e  $j$  do elemento finito respectivamente. Como se pode verificar, estas funções são expressas através de polinómios de primeiro grau em  $x$ .

$$N_i(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.21)$$

$$N_j(x) = \frac{x}{L} \quad (3.22)$$

Na Figura 3.5 representam-se graficamente a evolução da rotação das secções da viga que surgem no elemento de viga, quando se considera uma aproximação linear entre os nós dos deslocamentos e das rotações com a aplicação de valores unitários aos graus de liberdade que lhe estão associados.

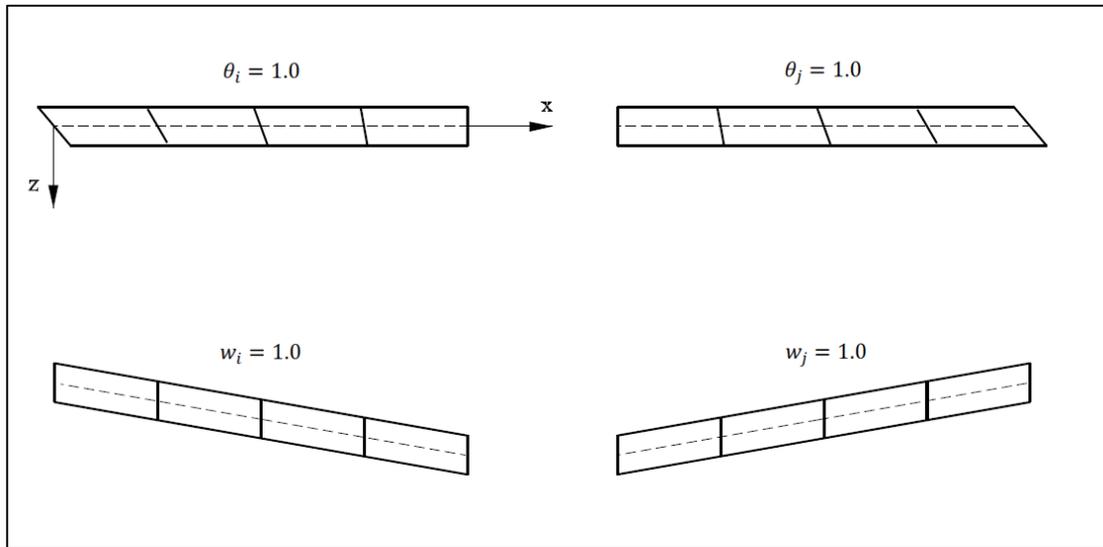


Figura 3.5 - Definição da aproximação dos campos de deslocamentos e das rotações

A matriz das funções de aproximação,  $[N]$ , tem neste caso duas linhas (porque são definidas aproximações independentes para dois campos de deslocamentos) e quatro colunas (porque existem quatro deslocamentos nodais elementares).

$$\begin{Bmatrix} \theta(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Para o elemento de viga de Timoshenko, a matriz das derivadas das funções de forma,  $[B]$ , apresenta-se da seguinte forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} & 0 & 0 \\ N_i(x) & N_j(x) & \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

A matriz  $[B]$  é “desenhada” de maneira a satisfazer as equações de compatibilidade (3.17) e (3.18) como se pode verificar na equação (3.25).

$$\begin{Bmatrix} M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} & 0 & 0 \\ N_i(x) & N_j(x) & \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} = [D][B] \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

De salientar que a matriz de elasticidade,  $[D]$ , agora para além de conter a componente de flexão do elemento de viga, também contém a componente de corte.

A aproximação para os campos de curvatura e deformação por corte também podem ser expressa matricialmente na forma:

$$\begin{Bmatrix} \chi(x) \\ \gamma(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} & 0 & 0 \\ N_i(x) & N_j(x) & \frac{dN_i(x)}{dx} & \frac{dN_j(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

A aplicação da definição (3.10) permite definir a matriz de rigidez elementar para as vigas Timoshenko. Tendo mais uma vez em conta a matriz  $[B]$  e o operador de elasticidade  $[D]$  obtém-se:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{3} & -\frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{6} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ -\frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{6} & \frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{3} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{L} & -\frac{GA_c}{L} \\ -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{L} & \frac{GA_c}{L} \end{bmatrix}^e \quad (3.27)$$

De acordo com a definição (3.12) relembra-se que a matriz rigidez relaciona os deslocamentos nodais (deslocamentos transversos e rotações) com as respectivas forças nodais (esforços e momentos).

$$\begin{Bmatrix} M_i^e \\ M_j^e \\ V_i^e \\ V_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{3} & -\frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{6} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ -\frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{6} & \frac{EI}{L} + L \frac{GA_c}{3} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{L} & -\frac{GA_c}{L} \\ -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{L} & \frac{GA_c}{L} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A aplicação da equação genérica (3.14) proporciona a determinação do vector das forças nodais equivalentes, que deste modo toma a seguinte forma:

$$\{F\}^e = \int_0^{L^e} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i(x) \\ N_j(x) \end{Bmatrix} p(x) dx \quad (3.29)$$

Como se pode verificar, ao contrário do que se sucede no caso dos elementos de viga de Euler-Bernoulli, as cargas distribuídas não afectam os momentos nodais equivalentes. Considerando uma carga uniformemente distribuída obtém-se:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ LP \\ -\frac{L^2}{2} \\ LP \\ -\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Reanalizando a Figura 3.3, no caso de existirem forças e momentos nodais directamente aplicadas à estrutura, o vector elementar  $\{F\}^e$  adquire o seguinte formato:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ LP \\ -\frac{L^2}{2} \\ LP \\ -\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.3. ANÁLISE DA SOLUÇÃO OBTIDA

A geometria e dimensões da discretização usadas para formular um modelo de elemento finito de qualquer estrutura, podem afectar a validade dos resultados obtidos.

É uma característica geral das soluções obtidas com recurso ao MEF verificar-se que estas soluções apresentam valores absolutos mais baixos que os deslocamentos exactos. Isto acontece porque o modelo de elementos finitos é mais rígido que o comportamento real da viga.

Tipicamente, uma mistura de elementos finitos de dimensões mais reduzidas, consegue produzir modelos mais práticos e fiáveis. Deste modo, ao considerar malhas com um número crescente de elementos finitos, está-se a dar um passo para a convergência da solução aproximada nos seus valores exactos.

Os primeiros campos a serem calculados, ao qual vamos denominar de campos principais, dependem da teoria de vigas adoptada, podendo ser somente o campo de deslocamentos transversos (Euler-Bernoulli) ou incluindo também o campo de rotações (Timoshenko). A qualidade da aproximação obtida piora para os campos restantes a serem estudados que envolvem derivadas dos campos principais.

Nesse sentido, a convergência dos campos principais é mais rápida, ou seja, consegue-se obter uma boa solução com um número reduzido de elementos finitos. Pelo contrário, por exemplo, os campos de esforços e momentos flectores requerem um maior cuidado quando se estuda a fiabilidade dos resultados obtidos.

### 3.3.1. Efeito de Shear Locking

O facto de a teoria de vigas de Timoshenko considerar a deformação por corte, permite que este modelo seja mais abrangente que o de Euler-Bernoulli. Isto porque a teoria de Timoshenko é coerente, tanto para os casos em que a relação vão da peça/altura,  $L/h$ , é baixa ou, numa situação limite, para valores do coeficiente  $L/h$  elevados.

#### **Exemplo 1:**

Consideremos agora o seguinte exemplo ilustrado na Figura 3.6. Trata-se de uma viga em consola, submetida a uma força concentrada na extremidade livre.

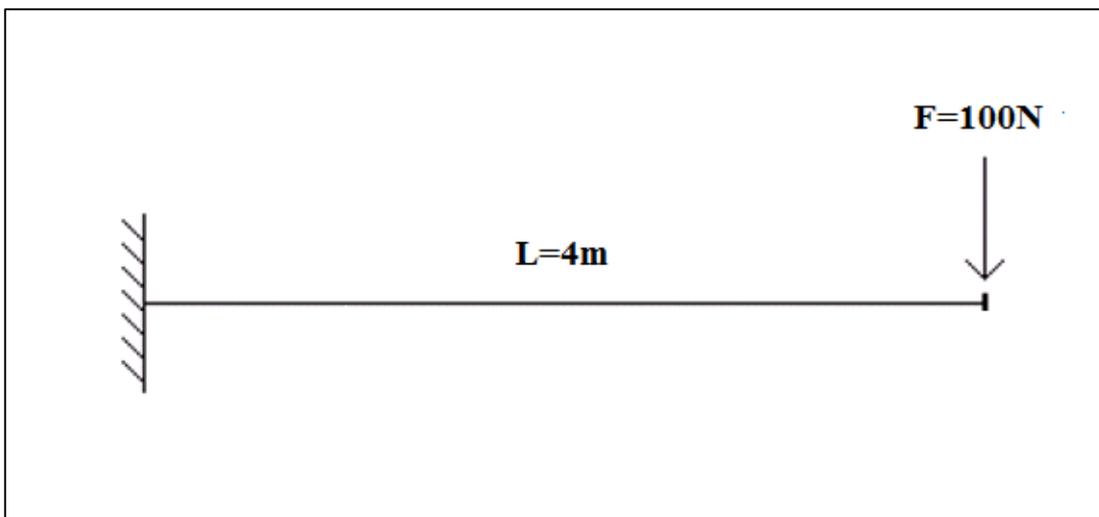


Figura 3.6 – Análise de uma viga contínua – exemplo 1

O problema, quando resolvido analiticamente, apresenta duas soluções para o campo de deslocamentos  $w(x)$ , dependendo da teoria de vigas abordada. Assim quando empregada a teoria de Timoshenko temos:

$$w(x) = \frac{100}{GA_c}x + \frac{400}{2EI}x^2 - \frac{50}{3EI}x^3 \quad (3.32)$$

Já pela teoria de Euler-Bernoulli a expressão dos deslocamentos altera-se para:

$$w(x) = \frac{400}{2EI}x^2 - \frac{50}{3EI}x^3 \quad (3.33)$$

Para valores avultados de  $h$ , a teoria de Timoshenko fornece a resposta mais correcta. Mas à medida que a altura diminui, o efeito da distorção por corte diminui e as duas teorias tendem a fornecer o mesmo valor.

Vamos utilizar os seguintes dados para determinar o campo de deslocamentos:

Cargas aplicadas:

- $F = 100 \text{ N}$

Dimensões da viga:

- $b = 0.3 \text{ m}$
- $h = 1 \text{ m}$
- $L = 4 \text{ m}$

Propriedades

- $E = 210 \text{ GPa}$

Material:  
(Aço com 0.2% de carbono)

- $\nu = 0.3$
- $\sigma_Y = 210 \text{ MPa}$

Assim sendo, para uma viga em aço, pode-se observar as deformadas considerando e desprezando a deformação de corte, através da figura que se segue.

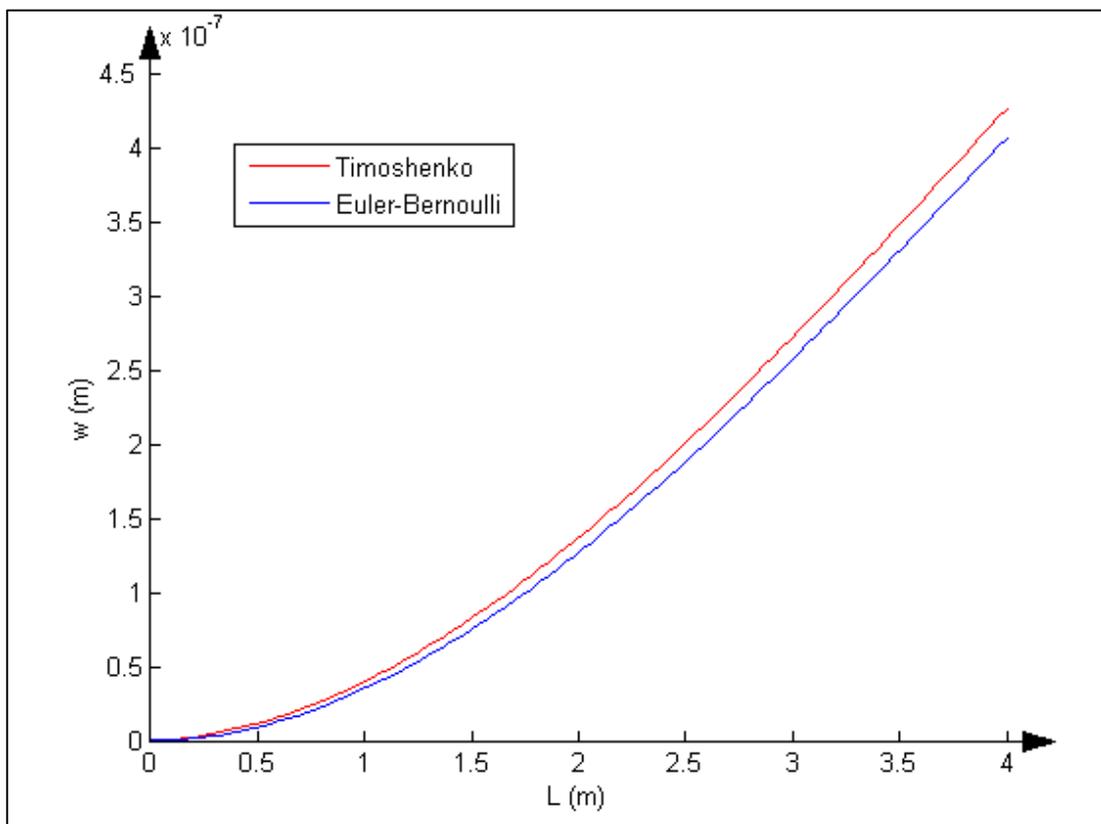


Figura 3.7 – Deformadas da viga contínua segundo o modelo de Timoshenko e o modelo Clássico

Impondo a altura da secção transversal  $h = 1 \text{ m}$ , verifica-se uma pequena discrepância que se faz notar principalmente no ponto de máxima deflexão. Utilizando o método dos elementos finitos para resolver este problema (malha com 80 elementos) e só variando a altura da secção transversal, à medida que esta dimensão fosse diminuindo, seria de esperar que os modelos de elementos finitos convergissem todos

para o modelo de Euler-Bernoulli, no entanto como se verifica pela Figura 3.8 não é isso que acontece.

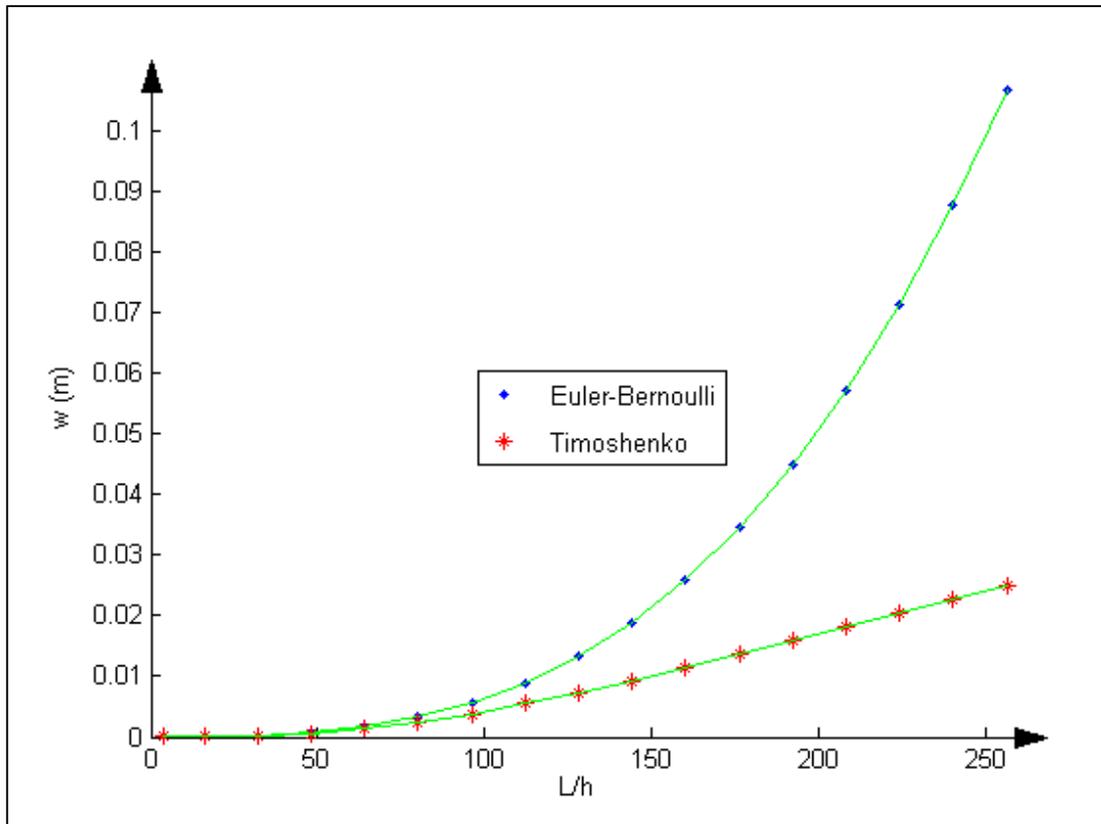


Figura 3.8 – Deflexão na extremidade da consola para diferentes alturas de vigas

A partir de um determinado valor  $L/h$ , para vigas super finas, este modelo começa a dar soluções inferiores das indicadas na teoria Euler-Bernoulli, sendo que os valores do campo de deslocamentos tendem a estagnar (fenómeno de “shear locking” ou fenómeno de “travamento por corte”) mesmo que a malha seja bastante refinada, o que não faz qualquer sentido de um ponto de vista do comportamento físico.

Quando a deformação por corte é desprezável, o próprio modelo tenta impor  $\gamma(x) = 0$ . Isto faz com que a equação (3.34) tenda para o modelo de Euler-Bernoulli que relaciona directamente o campo de rotações com o campo de deslocamentos transversais.

$$0 = \theta(x) + \frac{dw(x)}{dx} \Rightarrow \theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} \quad (3.34)$$

No entanto, como é definida uma aproximação linear independente para os dois campos, o modelo de elementos finitos pode originar uma solução disparatada.

Antes de se mostrar o procedimento para evitar a retenção numérica, convém reter alguns conhecimentos sobre integração numérica, utilizando o método de quadratura de Gauss-Legendre. Segundo este método, de um modo geral, pode-se determinar o integral de uma função genérica  $f(x)$  da seguinte forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.35)$$

Ou em coordenadas Iso paramétricas para assegurar a uniformização de análise dentro do intervalo  $-1 \leq \xi \leq 1$ . A relação de transformação de coordenadas entre este sistema normalizado e o sistema de coordenadas cartesiano utilizado até agora pode ser definida da seguinte forma:

$$\xi = \frac{2}{L^e} (x - x_c) \quad (3.36)$$

O método da quadratura de Gauss permite escrever:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\omega_i, \quad (3.37)$$

Em que  $n$  corresponde à ordem de integração, e  $\omega_i$  é o peso de integração.

Na Tabela 3.1 estão ilustrados os pares de valores coordenada-peso de integração para as duas primeiras quadraturas de Gauss-Legendre, ou seja, as duas primeiras ordens de integração, no espaço normalizado  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

**Tabela 3.1 – Tabela com pontos e pesos de Gauss**

$n$	$\xi_i$	$\omega_i$
1	0	2
2	$\pm 0.577350269$	1

É possível demonstrar que a utilização  $n$  pontos de Gauss permite integrar de forma exacta polinómios de grau  $2n - 1$ .

A parcela de corte da matriz de rigidez elementar é definida pela equação que se segue:

$$[K_c]^e = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{x}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GA_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \quad (3.38)$$

Que pode ser simplificada e reescrita como:

$$[K_c]^e = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{GA_c(x-L)^2}{L^2} & \frac{-GA_c x(x-L)}{L^2} & \frac{-GA_c(x-L)}{L^2} & \frac{GA_c(x-L)}{L^2} \\ \frac{-GA_c x(x-L)}{L^2} & \frac{GA_c x^2}{L^2} & \frac{GA_c x}{L^2} & \frac{-GA_c x}{L^2} \\ \frac{-GA_c(x-L)}{L^2} & \frac{GA_c x}{L^2} & \frac{GA_c}{L^2} & \frac{-GA_c}{L^2} \\ \frac{GA_c(x-L)}{L^2} & \frac{-GA_c x}{L^2} & \frac{-GA_c}{L^2} & \frac{GA_c}{L^2} \end{bmatrix} dx \quad (3.39)$$

Tendo em conta o grau de funções a integrar (existem termos que correspondem a polinómios de segundo grau, segundo  $x$ ) conclui-se que a integração exacta requer a utilização de  $n = \frac{2+1}{2} = 1,5 \rightarrow 2$  pontos de Gauss. No entanto, de forma a evitar o aparecimento de travamento, são utilizados propositadamente procedimentos de integração de ordem inferior à necessária para chegar à integração exacta, isto é, procedimentos de integração reduzida. No caso das vigas de Timoshenko, utiliza-se apenas um ponto de Gauss para a integração da parcela de corte (integração diz-se selectiva porque a parcela de flexão não é alterada). A integração numérica da parcela de corte considerando apenas um ponto de Gauss é dada por:

$$[K_c]^e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 1 - \frac{L/2}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{L/2}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GA_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 1 - \frac{L/2}{L} & \frac{L/2}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} 2 \frac{L}{2} \quad (3.40)$$

Simplificando vem:

$$[K_c]^e = \begin{bmatrix} L \frac{GA_c}{4} & L \frac{GA_c}{4} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ L \frac{GA_c}{4} & L \frac{GA_c}{4} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{L} & -\frac{GA_c}{L} \\ -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{L} & \frac{GA_c}{L} \end{bmatrix}^e \quad (3.41)$$

Neste contexto, a integração reduzida é uma das primeiras técnicas usadas para aumentar a flexibilidade dos elementos finitos, diminuindo o excesso de rigidez que seria obtido numericamente.

Desta forma, somando a parcela de flexão com a parcela de corte obtemos uma matriz rigidez que nos permite a aplicação da teoria de vigas na obtenção de soluções aproximadas, independentemente da dimensão transversal.

$$[K]^e = \begin{bmatrix} L \frac{GA_c}{4} + \frac{EI}{L} & L \frac{GA_c}{4} - \frac{EI}{L} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ L \frac{GA_c}{4} - \frac{EI}{L} & L \frac{GA_c}{4} + \frac{EI}{L} & \frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} \\ \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \\ -\frac{GA_c}{2} & -\frac{GA_c}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{L}{2} \end{bmatrix}^e \quad (3.42)$$

Tendo novamente como termo de comparação a teoria de Euler-Bernoulli, ao utilizar a matriz rigidez corrigida, pode-se deste modo fazer um estudo do rácio dos deslocamentos máximos (deslocamento na extremidade livre da viga encastrada) calculados para os dois modelos abordados.

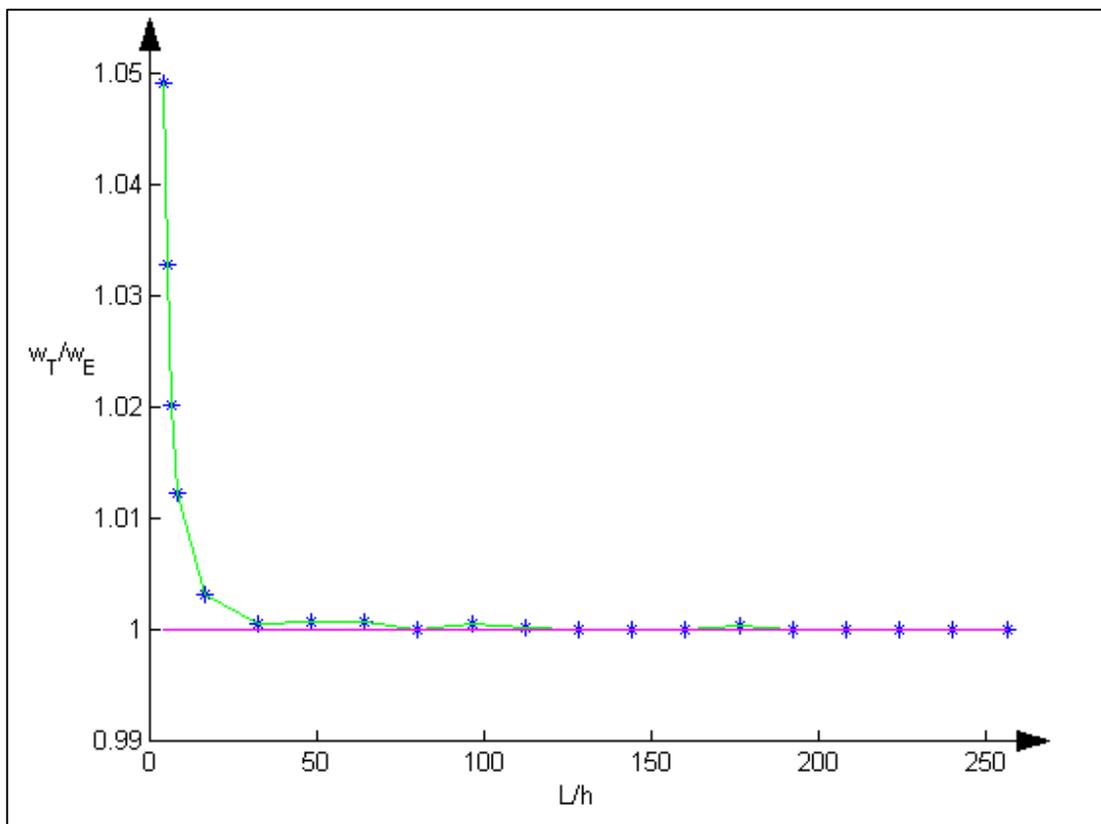


Figura 3.9 – Evolução do rácio da deflexão na extremidade da consola para diferentes modelos de deformação

Para valores de altura elevados comprova-se a importância da distorção da secção transversal no cálculo dos deslocamentos transversos, que se vai perdendo com o aumento da razão  $L/h$ . A malha utilizada é constituída por 80 elementos para garantir a convergência para a solução exacta.



## Capítulo 4. Elementos de Viga de Formulação Mista

Apresenta-se uma formulação alternativa (formulação mista) para solução da flexão de uma viga, seguindo o modelo de deformação de Timoshenko (Moreira, Melo and Rodrigues, 2010). Os problemas referentes ao cálculo dos campos de aproximação são discutidos e comparados com os obtidos em soluções clássicas. Levantam-se as vantagens e desvantagens entre os mesmos.

### 4.1. APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO HÍBRIDA A VIGAS DE TIMOSHENKO

A Figura 4.1 mostra esquematicamente um elemento de viga de Timoshenko onde se registam também as convenções quanto à orientação das variáveis essenciais e naturais. A convenção para as forças e momentos é feita de modo a que  $V$  seja positivo se dirigido para cima e que  $M$  tome valor positivo quando rodar no sentido directo.

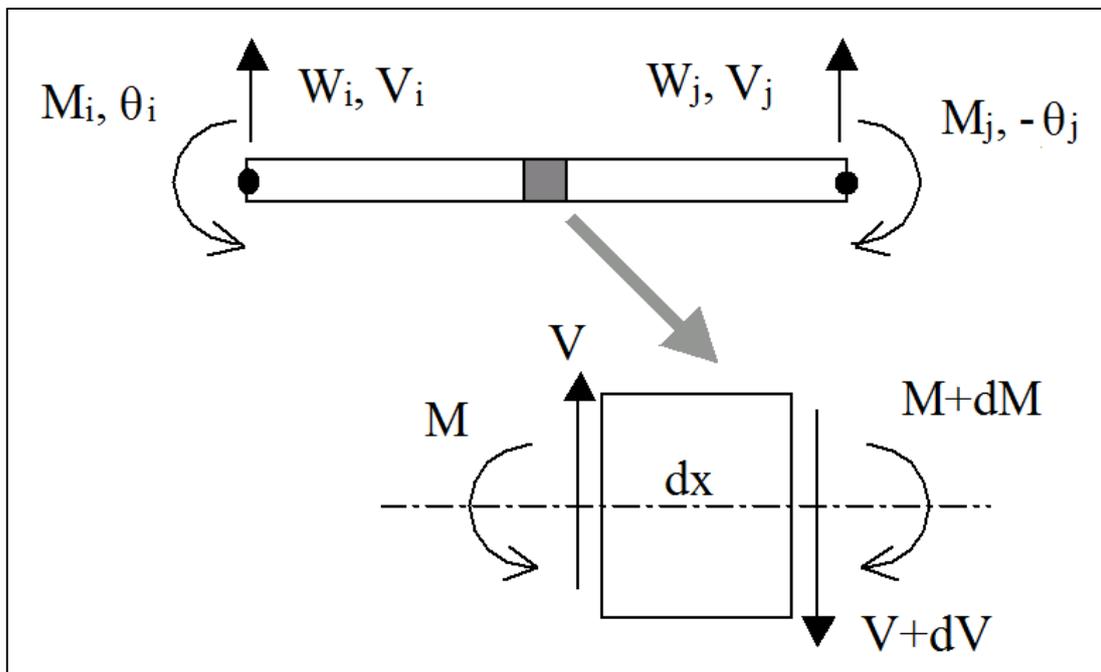


Figura 4.1 - Viga Timoshenko com parametrização nodal híbrida

As relações diferenciais que se apresentam nas definições (2.25) e (2.28) são de aplicação geral no que diz respeito às vigas. Assim sendo, qualquer que seja o modelo de deformação considerado, as equações de equilíbrio para esforços e momentos são naturalmente sempre observadas.

Entretanto as seguintes relações constitutivas serão utilizadas na análise que se seguirá:

$$\begin{cases} M = EI \frac{d\theta}{dx} \\ V = GA_c \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

As equações de compatibilidade para vigas de Timoshenko são exactas se os valores dos momentos flectores  $M$  e dos esforços transversos  $V$  o forem, assim como o campo dos deslocamentos  $w$  e o campo de rotações  $\theta$ . Porém, se na formulação que se pretende analisar, as forças, os momentos, os deslocamentos e as rotações forem aproximados por expressões envolvendo parâmetros nodais e funções de forma ( $\bar{F}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{w}$  e  $\bar{\theta}$ ), as relações resultam num resíduo  $r$  que se traduz nas equações seguintes:

$$\bar{M} - EI \frac{d\bar{\theta}}{dx} \neq 0 \Rightarrow D^{-1}\bar{M} - \frac{d\bar{\theta}}{dx} = r \quad (4.2)$$

$$\bar{V} - GA_c \left( \frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\theta} \right) \neq 0 \Rightarrow S^{-1}\bar{V} - \left( \frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\theta} \right) = r \quad (4.3)$$

Onde  $D^{-1} = \frac{1}{EI}$  e  $S^{-1} = \frac{1}{GA_c}$ .

A busca da solução óptima, minimizando o erro decorrente da aproximação, passa pelo método dos resíduos pesados - Galerkin Finite Element Method) - já familiar em técnicas de elementos finitos (Durán, [s.d.]). Com os modos de deformação expressos em (4.1), dois tipos de energia total de deformação podem ser definidos; respectivamente a que resulta do esforço de flexão,  $U_{flexão}$ , e do efeito de corte transversal  $U_{corte}$ .

As relações (4.2) e (4.3) serão então ponderadas com um momento  $M^T$  e uma força  $V^T$  (ambas arbitrárias) respectivamente. Minimiza-se o resíduo assim obtido integrando as expressões sobre o vão da viga a definir:

$$U_{flexão} = \frac{1}{2} \int_0^L M^T D^{-1} M dx - \int_0^L M^T \frac{d\theta}{dx} dx \quad (4.4)$$

$$U_{corte} = \frac{1}{2} \int_0^L V^T S^{-1} V dx - \int_0^L V^T \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) dx + F_i w_i + F_j w_j + \int_0^L p(x) w dx \quad (4.5)$$

Dentro da expressão referente à deformação de corte pode haver lugar à contribuição do trabalho exterior, provocado por forças nodais concentradas ( $F_i$  e  $F_j$ ) e/ou por uma carga distribuída  $p(x)$ .

O cálculo da energia total armazenada na viga envolve contribuições de deformação por flexão, corte e trabalho externo realizado. Antes de se fazer o somatório das energias é possível uma simplificação, permitindo uma forma final mais conveniente quando se baixa a ordem das equações diferenciais (formulação fraca do problema).

Com efeito, recorrendo ao Teorema de Green, então a energia provocada por flexão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_{flexão} = \frac{1}{2} \int_0^L M^T D^{-1} M dx + \int_0^L \frac{dM^T}{dx} \theta dx + \{M_i \theta_i - M_j \theta_j\} \quad (4.6)$$

Já a energia por corte, substituindo  $V$  pela definição (2.28), aparece:

$$U_{corte} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dM^T}{dx} S^{-1} \frac{dM}{dx} dx + \int_0^L \frac{dM^T}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) dx + F_i w_i + F_j w_j + \int_0^L p(x) w dx \quad (4.7)$$

Somando as duas parcelas chega-se à função da energia total:

$$U_{total} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( M^T D^{-1} M + \frac{dM^T}{dx} S^{-1} \frac{dM}{dx} \right) dx + \int_0^L \frac{dM^T}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \{M_i \theta_i - M_j \theta_j\} + F_i w_i + F_j w_j + \int_0^L p(x) w dx \quad (4.8)$$

A forma da solução para programação é obtida impondo a estacionaridade da energia total, ou seja, prescrevendo  $U_{total}$  a zero a partir de variações arbitrárias nos parâmetros nodais que constituem os graus de liberdade do problema (os momentos nodais e deslocamentos nodais são as incógnitas, já que as rotações nodais são atribuídas aos nós como valor prescrito). Deste modo tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{total}}{\partial M_e} = 0 \\ \frac{\partial U_{total}}{\partial W_e} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Onde  $M_e^T = \{M_i; M_j\}$  e  $W_e^T = \{w_i; w_j\}$ . Efectuando então as referidas derivações parciais, obtém-se a solução, na forma de um sistema matricial, para o equilíbrio estrutural de um elemento de definição híbrida:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{EI} \int_0^L N_i N_i dx + \frac{1}{EI} \int_0^L N_i N_j dx + \frac{1}{GA_c} \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx & \frac{1}{EI} \int_0^L N_i N_j dx + \frac{1}{GA_c} \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \\ \frac{1}{EI} \int_0^L N_j N_i dx + \frac{1}{EI} \int_0^L N_j N_j dx + \frac{1}{GA_c} \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx & \frac{1}{EI} \int_0^L N_j N_j dx + \frac{1}{GA_c} \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \\ \left[ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} \quad \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} \right] & \left[ \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} \quad \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right] \\ \left[ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \quad \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} \right] & \left[ \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} \quad \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ -\theta_j \\ \left\{ \begin{matrix} M_i \\ M_j \\ w_i \\ w_j \end{matrix} \right\} \\ \left[ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ -\theta_j \\ F_j + \int_0^L N_i (p_i N_i + p_j N_j) dx \\ F_j + \int_0^L N_j (p_i N_i + p_j N_j) dx \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Efectuando as integrações e derivadas relativas às funções de forma de primeiro grau (ver equações (3.21) e (3.22)), obtém-se a versão executável:

$$\begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} & \frac{L}{6EI} - \frac{1}{LGA_c} \\ \frac{L}{6EI} - \frac{1}{LGA_c} & \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} \end{array} \right] & \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ -\theta_j \\ F_j + \int_0^L N_i(p_i N_i + p_j N_j) dx \\ F_j + \int_0^L N_j(p_i N_i + p_j N_j) dx \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Depois de se proceder à montagem de um de um conjunto de elementos viga, existe sobreposição que anula as rotações nodais entre dois elementos consecutivos, excepto nos nós de eventuais extremidades da viga simplesmente apoiadas. A partir do sistema global deve-se “simplificar” o problema no seu sistema reduzido de acordo com o tipo de apoio utilizado. Deste modo se a viga é simplesmente apoiada, os momentos nodais e os deslocamentos nodais nos apoios são nulos, logo pode-se anular as linhas e colunas respectivas na equação matricial da formulação mista. O mesmo acontece com os deslocamentos nodais para extremidades encastradas e com os momentos nodais para extremidades livres.

### Exemplo 2:

Para mais fácil compreensão do conteúdo que vem sendo exibido, consideremos agora o problema que se segue:

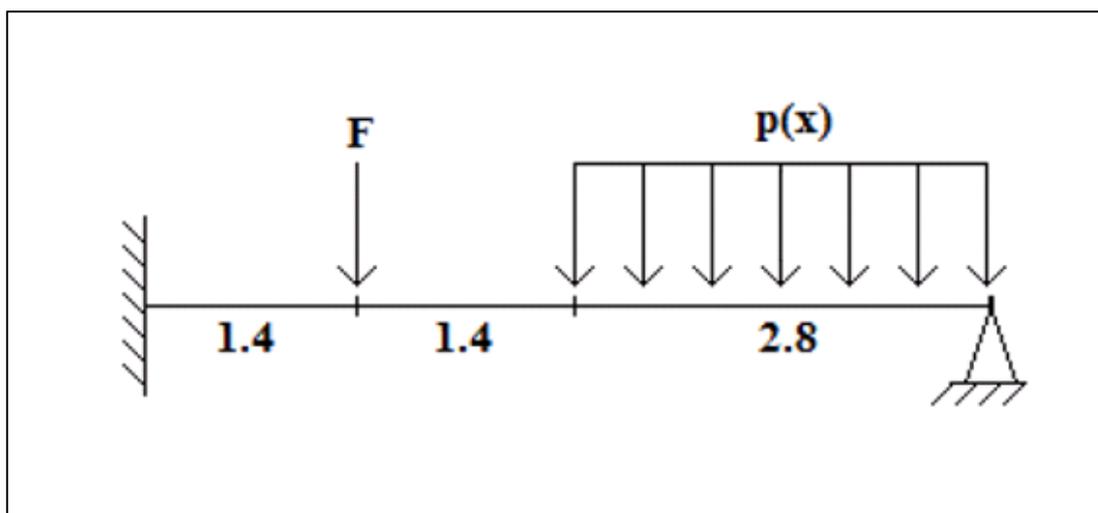


Figura 4.2 – Análise de uma viga contínua – exemplo 2

A Figura 4.2 expõe um problema estático de uma viga que está encastrada na sua posição inicial e com um apoio simples na sua posição final. Esta viga, de secção

rectangular uniforme, é submetida a uma força concentrada  $F$  e a uma carga uniformemente distribuída  $p(x)$  em simultâneo. Apresentam-se sem demora os dados do problema:

- Cargas aplicadas:
- $F = 42 \text{ kN}$
  - $p(x) = 15 \text{ kN/m}$

- Dimensões da viga:
- $b = 0.3 \text{ m}$
  - $h = 1 \text{ m}$
  - $L = 5.6 \text{ m}$

- Propriedades
- $E = 210 \text{ GPa}$
- Material:
- $\nu = 0.3$
- (Aço com 0.2% de carbono)
- $\sigma_Y = 210 \text{ MPa}$

Vamos utilizar primeiramente o método dos elementos finitos como método de resolução do problema em causa. Como a altura da secção é relativamente elevada, é conveniente usar o elemento de viga (de parâmetros híbridos) que considere a deformação por corte da secção plana transversal (Timoshenko).

Com o objectivo de obter soluções aproximadas, no menor esforço computacional possível, optou-se por, no processo de discretização, dividir o domínio em 3 elementos finitos com as seguintes dimensões:

$$L^{(1)} = L^{(2)} = 1.4 \text{ m} \quad (4.12)$$

$$L^{(3)} = 2.8 \text{ m} \quad (4.13)$$

Este é o número mínimo de elementos finitos exequível, com os quatro nós a ficarem estrategicamente posicionados no local dos apoios (nó  $A$  e  $D$ ), da carga concentrada (nó  $B$ ) e no início e final da carga distribuída (nó  $C$  e  $D$ ) como ilustra a Figura 4.3.

Como já referido anteriormente, a abordagem do cálculo do MEF passa por resolver um dado problema complexo através da resolução de vários problemas mais simples. O primeiro passo consiste em calcular as matrizes elementares de rigidez definidas pela equação (4.11), respectivas aos 3 diferentes elementos.

Tratando-se de uma viga uniforme e homogénea, tanto as dimensões da área da secção transversal corrigida  $A_c$ , quanto os valores do momento de inércia  $I$ , módulo de elasticidade  $E$  e módulo de corte  $G$  não variam, sendo que:

$$I = \frac{bh^3}{12} = 0.025 \text{ m}^4 \quad (4.14)$$

$$A_c = \frac{5}{6}bh = 0.25 \text{ m}^2 \quad (4.15)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 80.769 \text{ GPa} \quad (4.16)$$

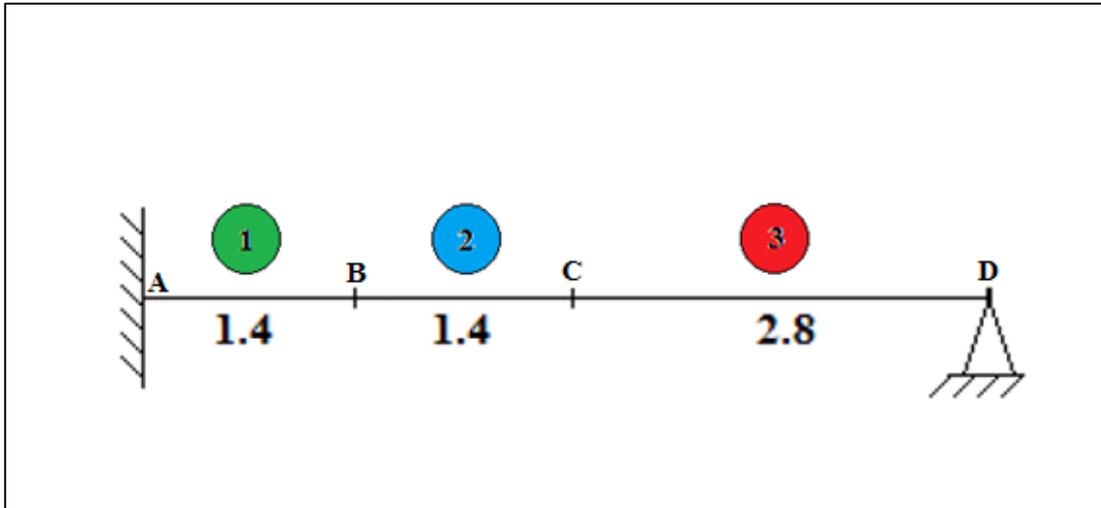


Figura 4.3 – Discretização do problema estático

Desta forma pode-se concluir que  $k^{(1)} = k^{(2)}$ , em contraste com a matriz elemental de rigidez  $k^{(3)}$ , uma vez que a dimensão do elemento 3 é maior que as dimensões dos elementos 1 e 2.

O passo seguinte passa por agrupar os 3 elementos que formam ou conduzem a um sistema do problema global, como se pode observar pela equação (4.17).

Cada elemento tem associado uma cor diferente para mais fácil compreensão. Uma qualquer parcela da matriz rigidez global pode conter uma parcela de uma ou mais matrizes de rigidez elementares (à excepção das parcelas nulas).

$$\begin{Bmatrix} \theta_i^{(1)} \\ -\theta_j^{(1)} + \theta_i^{(2)} \\ -\theta_j^{(2)} + \theta_i^{(3)} \\ \theta_j^{(3)} \\ V_i^{(1)} \\ V_j^{(1)} + V_i^{(2)} \\ V_j^{(2)} + V_i^{(3)} \\ V_j^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1) & (1) & 0 & 0 & (1) & (1) & 0 & 0 \\ (1) & (1) + (2) & (2) & 0 & (1) & (1) + (2) & (2) & 0 \\ 0 & (2) & (2) + (3) & (3) & 0 & (2) & (2) + (3) & (3) \\ 0 & 0 & (3) & (3) & 0 & 0 & (3) & (3) \\ (1) & (1) & 0 & 0 & (1) & (1) & 0 & 0 \\ (1) & (1) + (2) & (2) & 0 & (1) & (1) + (2) & (2) & 0 \\ 0 & (2) & (2) + (3) & (3) & 0 & (2) & (2) + (3) & (3) \\ 0 & 0 & (3) & (3) & 0 & 0 & (3) & (3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \\ M_c \\ M_d \\ w_a \\ w_b \\ w_c \\ w_d \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Para obtenção dos valores das incógnitas apresentadas (momentos nodais e deslocamentos nodais) temos de proceder primeiro à passagem do sistema global para o sistema reduzido. Deste modo e tendo em conta que, devido aos apoios impostos,  $M_d, w_a$

e  $w_d$  serem nulos, então as linhas e colunas respectivas a esses graus de liberdade podem ser eliminadas. O sistema reduzido fica então neste formato:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ \int_0^{L(2)} N_j^{(2)} p(N_i^{(2)} + N_j^{(2)}) dx + \\ \int_0^{L(3)} N_i^{(3)} p(N_i^{(3)} + N_j^{(3)}) dx \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{12} & K_{24} + K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{23} & K_{24} + K_{13} \\ K_{41} & K_{42} + K_{31} & K_{32} & K_{44} + K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{41} & K_{42} + K_{31} & K_{43} & K_{44} + K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_a \\ M_b \\ M_c \\ w_b \\ w_c \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Como se pode verificar, as três primeiras parcelas, do vector que se encontra mais à esquerda do sistema matricial, são iguais a zero. A primeira parcela é nula devido à imposição da condição fronteira resultante do encastramento. Os outros dois zeros resultam dos valores de rotação nodais entre elementos adjacentes se anularem. Já nas últimas três parcelas do vector, vêm englobadas tanto as componentes da carga concentrada nodal, como da carga distribuída (últimas duas parcelas).

Posteriormente à resolução do sistema matricial reduzido é possível obter directamente os campos contínuos dos deslocamentos (Figura 4.4) e dos momentos flectores (Figura 4.5) através de interpolações lineares.

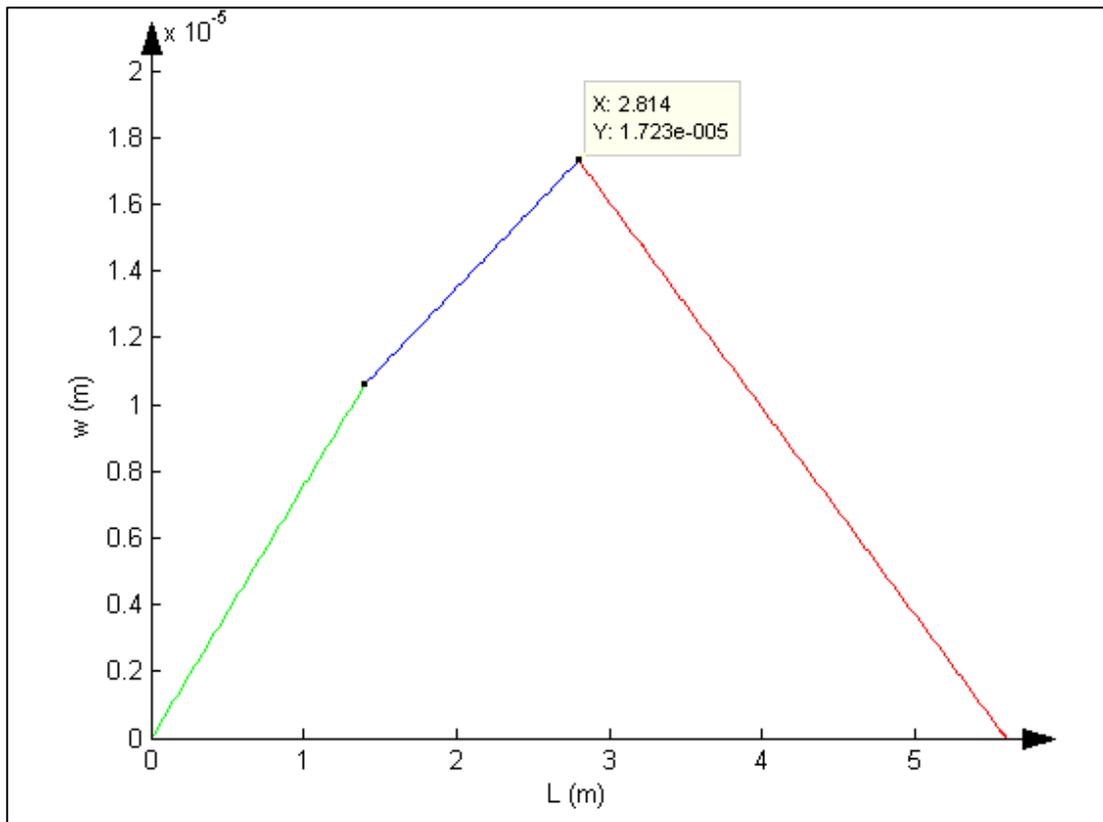


Figura 4.4 – Campo aproximado de deslocamentos transversos – 3 elementos viga

Uma importante vantagem que surge da formulação mista refere-se ao facto de se poder fazer a aproximação do campo dos momentos através de funções de forma de primeiro grau. Por exemplo, na solução dita irredutível (deslocamentos assumidos), seguindo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, é necessário dispor de polinómios de terceiro grau para assegurar que as derivadas do campo de deslocamento não sejam nulas. Tal não se passa na formulação mista, uma vez que os momentos aparecem directamente na formulação do elemento como incógnitas a calcular.

Desta forma, também se baixa o esforço computacional uma vez que as funções de interpolação passam a ser lineares.

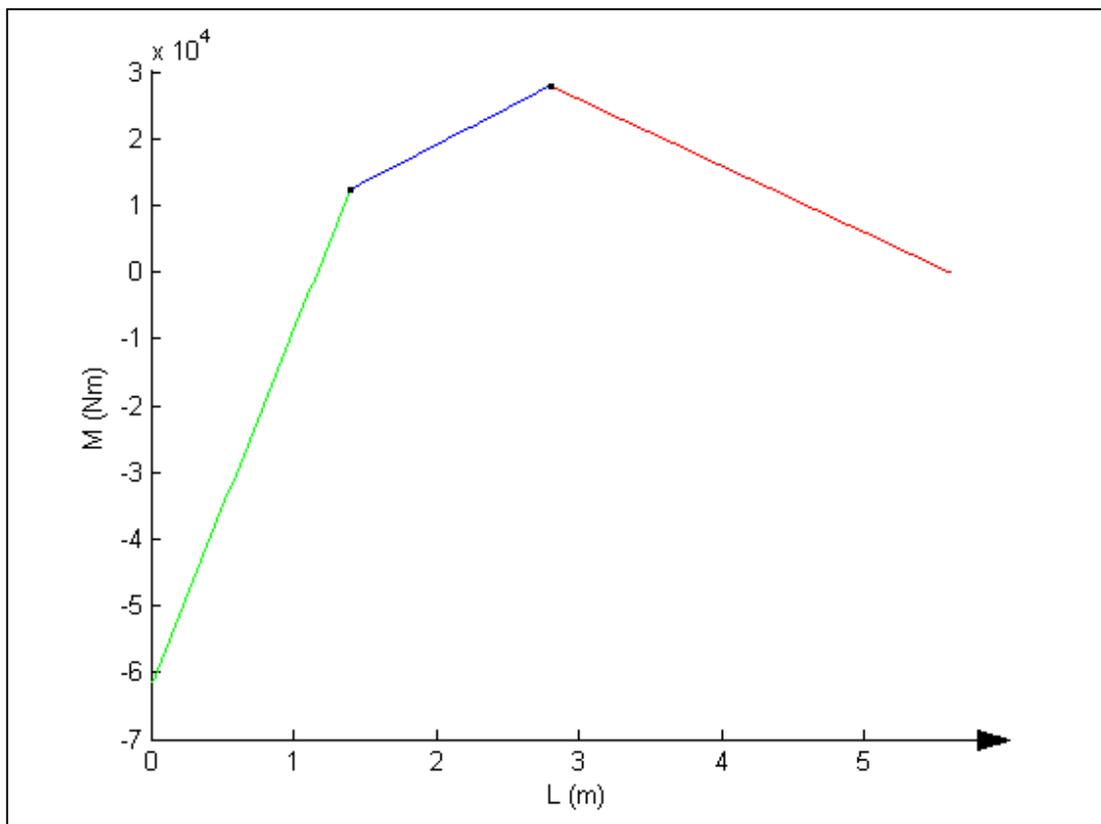


Figura 4.5 – Campo aproximado dos momentos de flexão – 3 elementos viga

Os campos de rotação (Figura 4.6) e de esforços transversos (Figura 4.7) também podem ser estimados. Sendo estes campos obtidos através das derivadas dos campos dos deslocamentos e momentos respectivamente, podemos prever desde já que os campos vão apresentar um formato do tipo escada uma vez que se está a derivar funções de forma de primeira ordem.

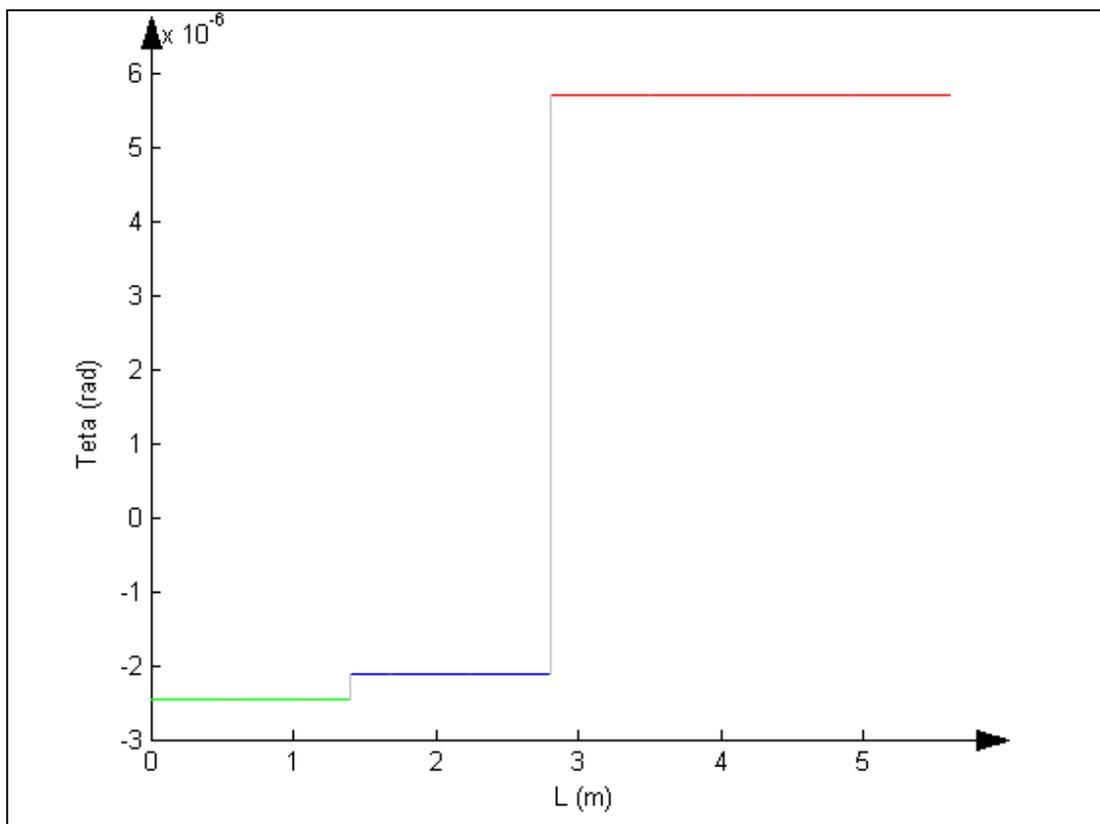


Figura 4.6 – Campo aproximado de rotações – 3 elementos viga

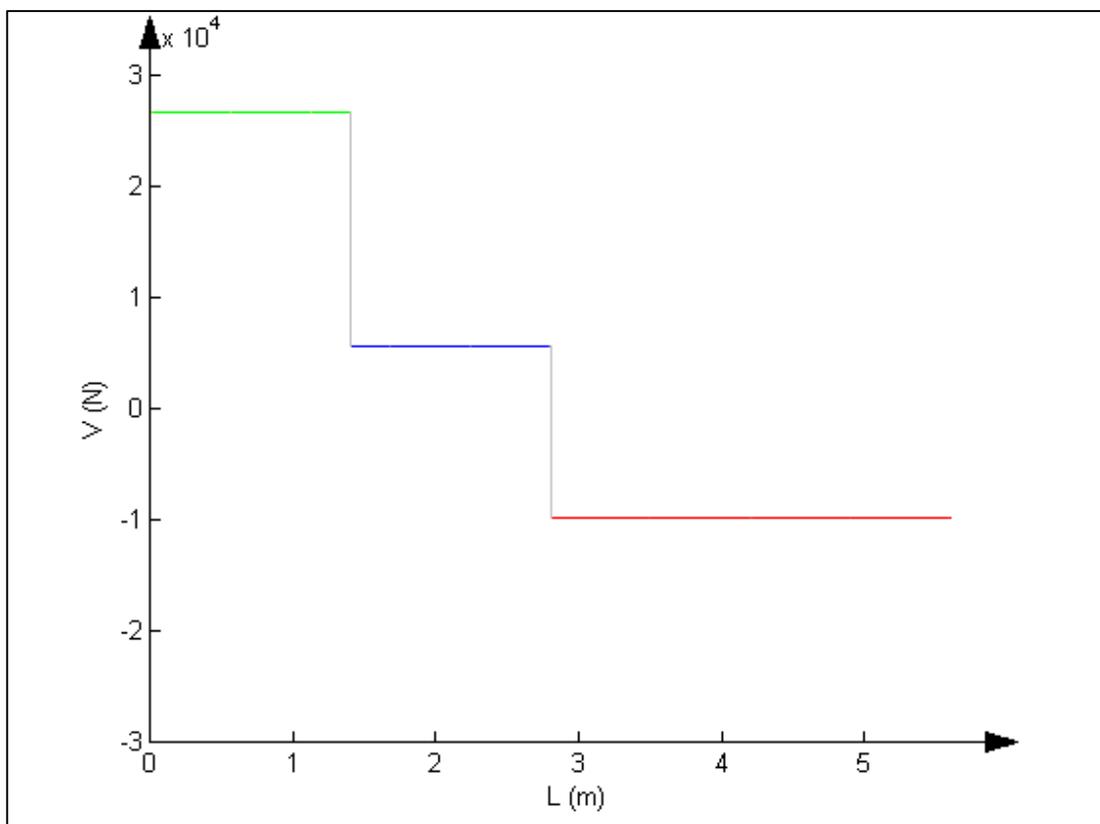


Figura 4.7 – Campo aproximado de esforços transversos – 3 elementos viga

## 4.2. FORMULAÇÃO HÍBRIDA Vs. FORMULAÇÃO CLÁSSICA

### 4.2.1. Solução Analítica Vs. Solução Aproximada -MEF

Fazendo foco no campo dos deslocamentos apresentado na Figura 4.4, observa-se que o ponto de deslocamento máximo da estrutura se encontra a meio da viga, na posição correspondente ao nó  $C$  ( $x = 2.8m$ ), com um valor de  $w = 1.723 * 10^{-5} m$ . No entanto, visto que estamos a trabalhar com um método aproximado e tendo em conta que malha é pouco refinada, a importância de fazer uma análise à credibilidade das soluções obtidas tem um significado crucial.

Uma maneira de verificar se as soluções obtidas são de confiança consiste em considerar o mesmo problema, mas agora visto do ponto de vista analítico.

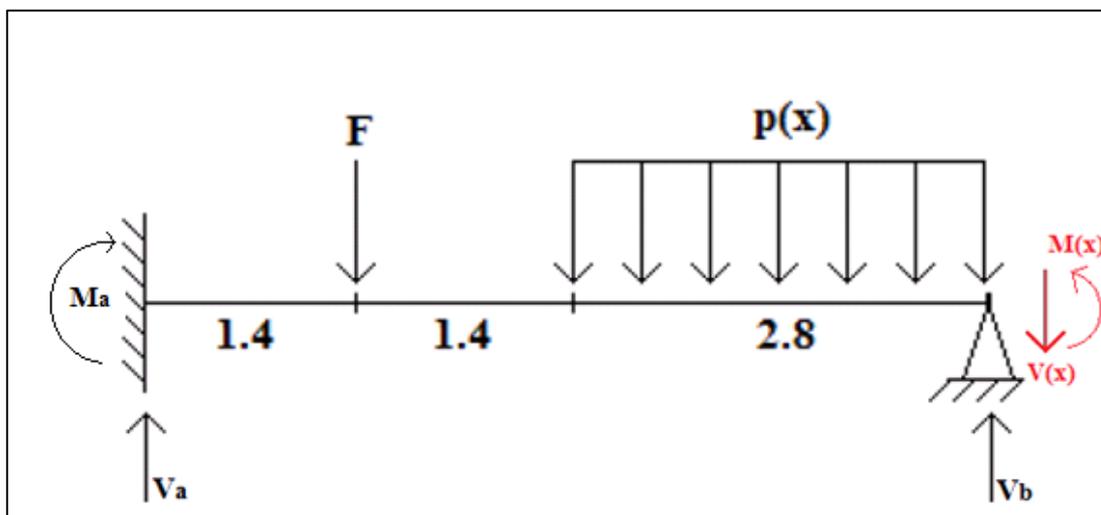


Figura 4.8 – Análise analítica – exemplo 2

A deformada da viga, quando submetida a algum tipo de carga, pode ser descrita através de uma única função  $w = f(x)$ . Neste caso vamos calcular a deformada da viga exposta na Figura 4.8, através da integração directa de funções singulares que caracterizam os vários campos a serem analisados. A utilização de equações singulares permite-nos chegar às soluções exactas do problema em todo o domínio da viga de uma só vez.

Tratando-se de um problema estático pode-se afirmar que tanto a resultante dos esforços transversos como a resultante dos momentos flectores é nula.

$$\sum V = 0 \quad (4.19)$$

$$\sum M = 0 \quad (4.20)$$

A partir das definições anteriores consegue-se chegar às funções que caracterizam os campos de esforços e momentos em função do vão da viga. As equações (4.21) e (4.22) traduzem-se em termos gráficos, na Figura 4.9 e Figura 4.10 respectivamente.

$$V(x) = V_a - F(x - 1.4)^0 - p(x - 2.8)^1 \quad (4.21)$$

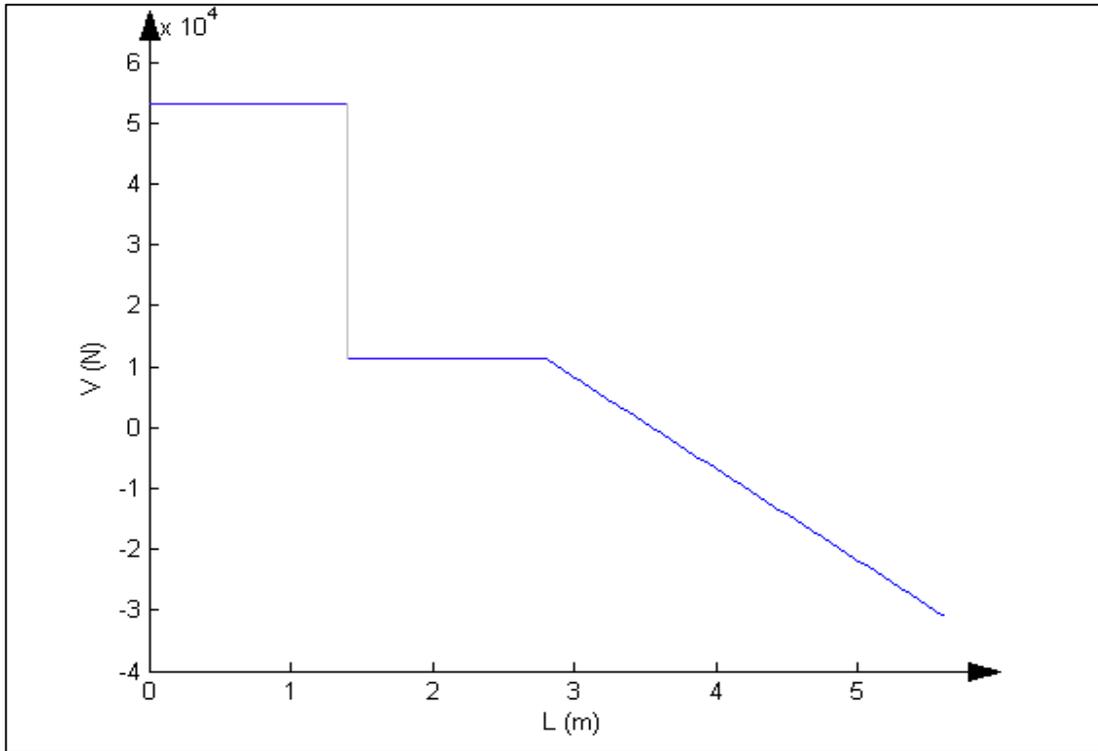


Figura 4.9 – Campo exacto de esforços transversos

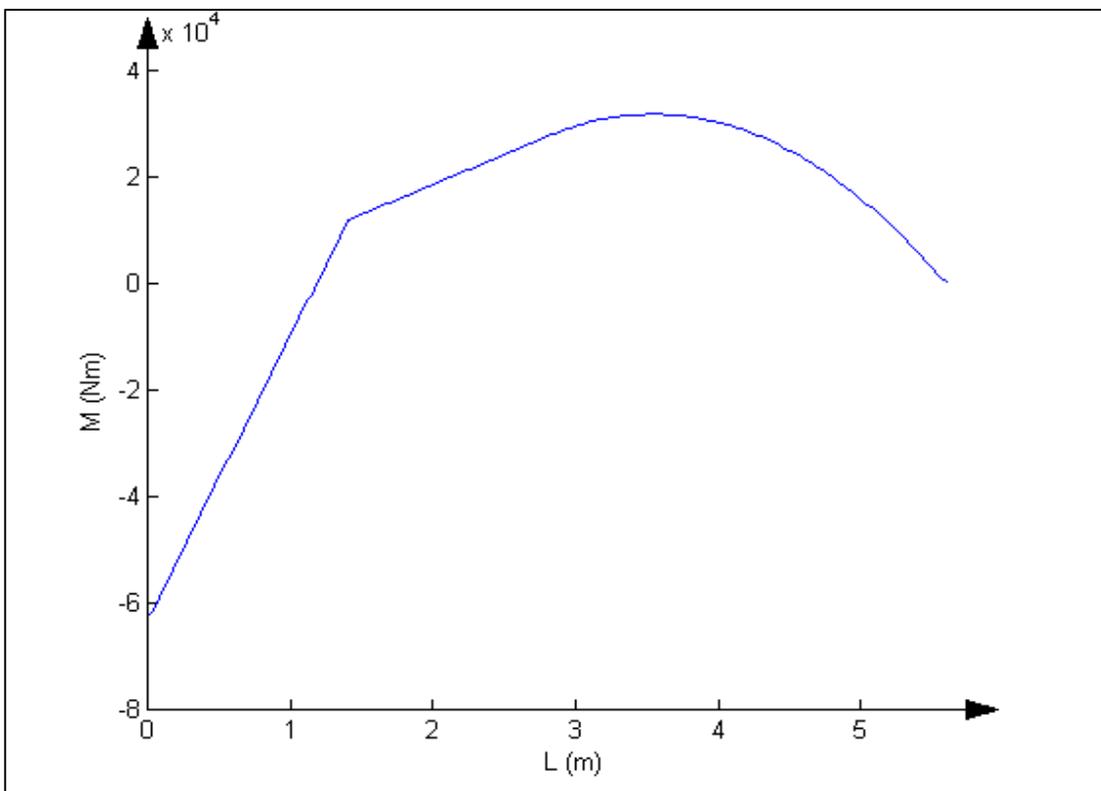


Figura 4.10 – Campo exacto dos momentos de flexão

$$M(x) = V_a x - F(x - 1.4)^1 - \frac{p}{2}(x - 2.8)^2 + M_a \quad (4.22)$$

$$\chi(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (4.23)$$

Partindo da definição da curvatura da equação (4.23), e já sabendo a expressão que define o diagrama de momentos deste problema, podemos fazer a integração de  $\chi(x)$  para obter a função singular respectiva às rotações da secção transversal plana.

$$\theta(x) = \frac{\frac{V_a}{2} x^2 - \frac{F}{2}(x - 1.4)^2 - \frac{p}{6}(x - 2.8)^3 + M_a x + C1}{EI} \quad (4.24)$$

Seguindo esta função singular, então o campo das rotações apresenta o subseqüente formato:

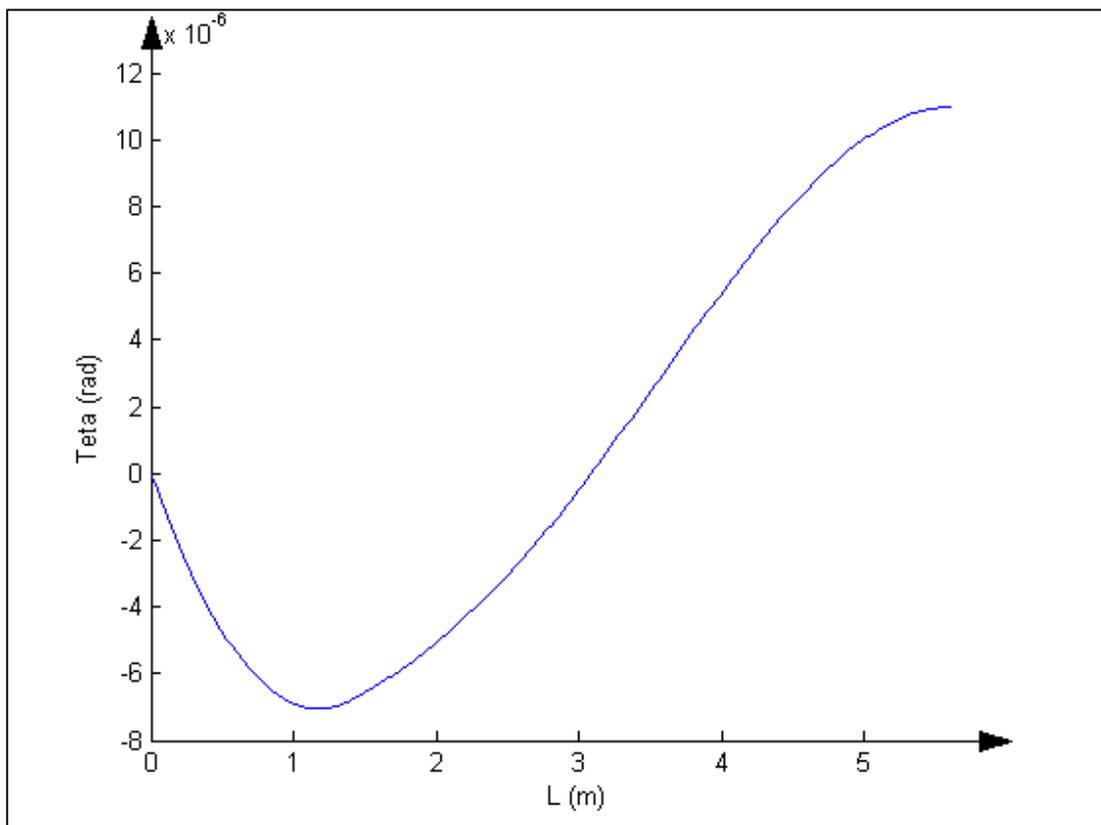


Figura 4.11 – Campo exacto das rotações

Visto que, segundo a Teoria de Timoshenko, se verifica a presença de distorção  $\gamma(x)$  das secções planas transversais, o campo de rotações não se pode relacionar directamente com o campo de deslocamentos. Para o cálculo de  $w(x)$ , precisaremos do

resultado da integração do campo de rotações bem como do campo de esforços transversos.

Para o cálculo do campo  $w(x)$  precisaremos então do diagrama dos momentos, bem como do resultado da integração do campo de rotações.

$$w(x) = \int \gamma(x) - \theta(x) dx = \int \frac{V(x)}{GA_c} - \theta(x) dx = \frac{M(x)}{GA_c} - \int \theta(x) dx \quad (4.25)$$

A equação (4.26) corresponde à função singular para os deslocamentos. De salientar a presença de duas constantes  $C1$  e  $C2$ , ainda por calcular, bem como dos valores  $V_a$  e  $M_a$  que representam as reacções aos esforços impostos na viga.

$$w(x) = \frac{M(x)}{GA_c} - \frac{\frac{V_a}{6} x^3 - \frac{F}{6} \langle x - 1.4 \rangle^3 - \frac{p}{24} \langle x - 2.8 \rangle^4 + \frac{M_a}{2} x^2 + C1x + C2}{EI} \quad (4.26)$$

Por intermédio da aplicação das condições fronteira do problema, é possível calcular essas 4 constantes, como descrito nas equações (4.27) e (4.28).

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(0) = 0 \Rightarrow C1 = 0 \\ w(0) = 0 \Rightarrow C2 = \frac{2(1+\nu)I}{A_c} M_a \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(5.6) = 0 \\ M(5.6) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_a = \frac{85501500}{1607} N \\ M_a = -\frac{100842000}{1607} Nm \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Após o cálculo das constantes, chegamos finalmente à solução absoluta dos deslocamentos transversos, como mostra a Figura 4.12.

Após a análise do gráfico da deformada, as primeiras observações que se podem fazer, quando em comparação com a solução resultante do método dos elementos finitos (formulação mista), indicam que tanto o deslocamento máximo exacto é maior do que valor obtido pelo método aproximado, como a posição do ponto de maior deslocamento não é a mesma.

A posição para o ponto máximo da função (4.26) encontra-se ao derivar a função singular relativa aos deslocamentos transversos e igualando-a a zero:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{V(x)}{GA_c} - \theta(x) = 0 \Rightarrow x = 3.14036 m \quad (4.29)$$

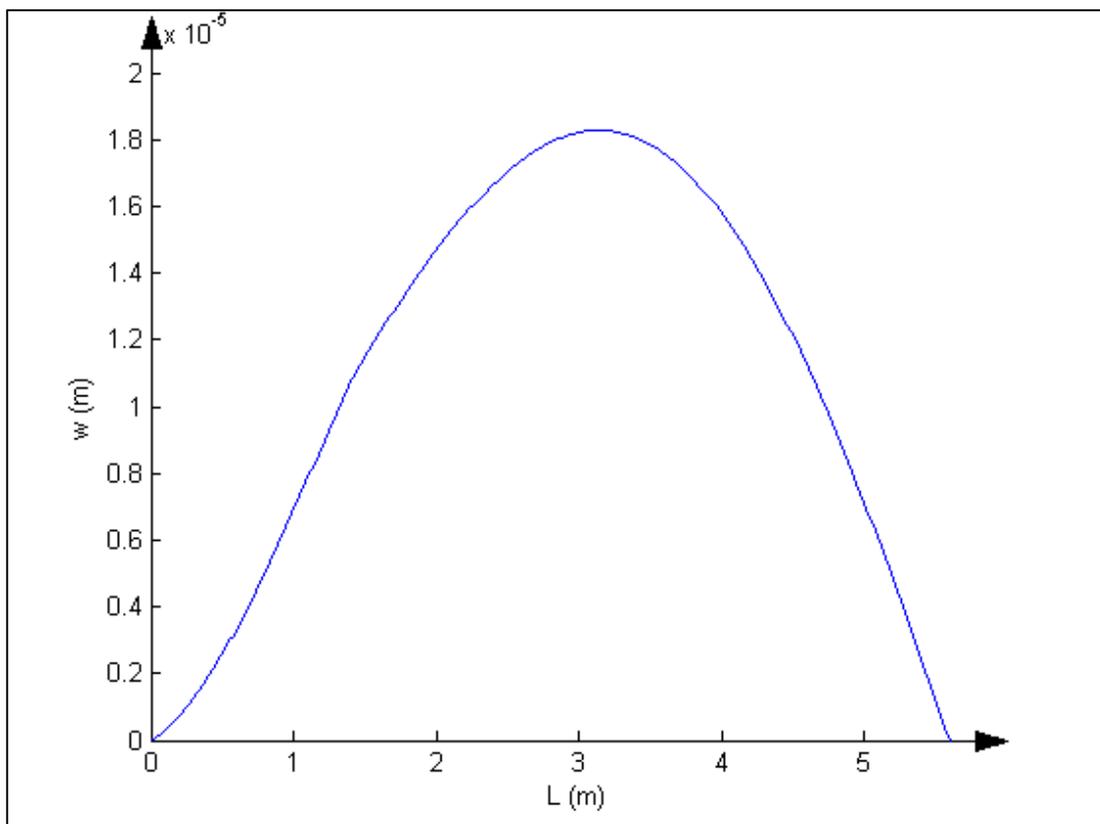


Figura 4.12 – Campo exacto dos deslocamentos

Logo à partida, retira-se a conclusão de que o deslocamento máximo se encontra numa posição que não coincide com o ponto médio da viga, pressuposto inicialmente.

Este fenómeno é explicado pela inclusão de apoios nas extremidades da viga que são distintos.

Tendo em conta que o apoio simples é um apoio com menos restrições (não admite deslocamentos mas admite rotações) que um apoio fixo (não admite deslocamentos nem rotações), a deflexão máxima será mais perto do extremidade simplesmente apoiada.

$$w_{max} = w(x = 3.14036) = 1.827 * 10^{-5} m \quad (4.30)$$

Se calcularmos o deslocamento para a posição obtida em (4.29), verificamos que a deflexão máxima exacta é maior que os  $1.732 * 10^{-5} m$ , obtidos pelo método dos elementos finitos (3 elementos).

Também, por via da baixa ordem das funções de forma utilizadas, conclui-se que com poucos elementos, as interpolações entre valores nodais geralmente não chegam nem de perto à forma original dos campos respectivos.

A convergência para a solução exacta é ainda mais crítica para os campos de rotação e esforços uma vez que estes resultam das derivadas de outros campos já por si aproximados (propagação do erro). Uma forma de contornar este problema seria usar funções de forma de ordem mais elevada como acontece na formulação clássica de elementos de viga Euler-Bernoulli.

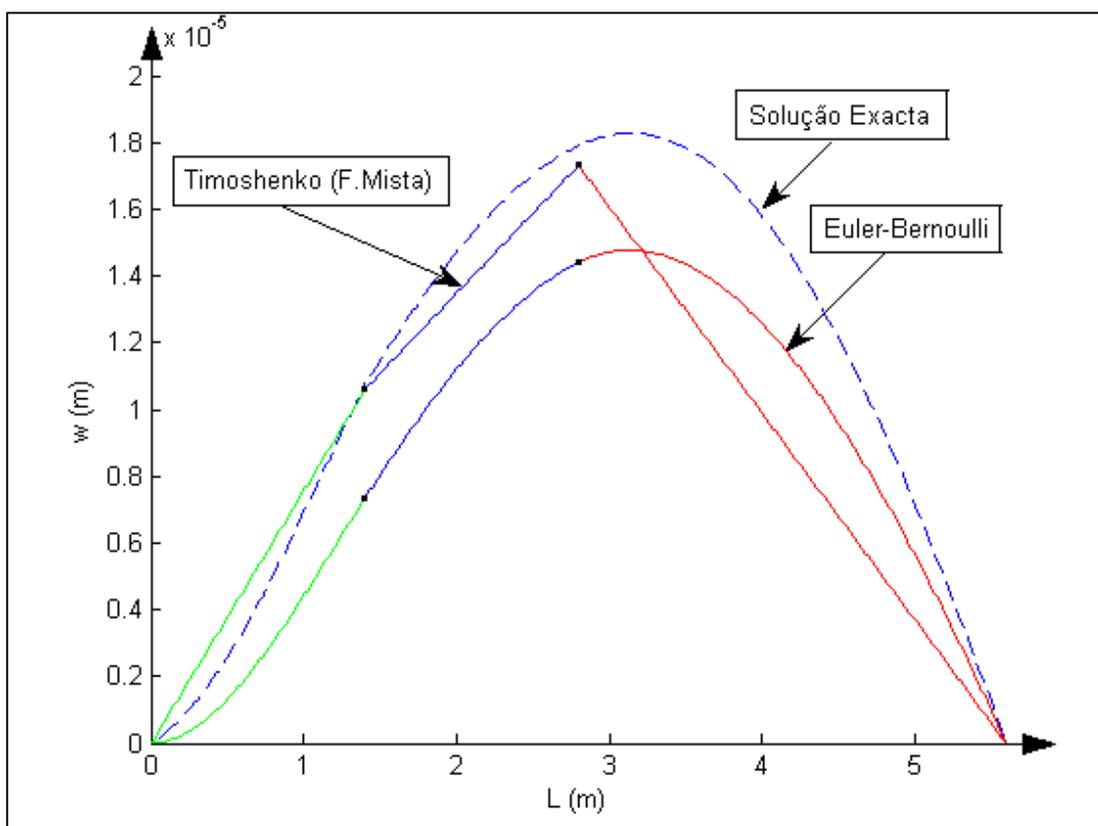


Figura 4.13 – Comparação da solução exacta com as soluções aproximadas através dos 2 modelos de deformação em estudo

A Figura 4.13 compara o campo de deslocamentos calculados por três vias distintas.

Como se pode observar, através do modelo clássico de Euler-Bernoulli é possível obter a deformada muito semelhante à da solução exacta (do ponto de vista geométrico), mesmo com uma malha pouco refinada. No entanto, visto que a deformação por corte afecta a solução deste problema em concreto, os valores de deslocamento sairão mais “curtos” que os reais, já para não falar que o esforço computacional aumenta de uma forma relativamente considerável.

No que diz respeito à formulação mista - teoria de Timoshenko - prova-se que a convergência das deflexões nodais para os valores exactos dá-se muito mais facilmente, mas as funções de forma de primeiro grau não nos dão, do ponto de vista geométrica, uma aproximação muito credível dos valores do campo de deslocamentos entre nós adjacentes, especialmente se estivermos a trabalhar com poucos elementos.

Neste caso, por forma a atingir resultados correctos, a melhor opção consiste em refinar a malha utilizando o modelo de Timoshenko.

Quando se acrescenta um maior número de elementos, o principal problema reside na obtenção da solução final que em termos computacionais fica muito pesada. E neste aspecto a formulação mista, através de parâmetros mistos, traz algumas vantagens em relação à forma clássica, uma vez que se consegue reduzir o número de variáveis a estudar com a condensação dos momentos, que mais não é que eliminar os graus de liberdade respectivos.

Analisemos novamente o sistema matricial global de parâmetros híbridos definido em (4.17). Este pode ser reescrito por um conjunto de submatrizes como mostra a equação seguinte:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Posteriormente ao cálculo do sistema reduzido, então os graus de liberdade referentes aos momentos nodais desse sistema podem ser condensados, simplificando a matriz rigidez e diminuindo o esforço computacional, uma vez que as nossas incógnitas passam a ser somente relativas aos valores nodais dos deslocamentos transversais.

O sistema matricial pode ser dividido em duas equações distintas em ordem às rotações nodais e aos esforços transversos nodais:

$$[A]\{M\} + [B]\{w\} = \{\theta\} \quad (4.32)$$

$$[B]^T\{M\} + [0]\{w\} = \{V\} \quad (4.33)$$

Onde as submatrizes, fazendo mais uma vez a abordagem do problema anterior para 3 elementos, ficam na forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} + K_{11} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} K_{14} & 0 \\ K_{24} + K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} + K_{13} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\{V\} = \left\{ \int_0^{L^{(2)}} N_j^{(2)} p(N_i^{(2)} + N_j^{(2)}) dx + \int_0^{L^{(3)}} N_i^{(3)} p(N_i^{(3)} + N_j^{(3)}) dx \right\} \quad (4.37)$$

Frisando novamente que os cálculos das submatrizes são feitos segundo o sistema reduzido, o vector das rotações nodais passa a ser um vector de zeros, visto que sobram os valores de rotação nodais entre elementos adjacentes se anulam:

$$[A]\{M\} + [B]\{w\} = [0] \Rightarrow \{M\} = -[A]^{-1}[B]\{w\} \quad (4.38)$$

A condensação dos momentos dá-se quando a equação (4.38) é introduzida na definição (4.33). Ao intercalar as duas equações, este processo resulta na forma

compacta da formulação mista. A condensação dos momentos nodais só é possível uma vez que a submatriz  $[A]$  admite sempre matriz inversa.

$$-[B]^T[A]^{-1}[B]\{w\} = \{V\} \quad (4.39)$$

Através de um programa elaborado em código MATLAB, procedeu-se à resolução do problema em questão (Ferreira, 2008). A abordagem ao problema foi realizada através da discretização correspondente a 1000 elementos de viga, formulados com dois modelos de deformação: Euler-Bernoulli (formulação clássica) e Timoshenko (a utilização da teoria de vigas Timoshenko foi feita segundo a formulação clássica e formulação mista).

A aplicação de uma malha tão refinada serve para garantir a convergência da solução mas acima de tudo para calcular os tempos de processamento de cada código, o que nos dá uma indicação do esforço computacional correspondente à utilização de diferentes tipos formulações em causa.

Em termos de deformada o resultado foi o esperado (ver Figura 4.14).

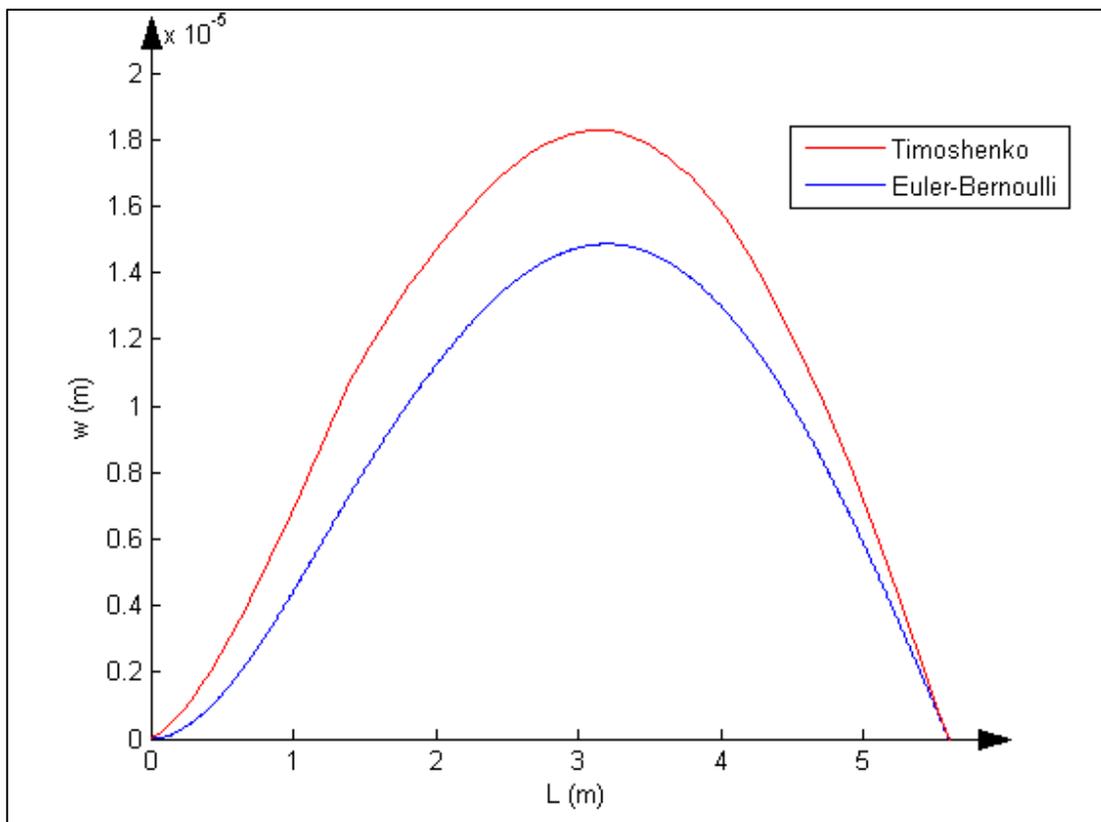


Figura 4.14 – Solução aproximada dos deslocamentos segundo Timoshenko e Euler-Bernoulli – 1000 elementos viga

Era previsível a divergência de resultados entre os dois modelos de deformação. No entanto, apesar das deformadas obtidas serem iguais dentro do modelo de Timoshenko, já no que diz respeito ao tempo de processamento do código verificam-se algumas distinções.

Tabela 4.1 – Tempos de processamento para os diferentes métodos de resolução

Timoshenko		Euler-Bernoulli
F. Mista (forma compacta)	Formulação Clássica	Formulação Clássica
68 Segundos	81 Segundos	137 Segundos

O tempo médio calculado através dos comandos do MATLAB “tic” e “toc” permitiu tirar algumas conclusões. De facto ao usar o modelo de Euler-Bernoulli e acrescentando aos resultados menos correctos, no que diz respeito do campo de deslocamentos, também o esforço computacional é prejudicado em virtude das funções de interpolação serem de terceira ordem. Na formulação mista a condensação dos momentos permite obter os mesmos resultados, em relação ao elemento de viga clássico de Timoshenko, mas com uma duração menor de processamento do código.

#### 4.2.2. Campos de tensão – Formulação Mista

Todo o corpo solicitado pela resultante de um conjunto de forças deforma-se, gerando tensões internas. As tensões operam em dois regimes distintos: no regime elástico e no regime plástico, sendo o primeiro, aquele que nos interessa estudar. É portanto do nosso interesse analisar se o sistema opera no regime elástico para valores de tensão menores que um determinado limite característico de cada material, denominado de limite de elasticidade do material  $\sigma_Y$ . As tensões inferiores a este limite provocam deformações de tal modo em que o corpo volta às dimensões originais quando a força é cessada.

As tensões classificam-se como tensões normais ou de corte (também denominada tensão tangencial).

Voltando ao problema em análise, utilizando 80 elementos de viga Timoshenko de formulação híbrida, conseguimos calcular o campo de tensões normais a partir da expressão que se segue:

$$\sigma_{xx\_máxima} = \frac{h}{2} E \frac{M(x)}{EI} = \frac{hM(x)}{2I} \quad (4.40)$$

De salientar que o estudo das tensões normais da viga se está a realizar à superfície da mesma,  $z = \frac{h}{2}$ , ou seja, na zona mais crítica onde se fazem mais sentir os momentos flectores. Da mesma forma a deformação de corte pode ser descrita através de:

$$\sigma_{zx} = \kappa G \frac{V(x)}{GA_c} = \kappa \frac{V(x)}{A_c} \quad (4.41)$$

Com o auxílio das equações (4.40) e (4.41) os campos de tensões podem ser ilustrados na Figura 4.15 e Figura 4.16.

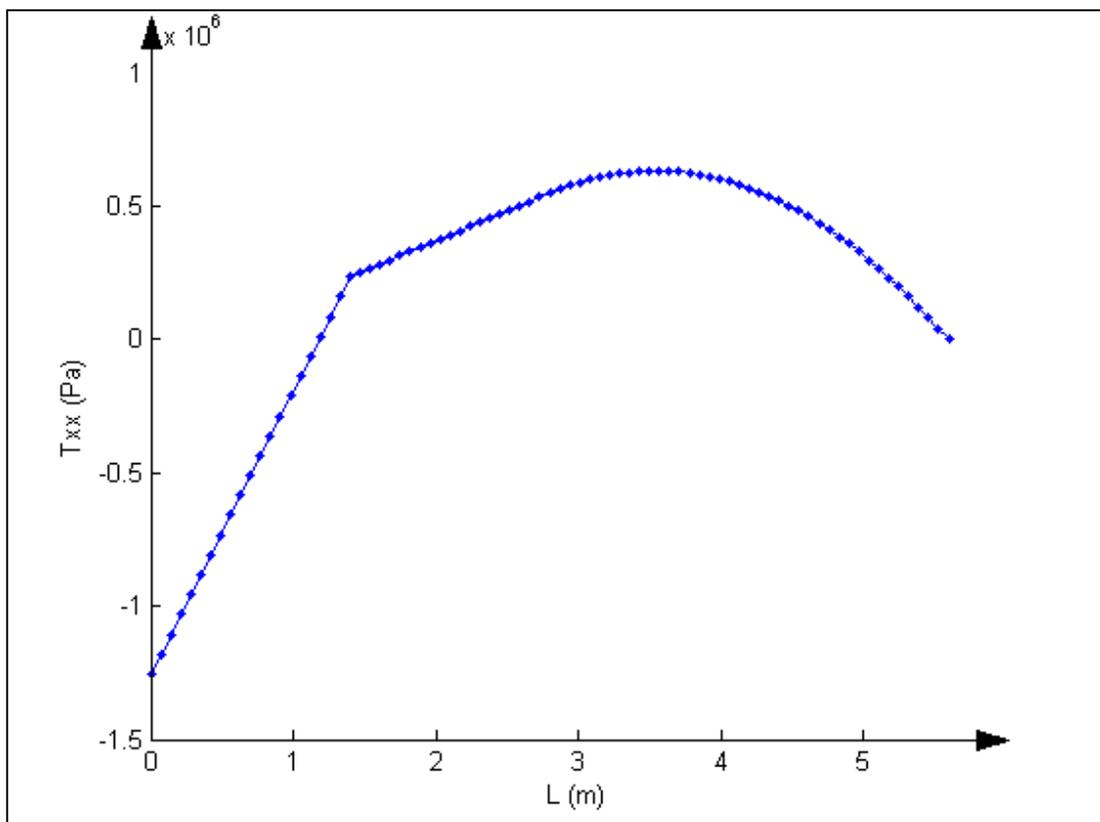


Figura 4.15 – Campo aproximado das tensões normais – 80 elementos viga

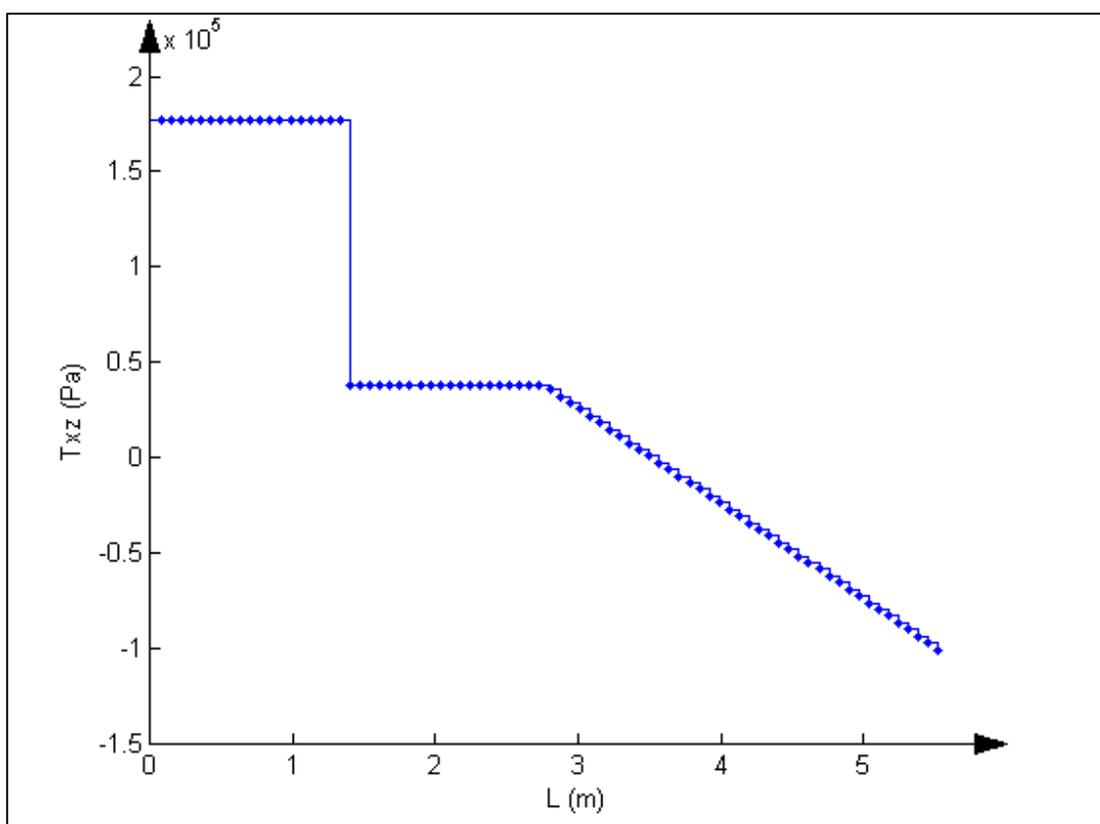


Figura 4.16 – Campo aproximado das tensões de corte – 80 elementos

O esforço de flexão ou Momento Flector  $M(x)$  é um caso particular de tração e compressão agindo juntos na mesma secção, ao passo que nos esforços de torção  $V(x)$  predomina a tensão de corte (Wikipédia, 2014). Tendo em conta estas premissas, consegue-se explicar as semelhanças entre os diagramas dos momentos com as tensões normais e dos esforços transversos com as tensões tangenciais.

A tensão equivalente de von Mises,  $\sigma_{VM}$ , é usada para prevenir o escoamento do material quando submetido a qualquer condição de carregamento. A tensão de von Mises é definida nos termos das tensões normais e tensões de corte pela equação (caso unidimensional):

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{zx}^2} \quad (4.42)$$

A componente de corte é de maior importância que a tensão de normal. Os valores nodais (80 elementos) para a tensão de von Mises estão ilustrados na Figura 4.17:

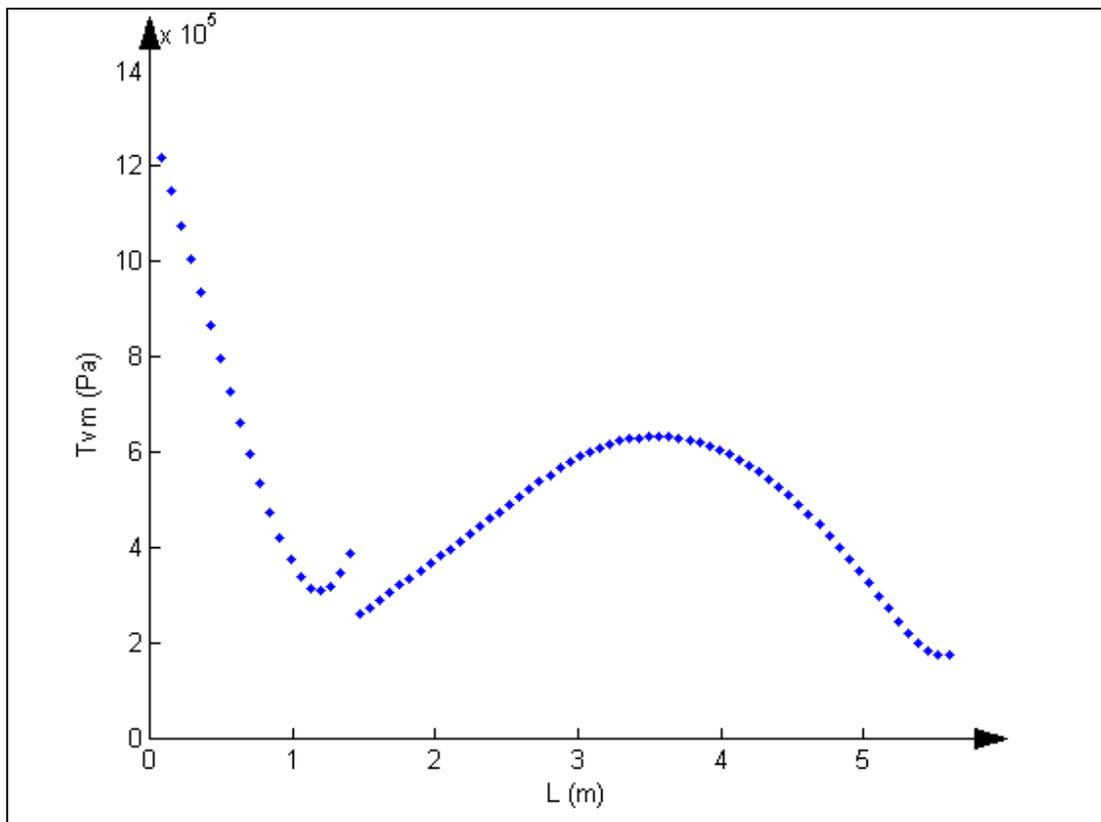


Figura 4.17 – Valores nodais das tensões equivalentes verificadas na viga

A maior concentração de tensões internas acontece no apoio onde a viga está encastrada. No entanto esse valor está muito abaixo da tensão de cedência que define um aço de propriedades típicas.

$$\sigma_{VM} = 1.2920 \text{ MPa} \leq 210 \text{ MPa} \quad (4.43)$$

### 4.2.3. Efeito de Shear Locking – Formulação Mista Vs. Formulação Clássica

Pegando no Exemplo 1 do Subcapítulo 3.3.1, fez-se uso da formulação mista para o modelo de Timoshenko, de forma a averiguar se ocorre o fenómeno de “travamento” numérico.

Para uma malha de 80 elementos observou-se que, apesar do uso de integração completa em todos os termos do sistema matricial misto e mesmo quando usado na sua forma compacta, não se verificou o efeito de “shear locking” na solução final. A explicação para não haver um comportamento no modelo de Timoshenko que conduza ao “shear locking”, ou em português retenção numérica, pode ser dada se tivermos em conta que eliminando os termos devidos ao corte,  $GA_c$ , a matriz de rigidez elementar será igual à matriz de rigidez elementar que resulta da formulação de elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli com parâmetros nodais híbridos, lembrando que esta teoria é um caso limite da teoria de vigas de Timoshenko.

Este método tem uma vantagem em relação ao recurso da integração reduzida selectiva, que apesar de válida não deixa de ser uma aproximação, podendo não ser um método apropriado para malhas pouco refinadas. Essa vantagem é comprovada para o caso de uma viga encastrada discretizada num único elemento.

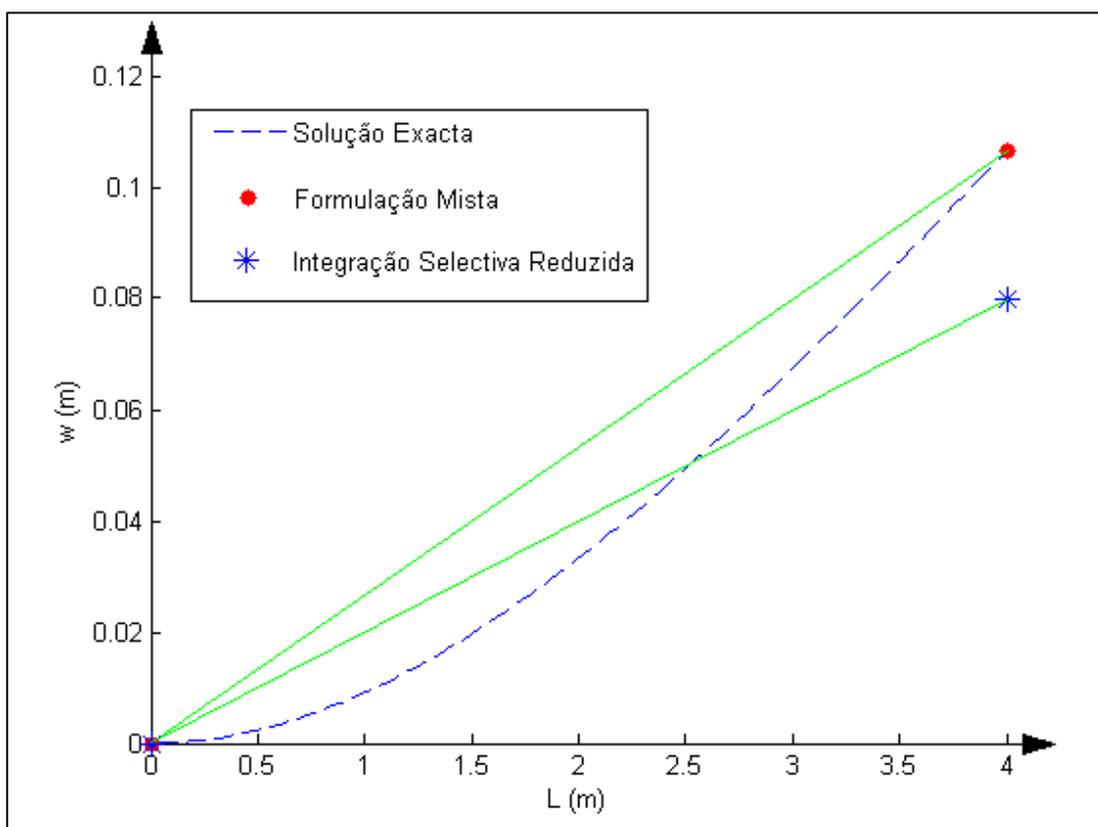


Figura 4.18 – Formulação mista vs. Formulação clássica (Integração Selectiva Reduzida) – 1 elemento

Como se observa pela Figura 4.18 – Formulação mista vs. Formulação clássica (Integração Selectiva Reduzida) – 1 elemento, mesmo só utilizando um elemento, o deslocamento nodal máximo calculado pela solução mista é igual ao deslocamento

exacto para essa mesma posição. Já aplicando integração reduzida selectiva conclui-se que este método não cumpre para uma malha com tão poucos elementos.

## Capítulo 5. Análise da Dinâmica Estrutural

Apresenta-se neste capítulo a análise do problema estrutural do ponto de vista da descrição dos movimentos oscilatórios de vigas. A análise dinâmica far-se-á através da formulação de um programa em código MATLAB, com a implementação do Método dos Elementos Finitos e de um algoritmo de integração temporal - Método de Newmark.

### 5.1. SOLUÇÃO ANALÍTICA

As vibrações mecânicas podem ser definidas como movimentos que se repetem num determinado período ou intervalo de tempo (Cardoso, 2011). Os problemas de vibrações podem aparecer nas mais diversas áreas como é o caso da aviação, sismologia ou dinâmica de estruturas, por exemplo.

Partindo da teoria de vigas Euler-Bernoulli, na derivação da solução necessária, agora em ordem não só ao vão da viga,  $x$ , mas também ao tempo,  $t$ , faz-se uso da seguinte relação (Stokey, 1961):

$$M = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

Seguindo o diagrama de corpo livre para análise dinâmica, apresentado na Figura 5.1, chega-se à equação do movimento para vibrações de vigas que é expressa com base na segunda lei de Newton,  $F = ma$ . Temos então a primeira equação do movimento, onde  $\rho$  representa a densidade do material estrutural e  $A$  é o símbolo para a secção transversal da viga:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + F(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

A segunda equação do movimento é obtida fazendo com que a resultante dos momentos flectores seja nula,  $\sum M(x, t) = 0$ . Esta equação é muito parecida à equação de equilíbrio para um problema estático, sendo expressa como:

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + V(x, t) = 0 \quad (5.3)$$

Ao intercalar as duas equações do movimento (5.2) e (5.3), obtém-se a equação geral, derivada da teoria de Bernoulli, para vibração de vigas (no caso de vibração livre negligencia-se a força variável no tempo  $F(x, t)$ ).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (5.4)$$

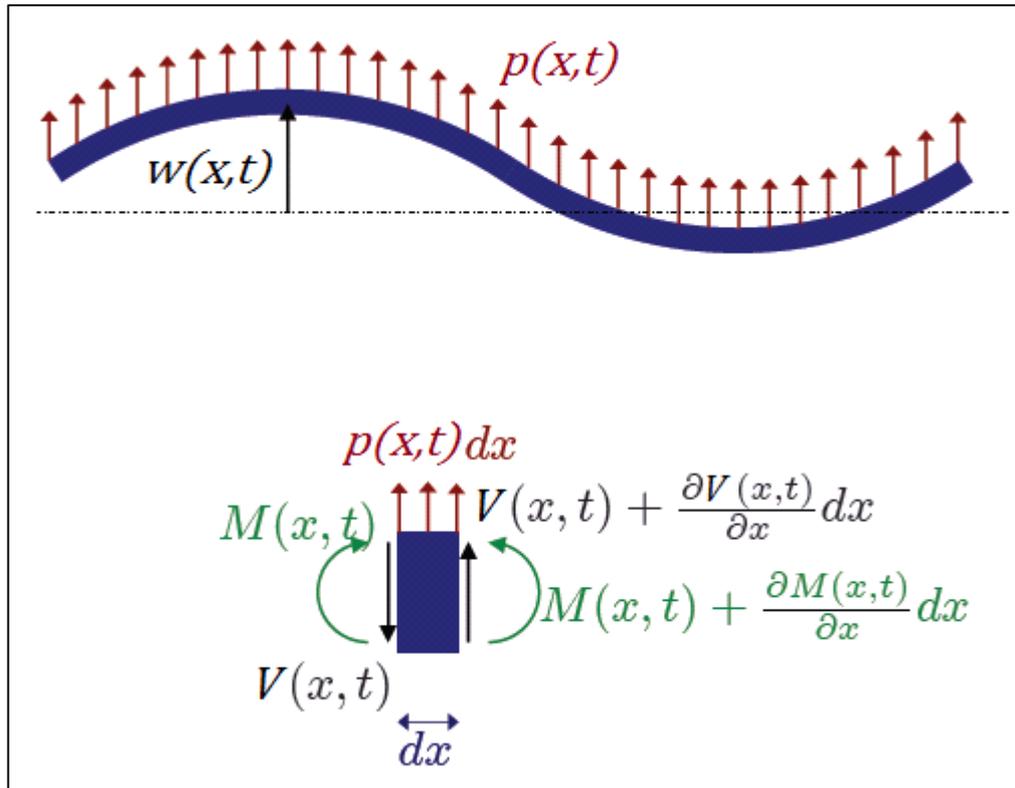


Figura 5.1 – Diagrama do corpo livre – problema dinâmico

Como se pode verificar, está-se perante uma equação diferencial parcial, sendo que soluções exactas só podem ser obtidas para algumas configurações específicas. A solução para os deslocamentos pode ser dada na forma da equação (5.5), admitindo solução em variáveis separáveis. Deste modo permite-se estudar a deformada da viga em função à coordenada  $x$  e em função ao tempo,  $t$ , de forma independente.

$$w(x, t) = W(x)\sin(\omega t) \quad (5.5)$$

Num dado modo de vibração, o movimento é harmónico, e por isso a estrutura apresenta um comportamento de uma onda sinusoidal ao longo do tempo. Tendo em conta a função (5.5), pode-se então simplificar a equação geral do movimento, uma vez que deixam de existir derivadas parciais.

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \sin(\omega t) + \rho A \frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} W(x) = 0 \quad (5.6)$$

A equação (5.6) pode ser trabalhada e a sua simplificação resulta na função (5.7) em que a constante  $\beta$  pode ser definida como:  $\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$ .

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} \sin(\omega t) - \beta^4 W(x) = 0 \quad (5.7)$$

$W(x)$  pode ser qualquer função cuja quarta derivada seja igual a uma contante  $\beta$  multiplicada pela própria função.

Apresenta-se uma solução geral que satisfaz as condições exigidas. A solução também poderia ser expressa na forma exponencial, mas soluções trigonométricas e hiperbólicas são mais convenientes.

$$W(x) = C1 \cosh(\beta x) + C2 \sinh(\beta x) + C3 \cos(\beta x) + C4 \sin(\beta x) \quad (5.8)$$

As constantes  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  e  $C4$  correspondem aos valores por calcular que dependem das condições fronteira impostas ao problema. Deste modo, dependendo do apoio utilizado (se este existir), volta-se a relembrar as condições de três tipos de viga e as constantes calculadas a partir daí.

Tabela 5.1 – Aplicação das condições fronteira para o cálculo das constantes

<b>Viga Simplesmente Apoiada</b>	<b>Viga encastrada (em <math>x=0</math>)</b>	<b>Viga Duplamente Encastrada</b>
$W(x = 0) = 0$	$W(x = 0) = 0$	$W(x = 0) = 0$
$M(x = 0) = \frac{d^2W(x = 0)}{dx^2} = 0$	$\theta(x = 0) = \frac{dW(x = 0)}{dx} = 0$	$\theta(x = 0) = \frac{dW(x = 0)}{dx} = 0$
$W(x = L) = 0$	$M(x = L) = \frac{d^2W(x = L)}{dx^2} = 0$	$W(x = L) = 0$
$M(x = L) = \frac{d^2W(x = L)}{dx^2} = 0$	$V(x = L) = \frac{d^3W(x = L)}{dx^3} = 0$	$\theta(x = L) = \frac{dW(x = L)}{dx} = 0$
$C1 = C2 = C3 = 0$	$C1 = -C3$	$C1 = -C3$
$C4 \sin(\beta L) = 0$	$C2 = -C4$	$C2 = -C4$

Estudando os três casos apresentados um a um, repare-se que a implementação das condições fronteira correspondentes a uma viga simplesmente apoiada dá origem à função  $C4 \sin(\beta L) = 0$ , onde  $L$  é o comprimento total do sistema vibratório. Ora como a constante não pode ser igual a zero, uma vez que iria anular a função  $W(x)$ , então conclui-se daqui que:

$$\sin(\beta L) = 0 \Rightarrow \beta_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

Pela definição dada anteriormente à constante  $\beta$  pode-se, desta forma, calcular as  $n$  frequências naturais deste sistema vibratório através da seguinte equação:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.10)$$

A cada frequência natural está associado um modo natural de vibração, que se reflecte numa onda com uma forma característica assumida pelo sistema durante a vibração livre. Em muitos destes sistemas, num determinado instante, a vibração tem

amplitude considerável num número limitado de modos de vibração, se não mesmo apenas no primeiro modo.

A deformada da viga uniforme, com extremidades simplesmente apoiadas, para cada frequência de vibração é expressa de seguida:

$$W_n(x) = C4 \sin(\beta_n x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5.11)$$

Em todo o domínio do sistema vibratório, este comporta-se segundo um movimento harmónico simples sobre a sua posição de equilíbrio. Aos pontos que não se movem ao longo do tempo, nos respectivos modos de vibração, dá-se o nome de pontos nodais.

Como se observa pela Figura 5.2, para o modo 1 (de menor frequência) os pontos nodais só se verificam nas posições onde se encontram apoios (sejam eles apoios simples ou encastrados). Já para outros modos encontramos pontos adicionais, dentro do domínio da estrutura.

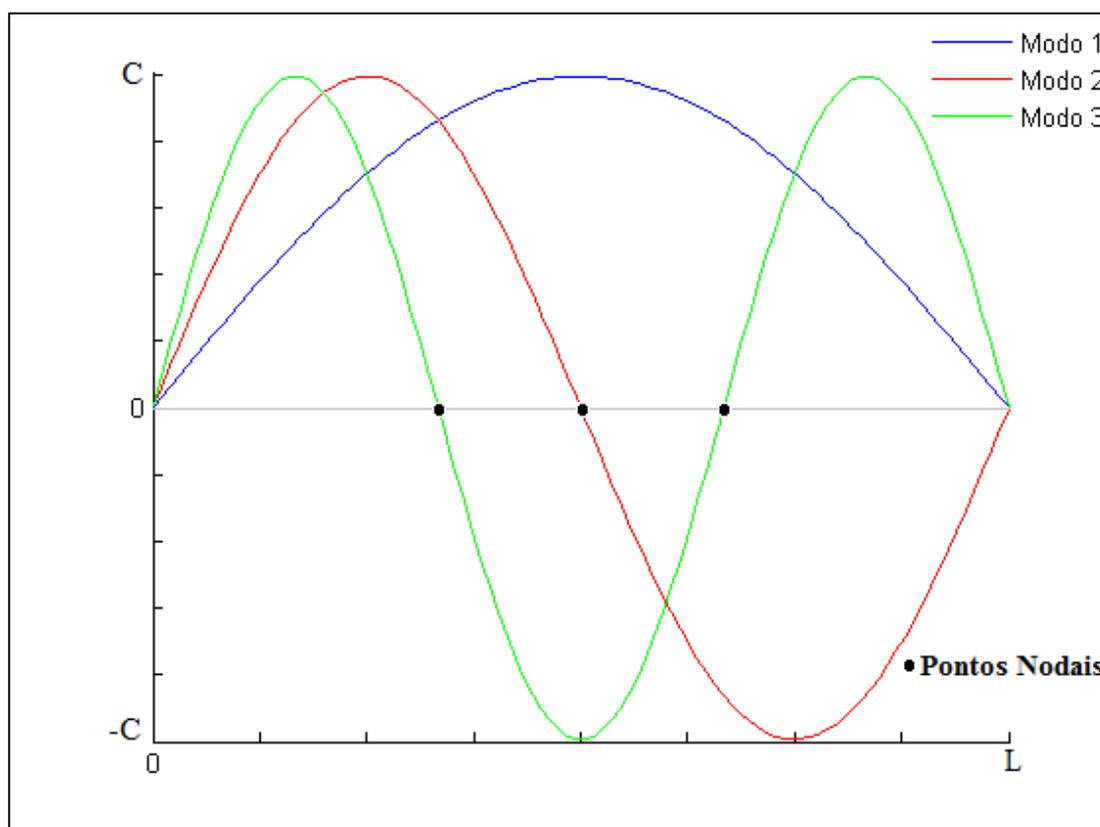


Figura 5.2 - Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga simplesmente apoiada

No caso de uma viga em consola, a implementação das condições contorno dá origem a um sistema de duas equações, onde as incógnitas são as duas constantes por calcular:

$$C1[\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)] + C2[\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)] = 0 \quad (5.12)$$

$$C1[\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)] + C2[\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)] = 0 \quad (5.13)$$

Na resolução do sistema de equações não se pode admitir a solução trivial porque mais uma vez, isso iria anular as constantes. De forma a encontrar outro tipo de soluções para além da trivial recorre-se ao determinante do sistema que é posteriormente igualado a zero.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \quad (5.14)$$

Deste determinante sai uma função não linear. A função (5.15) não tem uma solução específica para os 3 primeiros modos de vibração, tendo de ser calculada numericamente.

$$\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) + 1 = 0 \quad (5.15)$$

As primeiras 3 raízes são:

$$\beta_1 L = 1.875; \quad \beta_2 L = 4.6941; \quad \beta_3 L = 7.855 \quad (5.16)$$

$$\beta_n L = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n > 3 \quad (5.17)$$

A partir do quarto modo de vibração é apresentada uma solução que converge para o valor exacto das respectivas frequências naturais como consequência da relação entre  $\beta_n$  e  $\omega_n$  (equação (5.17)).

Para as condições fronteira resultantes de um ou dois apoios encastrados, duas das quatro constantes são excluídas logo à partida. Posteriormente, as restantes constantes podem ser combinadas, resultando numa constante indeterminada, a qual só consegue ser avaliada se a amplitude de vibração for concedida.

A equação (5.18) faculta a deformada de uma viga encastrada na sua posição inicial, para o modo de vibração  $n$ , sendo  $C$  a constante que resulta da combinação de  $C1$  e  $C2$ .

$$W_n(x) = C \left[ \cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) + \frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)} (-\sinh(\beta_n x) + \sin(\beta_n x)) \right] \quad (5.18)$$

A Figura 5.3 mostra os 3 primeiros modos de vibração deste género de vigas. De salientar que como o valor da  $C$  não é igual ao valor absoluto da amplitude máxima das ondas de vibração, ao contrário do que acontece no caso da viga simplesmente apoiada.

Desta forma opta-se por uma representação normalizada dos modos de vibração, isto é, entre os valores -1 e 1.

O estudo da viga duplamente encastrada é em tudo semelhante, ao da viga fixa numa só extremidade. As frequências naturais angulares conseguem ser calculadas numericamente a partir da equação (5.19).

$$\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) - 1 = 0 \quad (5.19)$$

Tal como no caso de estudo anterior, a partir do quarto modo de vibração o comportamento pode ser definido por uma função (equação (5.21)). As três primeiras raízes são:

$$\beta_1 L = 4.733; \quad \beta_2 L = 7.855; \quad \beta_3 L = 11 \quad (5.20)$$

$$\beta_n L = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n > 3 \quad (5.21)$$

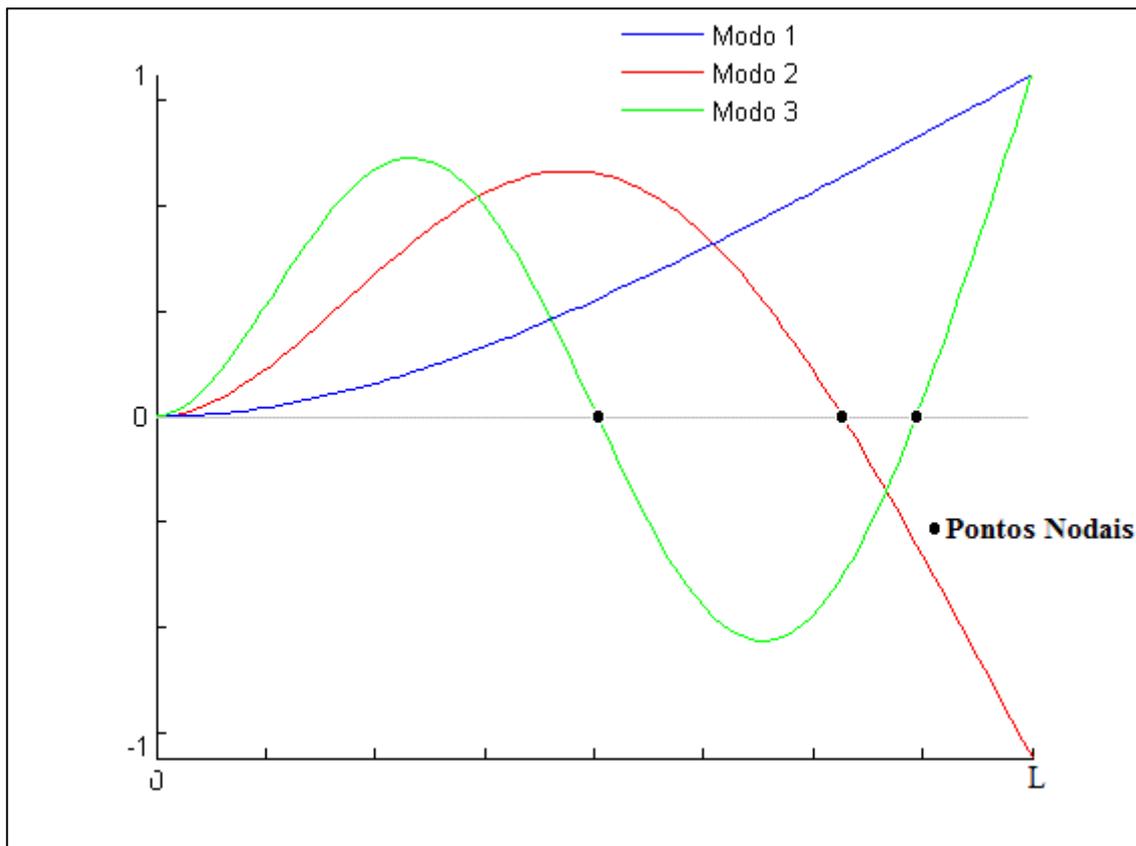


Figura 5.3 – Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga em consola

Sabendo as frequências naturais os modos de vibração são retirados com o auxílio da equação (5.22). Também aqui são ilustrados a “versão” normalizada dos primeiros três modos de vibração.

$$W_n(x) = C \left[ \cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) + \frac{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)}{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)} (-\sinh(\beta_n x) + \sin(\beta_n x)) \right] \quad (5.22)$$

Comparando as deformadas da viga simplesmente apoiada com a viga duplamente encastrada só em termos meramente geométricos, observa-se que elas são muito semelhantes. Excepção para as zonas dos apoios onde é imposto para um apoio encastrado que a rotação nesses pontos seja nula.

Quando uma viga uniforme de extremidades simplesmente apoiadas vibra na sua menor frequência natural, esta assume a forma de metade de uma onda sinusoidal, com deflexão máxima no ponto central da viga. Já para uma viga com a sua extremidade inicial fixa, a sua deflexão máxima será na extremidade oposta para o primeiro modo de vibração.

Em certos problemas envolvendo vibrações forçadas, o sistema pode mostrar uma conjugação de mais do que um modo de vibração de mais do que um modo de vibração. Dependendo do ponto de aplicação de uma força transiente, o sistema será excitado de uma maneira particular.

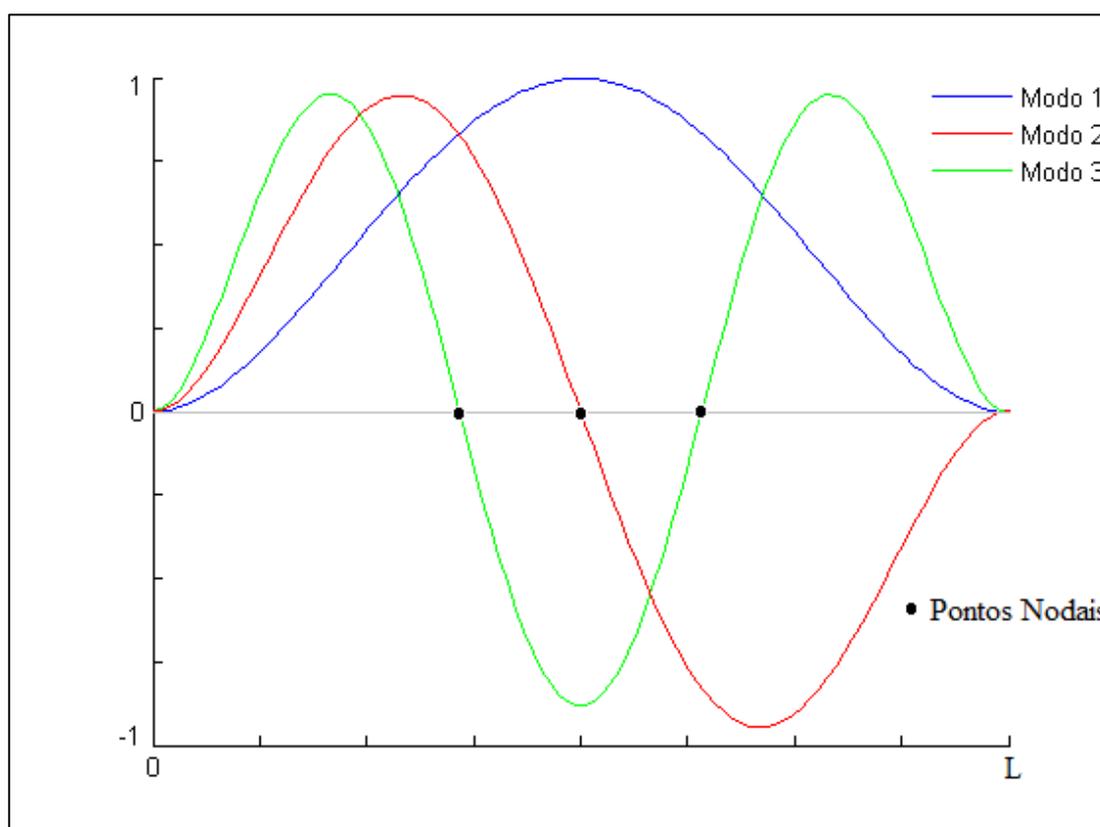


Figura 5.4 – Primeiros três modos de vibração correspondentes a uma viga duplamente encastada

## 5.2. SOLUÇÃO NUMÉRICA – M.E.F.

Devido à dificuldade em encontrar soluções exactas que se traduzem em cálculos de complexidade relativamente elevada, recorre-se aos métodos aproximados, como é o caso do MEF, por troca dos tradicionais métodos analíticos. Tipicamente, o comportamento dinâmico de uma estrutura é descrito como sendo semelhante ao de um sistema concentrado ou por outras palavras um sistema massa-mola-amortecedor.

No geral, quando se trata de problemas de engenharia de sistemas reais, os resultados serão mais precisos quanto maior for o número de graus de liberdade do sistema. Na Figura 5.5 apresenta-se um exemplo de um sistema vibratório com dois graus de liberdade. Os sistemas também podem ser amortecidos (Figura 5.6) ou não-amortecidos.

Para sistemas em que a massa e suas respectivas componentes elásticas (sistema massa-mola-amortecedor inclui efeitos de inércia ( $m$ ), capacitivos ( $C$ ) e resistivos ( $k$ )) são concentradas, estes definem-se por terem um número finito de graus de liberdade (pelo contrário, sistemas reais possuem infinitos graus de liberdade).

Num sistema massa-mola a massa corresponde a um corpo rígido não deformável, tendo a mola a finalidade de exercer uma força contrária ao movimento do sistema.

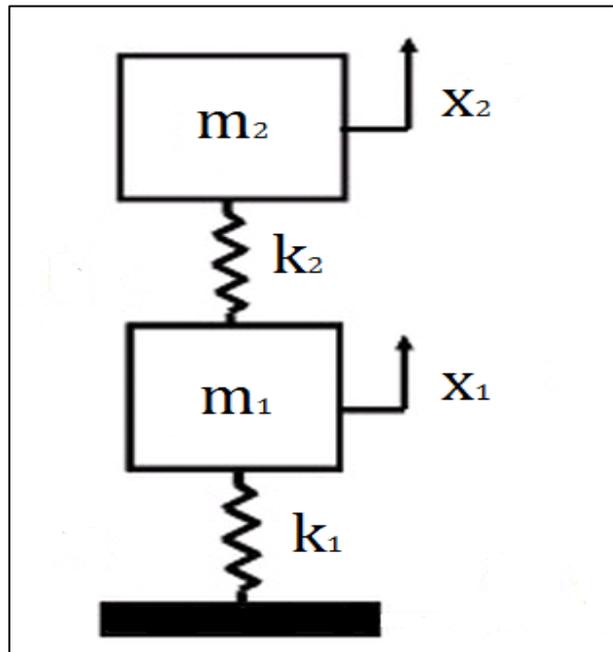


Figura 5.5 - Sistema não amortecido com 2 graus de liberdade

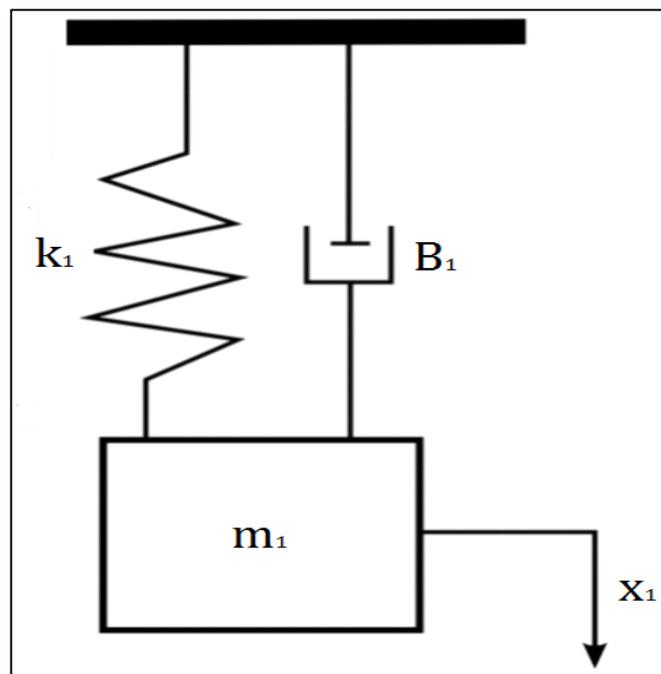


Figura 5.6 - Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade

A análise dinâmica da estrutura faz-se a partir da sua Posição de Equilíbrio, *PEE*. A mola, inicialmente na posição  $y = 0$ , sofre uma deflexão inicial  $y = \delta$  até à posição de equilíbrio estático que resulta da adição de uma massa  $m$  como indicado na Figura 5.7.

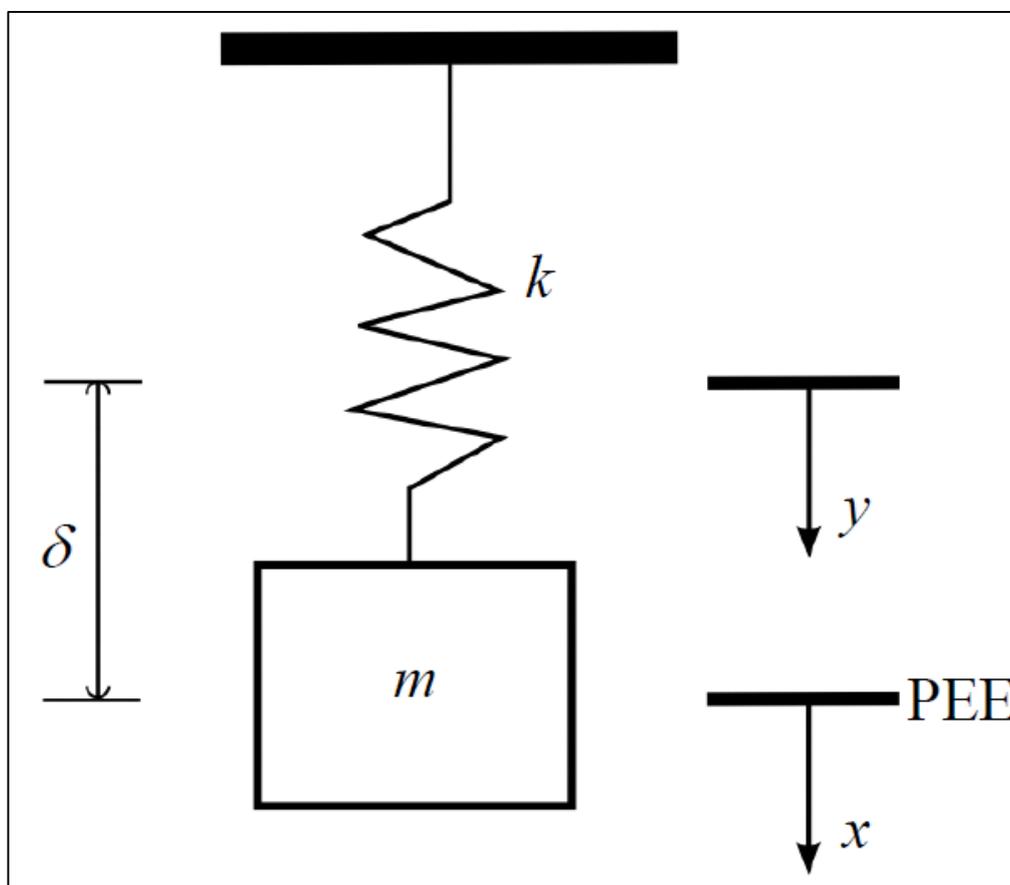


Figura 5.7 – Deslocamento para a posição de equilíbrio estático

Neste trabalho propõe-se a investigação no domínio do tempo, com o auxílio ao Método dos Elementos Finitos, da propagação das ondas de flexão ao longo do vão, de vários tipos de vigas. O sistema de equações de equilíbrio dinâmico para um modelo de elemento finito, com  $n$  graus de liberdade, e portanto, composto por  $n$  equações diferenciais, é ditado pela equação (5.23):

$$[m]\{\ddot{w}(t)\} + [c]\{\dot{w}(t)\} + [k]\{w(t)\} = \{F(t)\} \quad (5.23)$$

Onde  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez respectivamente (Bower and Franck, 2013). É assumido que estas matrizes se mantenham constantes.

O vector  $\{F(t)\}$  é o vector das forças externas, e os vectores  $\{\ddot{w}(t)\}$ ,  $\{\dot{w}(t)\}$  e  $\{w(t)\}$  são respectivamente vectores de acelerações, velocidades e posições nodais (o ponto sobrescrito denota o tempo derivativo  $\frac{d}{dt}$ ).

A resposta da estrutura pode ser dividida em duas componentes, estando uma delas associada à resposta livre da estrutura, anulando a aplicação da carga  $F(t)$ , como

ilustrado na equação (5.24) – e a outra, a resposta derivada da especificidade do estímulo imposto na estrutura, originando um sistema forçado.

$$[m]\{\ddot{w}(t)\} + [c]\{\dot{w}(t)\} + [k]\{w(t)\} = \{0\} \quad (5.24)$$

### 5.2.1. Cálculo das Frequências Naturais e Modos de Vibração

Considera-se agora um sistema livre não-amortecido, que se reflecte na equação do movimento indicada pela equação (5.25):

$$[m]\{\ddot{w}(t)\} + [k]\{w(t)\} = \{0\} \quad (5.25)$$

Num sistema livre, em geral, o movimento resultante da imposição de um deslocamento inicial não resultará num movimento harmónico. Excepção feita para certos valores, valores “especiais”  $w_0$ , que provocam os chamados modos de vibração da estrutura e para os quais as frequências correspondentes são conhecidas como frequências naturais.

A solução completa de qualquer problema de dinâmica estrutural reside primeiramente em encontrar as frequências naturais e correspondentes modos de vibração do sistema. Na prática é preciso conhecer apenas algumas frequências naturais, sendo que as frequências de valor mais baixo, normalmente são as mais importantes.

A partir do momento em que estamos apenas interessados em soluções harmónicas, conseguimos deste modo assumir que a solução se encontra na forma  $w(t) = C_1 \sin(\omega t)$ , onde  $C_1$  é a amplitude da onda sinusoidal e  $\omega$  corresponde à frequência angular. É possível desta forma reescrever a equação (5.25) que fica na forma:

$$[m]\{C_1 \omega^2 \sin(\omega t)\} + [c]\{C_1 \sin(\omega t)\} = \{0\} \quad (5.26)$$

Ao separar os termos e cortar os senos, tem-se como resultado a apresentação da função (5.26) de uma forma menos complexa. Como se pode verificar, da obtenção do sistema matricial simplificado, resultam duas incógnitas,  $\lambda$  e  $w_0$ .

$$[k]\{C_1\} = [m]\{C_1 \omega^2\} \Rightarrow [k]\{w_0\} = \{\lambda\}[m]\{w_0\} \quad (5.27)$$

Para obtermos as frequências naturais (eigenvalues) efectua-se o determinante da equação (5.27) em ordem a  $\lambda$ .

$$|\{\lambda\}[M] + [k]| = 0 \quad (5.28)$$

No entanto, sabendo que o número de todas as frequências naturais de vibração é igual ao número de graus de liberdade do problema, torna-se muito difícil encontrar fórmulas de resolução exactas para casos onde as matrizes  $[k]$  e  $[m]$  são de grandes dimensões.

Para suprimir este problema, o software MATLAB tem englobado uma função -  $[V, D] = eig(k, m)$  - que nos permite calcular tanto os auto-valores  $\{\lambda\}$  (representados na diagonal da matriz  $D$ ) como os auto-vectores  $\{w_0\}$  (representados em cada coluna da matriz  $V$ ). Os auto-valores estão relacionados com a frequência angular natural da seguinte forma,  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Já os auto-vectores não representam mais que os modos de vibração do sistema vibratório.

### 5.2.2. Aplicação da Formulação Clássica em Dinâmica de Estruturas

Como já referido, para se conceber uma análise dinâmica através do MEF, é preciso pelo menos dispor da matriz de massa para emparelhar com a matriz de rigidez. Este subcapítulo fornece uma breve introdução aos métodos convencionais para o cálculo desta matriz.

Regra geral, a assemblagem da matriz de massa global, faz-se paralelamente com a matriz de rigidez global. Desta forma, as matrizes de massa para cada elemento de viga de 2 nós são formadas nas suas coordenadas locais, e incorporadas numa matriz global, seguindo exactamente as mesmas técnicas usadas para  $[k]$ .

A construção da matriz de massa elementar pode ser realizada através de vários métodos sendo que neste trabalho nos vamos focar somente em técnicas para produzir a matriz de massa consistente  $[m]$  (Felippa, 2013).

Num problema dinâmico a energia cinética de um elemento de densidade  $\rho$ , considera um modo de movimento relacionado à translação  $w$  e outro relacionado com a rotação  $\theta$ . Esta é expressa na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{w})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I (\dot{\theta})^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \dot{\theta}^2 dx \quad (5.29)$$

Para elementos de viga Euler-Bernoulli a matriz rigidez já foi obtida no Capítulo 3. No que diz respeito ao cálculo da matriz  $[m]$ , apenas a inércia de translação, devido ao deslocamento transversal da viga, é considerado no cálculo da energia cinética  $E_c$  do elemento, ao passo que o momento de inércia é ignorado.

$$[m]^e = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] dx \quad (5.30)$$

Deste modo, com o auxílio das funções de interpolação cúbicas e com os graus de liberdade dispostos como  $a_e = [w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j]^T$ , tem-se:

$$[m]^e = \frac{\rho A}{420} \begin{bmatrix} 156L & 22L^2 & 54L & -13L^2 \\ 22L^2 & 4L^3 & 13L^2 & -3L^3 \\ 54L & 13L^2 & 156L & -22L^2 \\ 13L^2 & -3L^3 & -22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix}^e \quad (5.31)$$

Se recorrermos ao modelo de Timoshenko, em problemas dinâmicos a matriz de rigidez é a mesma que foi apresentada na função (3.27). No que diz respeito a este modelo, o momento de inércia já passa a ser incluído na equação da energia cinética, que nos termos da matriz  $[m]$  se traduz da seguinte forma:

$$[m]^e = \int_0^L \begin{bmatrix} N_i(x) & 0 \\ N_j(x) & 0 \\ 0 & -N_i(x) \\ 0 & -N_j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & \rho A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_i(x) & -N_j(x) \end{bmatrix} dx \quad (5.32)$$

Neste caso as funções de forma são lineares, e os graus de liberdade relacionados com as rotações,  $\theta_i$  e  $\theta_j$ , são independentes dos deslocamentos,  $w_i$  e  $w_j$ . Desta forma, pode-se concluir que os momentos de inercia entram exclusivamente nos parâmetros que se relacionam com as rotações. O mesmo acontece para a inercia de translação em relação aos deslocamentos.

$$[m]^e = \begin{bmatrix} \rho I \frac{L}{3} & \rho I \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ \rho I \frac{L}{6} & \rho I \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A_c \frac{L}{3} & \rho A_c \frac{L}{6} \\ 0 & 0 & \rho A_c \frac{L}{6} & \rho A_c \frac{L}{3} \end{bmatrix}^e \quad (5.33)$$

### 5.2.3. Aplicação da Formulação Mista em Dinâmica de Estruturas

Recapitulando a aplicação da formulação mista em regime estático, a respectiva equação matricial do sistema global pode ser dada, numa forma mais compacta, por:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

Onde  $\{M\}$  e  $\{w\}$  são respectivamente, os momentos e os deslocamentos nodais. Por sua vez, os vectores  $\{\theta\}$  e  $\{V\}$  exprimem o somatório das rotações nodais e cargas nodais dos elementos adjacentes. Na transição do sistema global para o reduzido os termos do vector  $\{\theta\}$ , que resultam da integração por partes, anulam-se quando se procede à união dos vários elementos.

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Repare-se agora no caso de um sistema em regime dinâmico. Uma qualquer estrutura apresenta um comportamento dinâmico se nela se verificarem forças de inércia nodais, que resultam da interacção entre a massa e a aceleração.

Supondo que os deslocamentos nodais em função do tempo podem ser enunciados na forma:

$$\{w(t)\} = \{w\}\cos(\omega t) \quad (5.36)$$

Ao se derivar a equação (5.36) duas vezes em ordem a  $t$ , obtém-se a expressão para aceleração.

$$\{\ddot{w}(t)\} = -\omega^2\{w\}\cos(\omega t) \quad (5.37)$$

Posto isto, e tendo em conta que a matéria é igual ao produto da densidade  $\rho$  com a área  $A$ , o trabalho das forças de inercia apresenta-se como:

$$W_{Finercia} = \rho A_C \int_0^L \{w\}^T \{\ddot{w}(t)\} dx = -\omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \{w\}^T \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} \quad (5.38)$$

Como o termo trigonométrico  $\cos(\omega t)$  é um factor de escala temporal, este pode estar em qualquer ponto do produto matricial em (5.38), ou seja:

$$-\omega^2 \rho A_C \{w_{01} \cos(\omega t) \quad w_{02} \cos(\omega t) \quad w_{03} \cos(\omega t) \quad \dots\} \int_0^L [N]^T [N] dx \begin{Bmatrix} w_{01} \cos(\omega t) \\ w_{02} \cos(\omega t) \\ w_{03} \cos(\omega t) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Ao efectuar o cálculo das variações de forma  $\frac{\partial W_{Finercia}}{\partial w}$ , o vector das forças de inércia é alcançado com o seguinte formato:

$$\{F_{inercia}\} = -\omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} \quad (5.40)$$

Deste modo, no sistema matricial apresentado na equação (5.34), surge agora no regime dinâmico, tanto a contribuição das forças externas como também das forças de inércia.

$$\begin{Bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [0] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\{F_{inercia}\} + \{F_{externa}\}\} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Se em (5.41) o termo  $\{F_{externa}\}$  não existir, então só teremos as amplitudes das forças de inércia nodais na forma mista:

Analisando o sistema matricial misto de forma separada a equação, que resulta do produto da segunda linha da matriz com o vector que apresenta os momentos nodais e deslocamentos nodais em (5.41), é apresentada de seguida maneira:

$$[B]^T \{M\} + [0] \{w\} = -\omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} + \{F_{externa}\} \quad (5.42)$$

Se deslocarmos o vector  $\{F_{inercia}\}$  para o lado esquerdo da equação:

$$[B]^T \{M\} + \omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} = \{F_{externa}\} \quad (5.43)$$

Pela equação (5.43) conclui-se que a forma final do sistema matricial na forma mista e em regime dinâmico fica com o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & \omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \int_0^L [N]^T [N] dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_{externa}\} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

Portanto, a submatriz que previamente era nula no regime estático, agora é uma matriz resultante das forças de inércia.

Um ponto importante que não deve ser esquecido prende-se na definição do vector das forças externas pois este pode ser estabelecido como  $\{F_{externa}\} = \{F_{externa\_max}\} \cos(\omega t)$ . Deste modo, se a variação harmónica das forças externas estiver em fase com a das acelerações (o que é verdade no caso de não haver amortecimento viscoso) então ficam apenas as amplitudes:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & \omega^2 \rho A_C \int_0^L [N]^T [N] dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_{externa}\} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

Tal como na análise estática, também em regime dinâmico, utilizando elementos de viga com parâmetros híbridos, tem-se a vantagem de ser permitido proceder à condensação dos termos alusivos aos momentos nodais, privilegiando a minimização do esforço computacional,:

Relembrando a definição dada em problemas estáticos temos:

$$[A]\{M\} + [B]\{w\} = \{0\} \Rightarrow \{M\} = -[A]^{-1}[B]\{w\} \quad (5.46)$$

Vamos substituir este termo na equação (5.43):

$$-[B]^T [A]^{-1} [B] \{w\} + \omega^2 \rho A_C \cos(\omega t) \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} = \{0\} + \{F_{externa}\} \quad (5.47)$$

Simplificando, ficam apenas as amplitudes e se a força externa não existir, obtém-se um problema de valores próprios:

$$-[B]^T [A]^{-1} [B] \{w\} + \omega^2 \rho A_C \int_0^L [N]^T [N] dx \{w\} = \{0\} \quad (5.48)$$

$$\left| [B]^T [A]^{-1} [B] + \omega^2 \rho A_c \int_0^L [N]^T [N] dx \right| = \{0\} \quad (5.49)$$

Se relembarmos a equação (5.28) do subcapítulo do cálculo das frequências naturais (5.2.1) (recordar que  $\omega^2 = \lambda$ ), podemos fazer a analogia dessa mesma definição com a equação (5.49) e concluir deste modo que:

$$[k] = [B]^T [A]^{-1} [B] \quad (5.50)$$

$$[m] = \rho A_c \int_0^L [N]^T [N] dx \quad (5.51)$$

Estas serão as matrizes de rigidez e de massa respectivamente, que vão ser utilizadas no sistema de equações de equilíbrio dinâmico para um modelo de elemento finito com parâmetros híbridos.

A vantagem da formulação mista em relação à formulação clássica reside, na utilização somente dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos transversos e suas derivadas no tempo. Desta forma, a análise dinâmica por este método traz vantagens computacionais significantes, porque as dimensões das constantes  $[k]$  e  $[m]$  estão a ser reduzidas a metade quando comparadas com as constantes equivalentes obtidas através da formulação dita irredutível.

#### 5.2.4. Integração Temporal das Equações de Equilíbrio

Numa análise dinâmica transiente, o objectivo passa por determinar a resposta sob uma carga dependente no tempo  $F(t)$ , (estamos portanto perante um caso de uma vibração forçada). Os exemplos mais flagrantes são as chamadas forças em degrau ou forças impulsivas (Figura 5.8), onde se verifica uma variação acentuada de carga num intervalo de tempo relativamente pequeno.

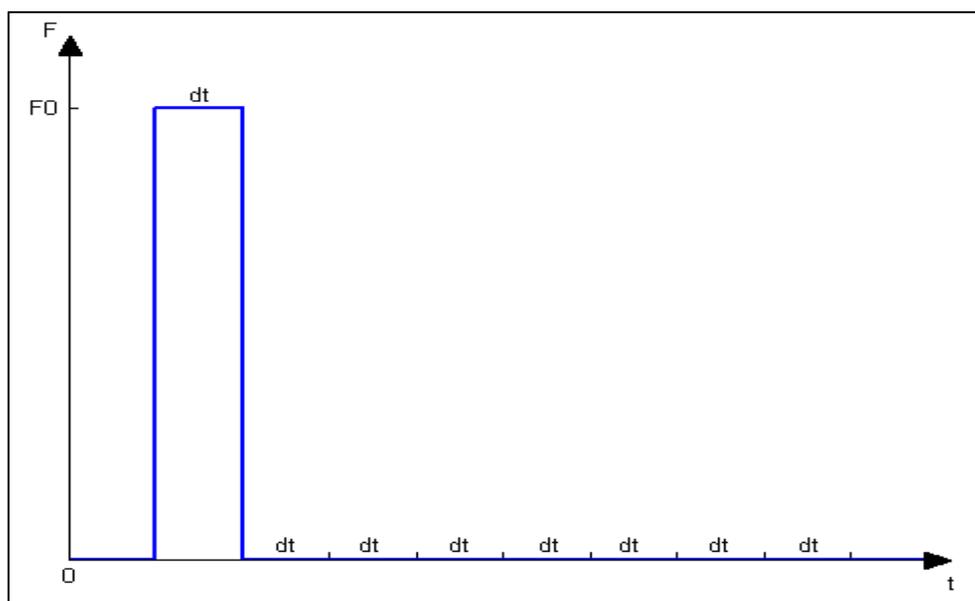


Figura 5.8 – Força impulsiva - entrada

Para discretização temporal da equação de equilíbrio resultante, é utilizado o Método de Newmark, que se traduz num algoritmo de integração temporal implícito (Huebner *et al.*, 2001).

Através do Método de Newmark faz-se um rastreio da resposta do sistema vibratório em intervalos de tempo sucessivos  $\Delta t$ , durante e depois da aplicação da carga. A estes intervalos de tempo também se pode dar o nome de passo de tempo.

O tamanho do passo é regulado pela frequência natural máxima da estrutura, sendo que quanto menor for o passo mais precisa será a precisão da análise da resposta dinâmica da estrutura.

Valores na ordem das vinte iterações por período natural  $T$  costumam ser utilizados em programas de simulação de engenharia, como é o caso do ANSYS. Por outras palavras, ter-se-á vinte pontos discretos por período da frequência modal mais elevada.

As equações de Newmark para o deslocamento e velocidade no instante  $t + \Delta t$  são respectivamente:

$$\{w\}_{t+\Delta t} = \{w\}_t + \Delta t\{\dot{w}\}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{w}\}_t + \beta \{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} \right] \quad (5.52)$$

$$\{\dot{w}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{w}\}_t + \Delta t(1 - \gamma)\{\ddot{w}\}_t + \Delta t\gamma\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} \quad (5.53)$$

Onde  $\gamma_n$  e  $\beta_n$  são os parâmetros de controlo. Valores de  $\gamma_n = \frac{1}{2}$  e  $\beta_n = \frac{1}{4}$  reproduzem o método trapezoidal (algoritmo original de Newmark), simplificando as equações (5.52) e (5.53) para:

$$\{w\}_{t+\Delta t} = \{w\}_t + \Delta t\{\dot{w}\}_t + \frac{\Delta t^2}{4} (\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{w}\}_t) \quad (5.54)$$

$$\{\dot{w}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{w}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{w}\}_t) \quad (5.55)$$

A equação geral de equilíbrio dinâmico em  $t + \Delta t$  é dada por:

$$[m]\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} + [c]\{\dot{w}\}_{t+\Delta t} + [k]\{w\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (5.56)$$

De seguida incorpora-se a as equações relativas aos deslocamentos (5.54) e às velocidades (5.55) na equação de equilíbrio (5.56), colocando os termos em ordem à aceleração.

$$\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} = [0.25\Delta t^2[k] + 0.5\Delta t[c] + [m]]^{-1} [\{F\}_{t+\Delta t} - [k]\{w\}_t - (\Delta t[k] + [c])\{\dot{w}\}_t - (0.25\Delta t^2[k] + 0.5\Delta t[c])\{\ddot{w}\}_t] \quad (5.57)$$

Como se pode verificar, a aceleração  $\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t}$  está em função dos valores deslocamento, velocidade e aceleração resultantes da iteração anterior ou seja, os

valores  $\{w\}_t$ ,  $\{\dot{w}\}_t$  e  $\{\ddot{w}\}_t$ . Por motivos óbvios a análise dinâmica de um problema estrutural começa no instante  $t = 0$ . A imposição de um estado de repouso à estrutura no instante inicial implica que as incógnitas do sistema são nulas à partida:

$$\{\ddot{w}\}_0 = \{\dot{w}\}_0 = \{w\}_0 = 0 \quad (5.58)$$

Valores absolutos diferentes de zero só se verificam depois que o sistema é excitado através da aplicação de um impulso. A partir desse momento e com a contribuição, primeiro da equação (5.57), e depois com a equações (5.54) e (5.55), podemos calcular os valores  $\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t}$ ,  $\{w\}_{t+\Delta t}$  e  $\{\dot{w}\}_{t+\Delta t}$  respectivamente.

Uma nota importante acerca das equações de Newmark é que o cálculo das rotações  $\{\theta\}$ , velocidades angulares  $\{\dot{\theta}\}$  e acelerações angulares  $\{\ddot{\theta}\}$  tem de ser incorporado quando usada a formulação clássica, nos vectores das incógnitas, em conjunto aos valores dos deslocamentos  $\{w\}$ , velocidades  $\{\dot{w}\}$  e acelerações  $\{\ddot{w}\}$  respectivamente. Isto acontece porque tanto a matriz de rigidez como a matriz de massa englobam tanto os graus de liberdade relacionados com os deslocamentos como os de rotações.

No entanto, se a forma compacta da formulação mista for a escolhida para abordar o problema dinâmico, então do processo de condensação dos momentos nodais resulta no facto de ser somente necessário trabalhar com deslocamentos e suas derivas no tempo.

### **Exemplo 3:**

Consideremos agora o estudo, através do MEF, de uma viga em consola composta somente por um elemento de viga misto, como ilustrado na Figura 5.9.

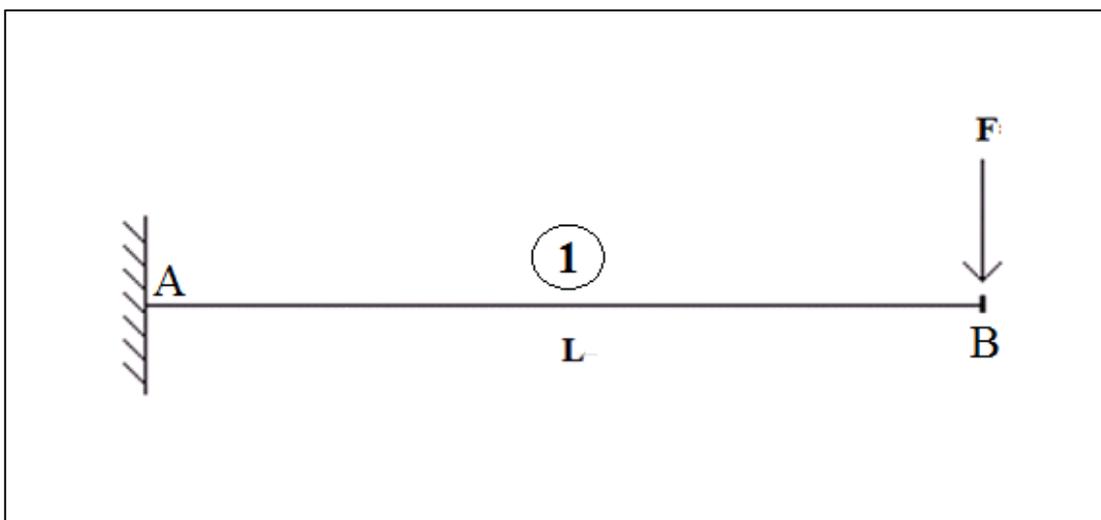


Figura 5.9 - Análise dinâmica de uma viga contínua – exemplo 3

O sistema será excitado através da aplicação uma carga em degrau de valor constante  $F_0 = 500 \text{ N}$ , durante um intervalo de tempo delimitado entre os instantes  $t_i$  e  $t_f$ , como indicado na Figura 5.10, sendo que a viga apresenta as seguintes características:

Dimensões da viga:

- $b = 0.3 \text{ m}$
- $h = 0.25 \text{ m}$
- $L = 4 \text{ m}$

Propriedades Material:

(Aço com 0.2% de carbono)

- $E = 210 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_Y = 210 \text{ MPa}$
- $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$

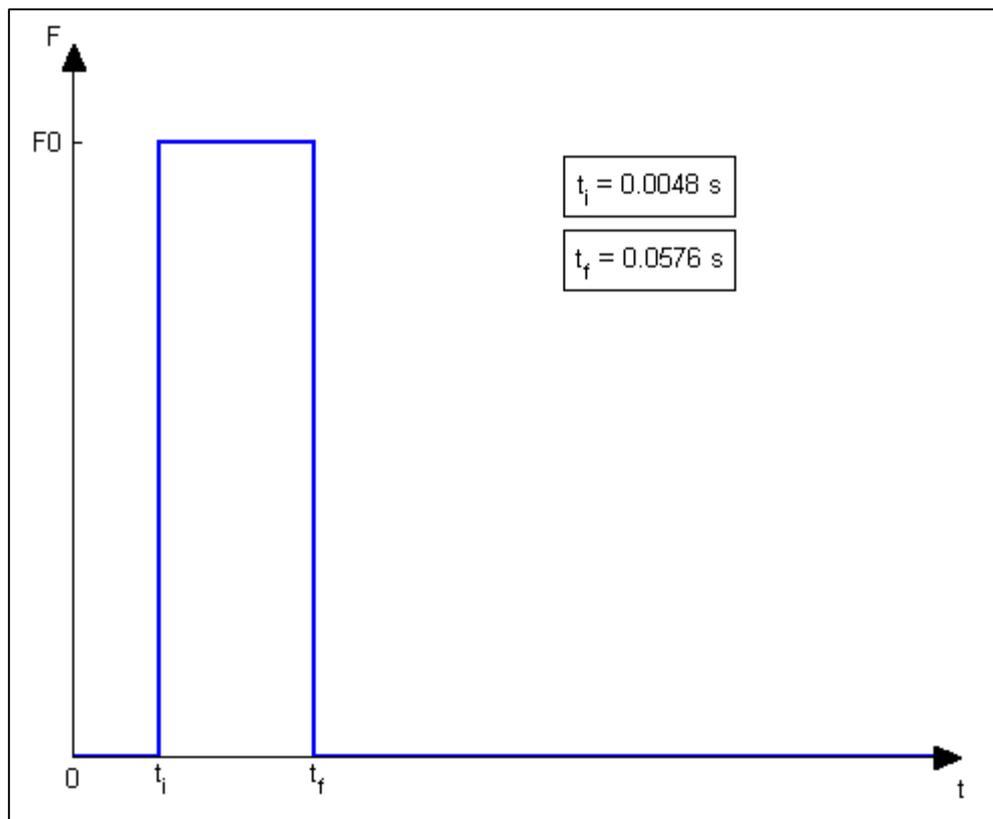


Figura 5.10 - Força pulsada e intervalo de tempo em que actua na estrutura

Este problema pode ser abordado fazendo a aproximação para um sistema massa-mola-amortecedor de apenas 1 grau de liberdade, uma vez que a sua configuração em função do tempo pode ser definida pela deflexão no ponto da extremidade livre ou seja, no nó  $B$  do elemento. Já o nó  $A$  sendo um nó fixo, será um ponto nulo do sistema no que diz respeito aos deslocamentos, velocidades e acelerações locais, independentemente do instante a ser analisado.

Adoptando a equação de equilíbrio dinâmico para um sistema não amortecido ( $[c] = 0$ ), apresentada em (5.25), convém primeiramente calcular as constantes associadas à matriz rigidez  $[k]$  e à matriz massa  $[m]$  do sistema vibratório.

Como a discretização se faz com um único elemento, então a matriz global que contém simultaneamente as componentes de rigidez e massa da viga, é equivalente à respectiva matriz executável elementar (referente à formulação mista) que funciona para problemas dinâmicos e é exposta na equação (5.59).

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} & \frac{L}{6EI} - \frac{1}{LGA_c} \\ \frac{L}{6EI} - \frac{1}{LGA_c} & \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\rho A_c L}{3} & \frac{\rho A_c L}{6} \\ \frac{\rho A_c L}{6} & \frac{\rho A_c L}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Posto isto, ao se estabelecer a aplicação das condições contorno,  $M_B = 0$  e  $w_A = 0$ , as linhas e colunas relacionadas serão suprimidas, ficando a matriz reduzida na forma:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\rho A_c L}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

A matriz de massa é extraída directamente da equação (5.60) e toma o valor constante de  $[m] = \left[ \frac{\rho A_c L}{3} \right] = 786 \text{ kg}$ . Já o cálculo da matriz rigidez é feito por meio da definição (5.50), ou seja:

$$[k] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LGA_c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EIGA_c}{(3EI + L^2GA_c)L} \end{bmatrix} = 3.8452 * 10^6 \text{ Pa} \quad (5.61)$$

Apuradas as constantes de rigidez e de massa da estrutura, a etapa imediata consiste em calcular as frequências naturais do sistema vibratório.

Como estamos perante só um grau de liberdade, então só conseguiremos calcular a frequência referente ao primeiro modo natural de vibração.

Relembrar que em problemas de vibração forçada, dependendo do ponto de aplicação de um impulso, o sistema será excitado de uma maneira particular, podendo até haver uma conjugação de mais do que um modo de vibração no mesmo problema dinâmico. No caso de vigas com dois apoios nas extremidades, o primeiro modo de vibração é “accionado” quando o impulso se dá no meio da viga.

Já para sistemas com só um apoio, a posição relativa ao primeiro modo de vibração acontece na extremidade livre, como é o caso deste problema.

Através do comando do MATLAB,  $eig(k, m)$ , já descrito neste trabalho para o cálculo das velocidades angulares naturais, obtém-se:

$$\omega = 69.94 \text{ rad/s} \quad (5.62)$$

Uma revolução é igual a  $2\pi$  radianos, daí o período ser definido por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.0898 \text{ s} \quad (5.63)$$

No estudo do movimento sinusoidal definimos período, representado por  $T$ , como sendo o tempo gasto para que o movimento sinusoidal se repita com as mesmas características. Sendo assim, podemos concluir que o período nada mais é do que o tempo gasto para o sistema retornar à mesma posição.

Para se fazer uma análise mais precisa da resposta dinâmica da estrutura, então o tamanho do passo tem de ser menor que um quarto do período natural da viga, que corresponde ao movimento do sistema da sua posição de equilíbrio até à posição de maior deslocamento.

Optou-se por um tamanho do passo 16 vezes inferior ao período do primeiro modo de vibração da estrutura.

$$\Delta t = \frac{T}{16} = 0.0056 \text{ s} \quad (5.64)$$

A estrutura parte do estado de repouso no instante  $t = 0$ . A partir do momento em que a viga em consola é excitada por uma carga, valores de aceleração, velocidade e deslocamento do sistema podem ser calculados com o auxílio das equações (5.57), (5.55) e (5.54) respectivamente, sendo que para determinar as incógnitas na iteração seguinte é preciso dispor previamente dos valores dessas mesmas incógnitas na iteração anterior.

Aqui ficam as saídas das primeiras 5 iterações do problema dinâmico que está a ser estudado:

**Tabela 5.2 – Resposta do sistema para as 5 primeiras iterações na extremidade livre**

<b>Iterações</b>	<b><math>F(t)</math> (N)</b>	<b><math>w</math> (m)</b>	<b><math>\dot{w}</math> (m)</b>	<b><math>\ddot{w}</math> (m)</b>
<b>0</b>	0	0	0	0
<b>1</b>	500	4.83E-06	1.72E-03	6.13E-01
<b>2</b>		2.34E-05	4.90E-03	5.22E-01
<b>3</b>		5.78E-05	7.36E-03	3.53E-01
<b>4</b>		1.03E-04	8.72E-03	1.32E-01

Ao se fazer o uso de um elemento de viga misto, as funções de interpolação serão do primeiro grau, o que significa que a ligação entre os dois nós se fará por intermédio de um segmento de recta.

Seguindo os dados da Tabela 5.2 pode-se determinar graficamente as 5 primeiras posições temporais, estabelecidas pelo tamanho do passo de iteração, de uma viga encastrada na sua posição inicial e submetida a uma força impulsiva.

Da análise da Tabela 5.2, conclui-se que o sistema vibratório ainda não teria alcançado o instante de deslocamento máximo.

Esta conclusão tem como base o facto de os valores de aceleração ainda se encontrarem positivos, o que significa que a estrutura continua a ganhar velocidade e a afastar-se cada vez mais da sua posição de equilíbrio.

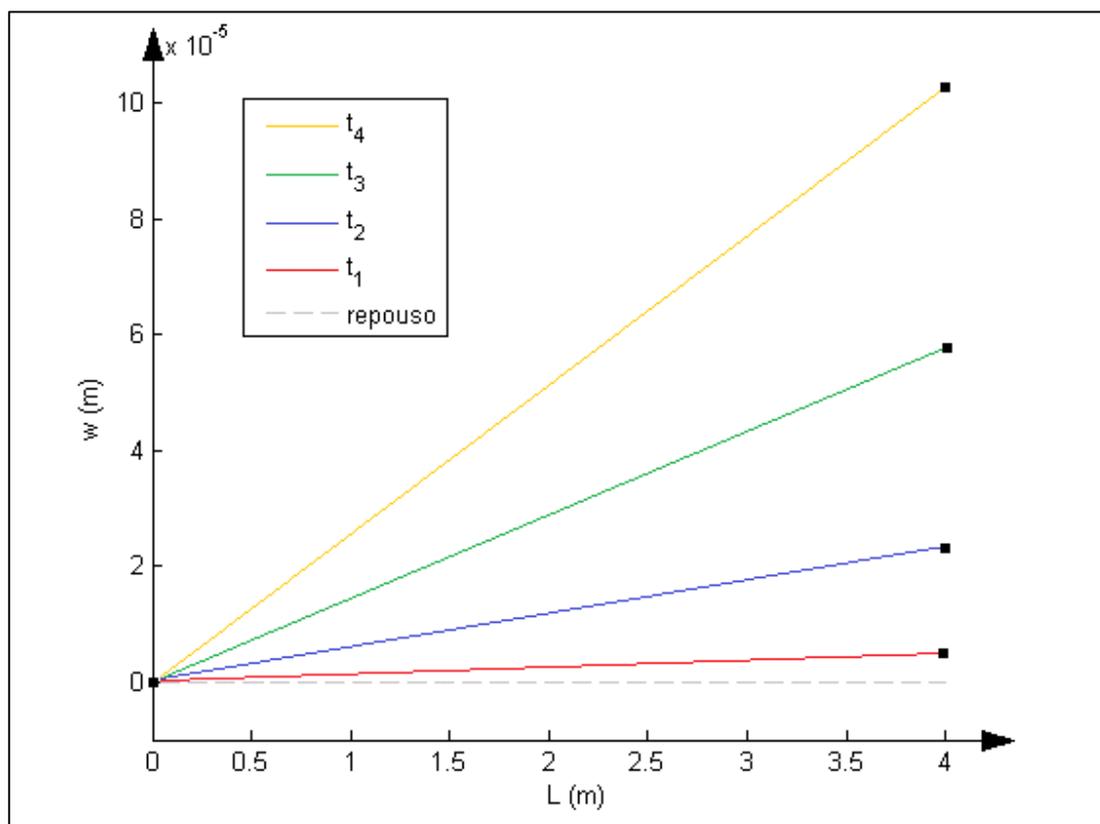


Figura 5.11 – Cálculo aproximado da propagação das ondas de flexão nas 5 primeiras iterações – 1 elemento viga

Prosseguindo o estudo (resultados apresentados em anexo – Anexo IX), poder-se-á prever uma diminuição da velocidade (valores negativos de aceleração) à medida que a deflexão máxima é alcançada. A partir do ponto máximo de deslocamento, o sistema vibratório começa a produzir um movimento descendente que coincide com a inclusão de valores de velocidade de sinal negativo.

Estas variações, em termos vectoriais, das velocidades e acelerações permitem calcular o comportamento do nó correspondente à extremidade livre no que diz respeito à sua posição segundo o eixo vertical, em função do tempo. A Figura 5.12 apresenta a evolução da posição do nó *B* para as primeiras 100 iterações temporais.

Verifica-se deste modo que inicialmente o sistema é deslocado através da força impulsiva aplicada (amplitude de onda mais pronunciada), para posteriormente, já sem a contribuição da carga, o sistema entrar num modo de vibração harmónica simples, uma vez que se está a considerar uma estrutura não amortecida.

Tal como em problemas estáticos, a precisão da solução dada pelo método de elementos finitos é tanto maior quanto mais refinada for a malha.

Recapitulando o estudo dinâmico estabelecido de forma analítica, para se obter a menor frequência angular natural exacta da estrutura tem-se para uma viga encastrada numa só extremidade:

$$\omega = \beta_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta_1 L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} = 81.97 \text{ rad/s} \quad (5.65)$$

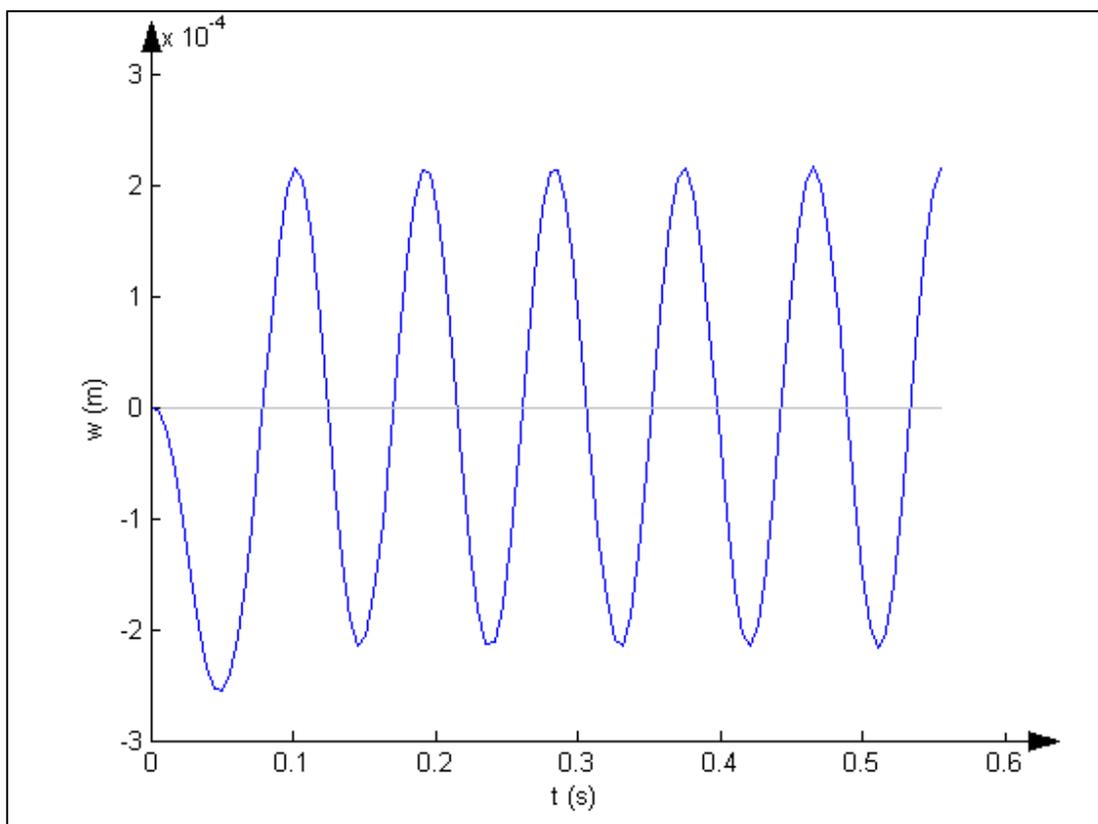


Figura 5.12 - Deslocamento do nó B em função do tempo

Este valor é diferente dos  $69.94 \text{ rad/s}$  obtidos via MEF com a implementação de uma malha contendo um único elemento. Esta adversidade é resolvida com o aumento do número de elementos (optou-se por reformular a análise, agora com 80 elementos de viga). De realçar que da mesma forma que a frequência angular mudou (relação entre malha de 1 elemento e 80 elementos), os passos de iteração que representavam um valor temporal 16 vezes menor que o período de cada análise também apresentaram valores diferentes. Assim para um número mais elevado de elementos temos:

$$\Delta t = \frac{0.0766}{16} = 0.0048 \text{ s} \quad (5.66)$$

Esta malha é igualmente mais que suficiente para obter a deformada exacta e a propagação das ondas de flexão. Para os 4 primeiros instantes estabelecidos

apresentam-se os campos de deslocamentos de forma sequencial através da Figura 5.13, Figura 5.14, Figura 5.15 e Figura 5.16.

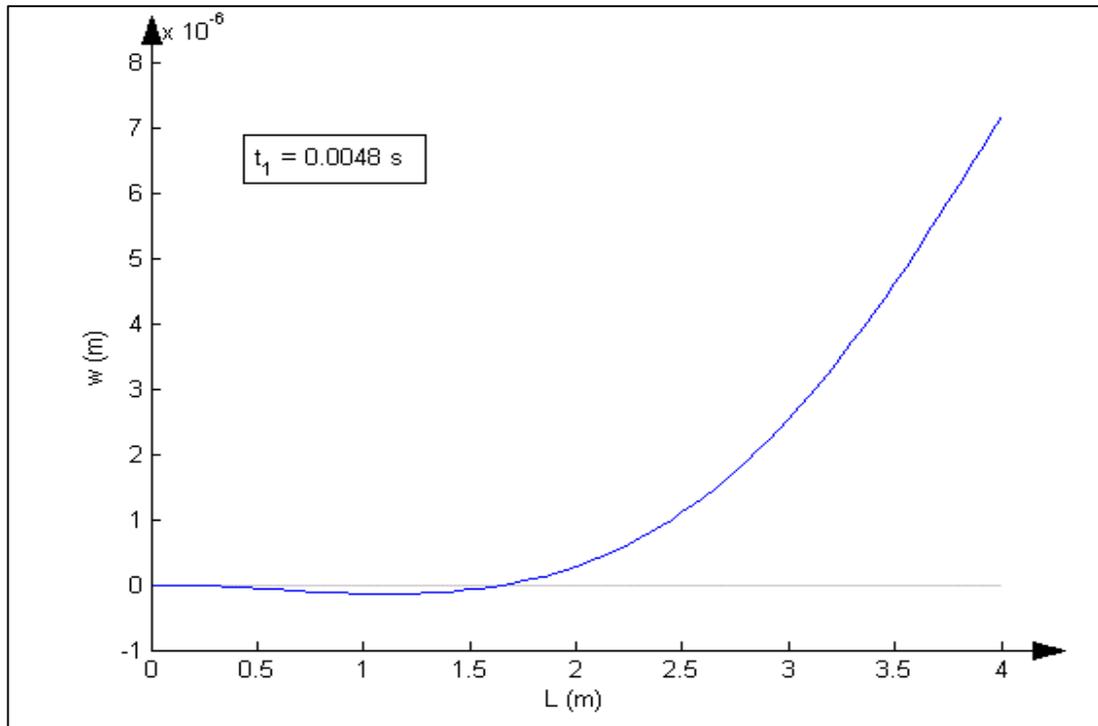


Figura 5.13 – Deformada da viga para i instante  $t=0.0048$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

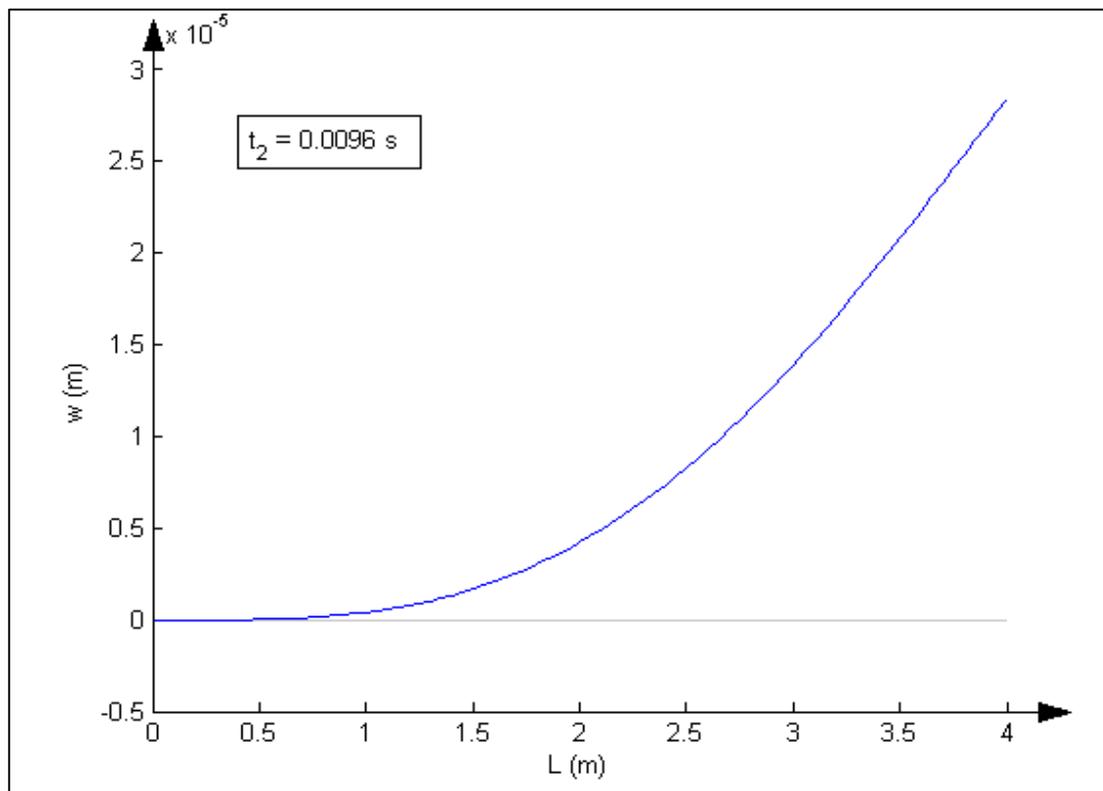


Figura 5.14 - Deformada da viga para i instante  $t=0.0096$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

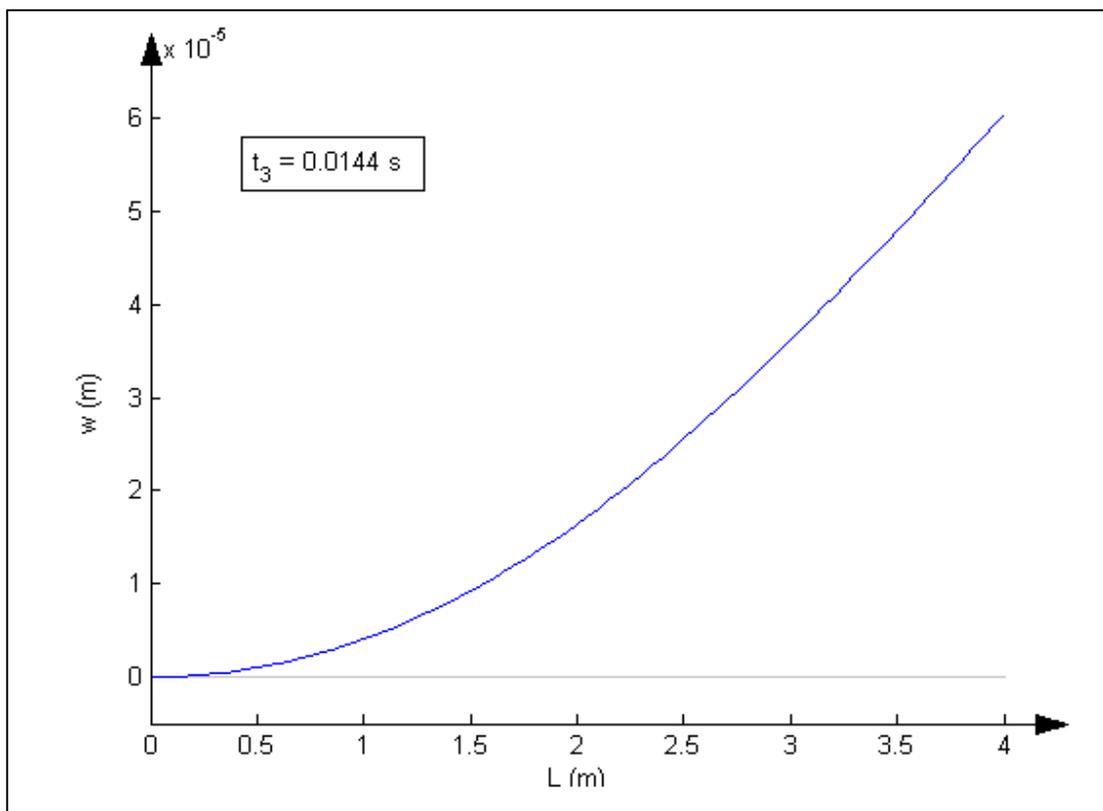


Figura 5.15 - Deformada da viga para i instante  $t=0.0144$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

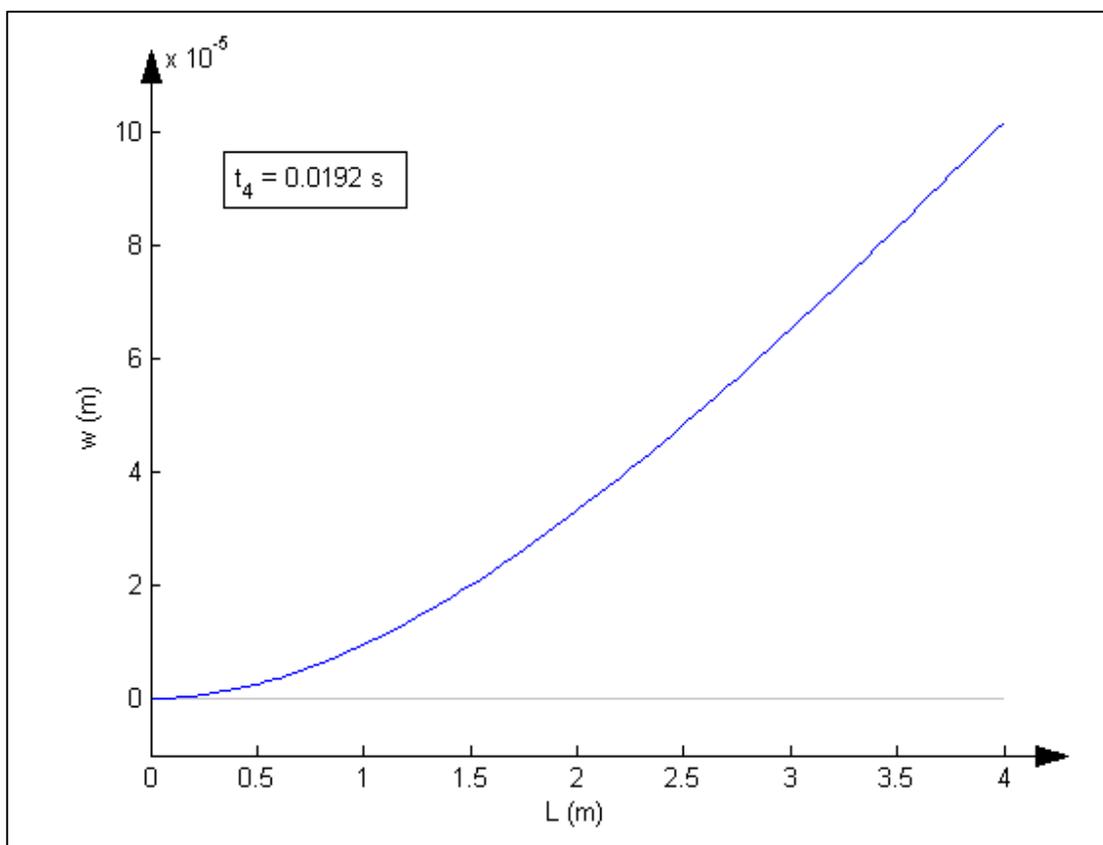


Figura 5.16 - Deformada da viga para i instante  $t=0.0192$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

### 5.2.5. Campos de Tensão - Análise Dinâmica

Através do algoritmo de integração temporal e da equação do movimento foram calculados os deslocamentos nodais (81 nós se considerarmos uma discretização composta por 80 elementos finitos), para cada instante de tempo considerado.

Numa perspectiva de estudo dos campos de tensões normais, obtidos pela equação (4.40), precisaremos dos graus de liberdade associados aos momentos flectores. Uma vez que a análise dinâmica está a ser realizada pela aplicação da forma compacta do modelo de formulação mista, então terá de se estabelecer o procedimento inverso à condensação dos momentos. Deste modo, é possível retirar os momentos nodais através dos deslocamentos transversos, previamente calculados, a partir da equação (5.46).

A Figura 5.17 ilustra o campo de tensões normais do sistema para instantes de tempo diferentes. Como se pode observar o ponto máximo de tensão ocorre na extremidade fixa, causado pela restrição tanto dos deslocamentos como das rotações características deste tipo de apoios.

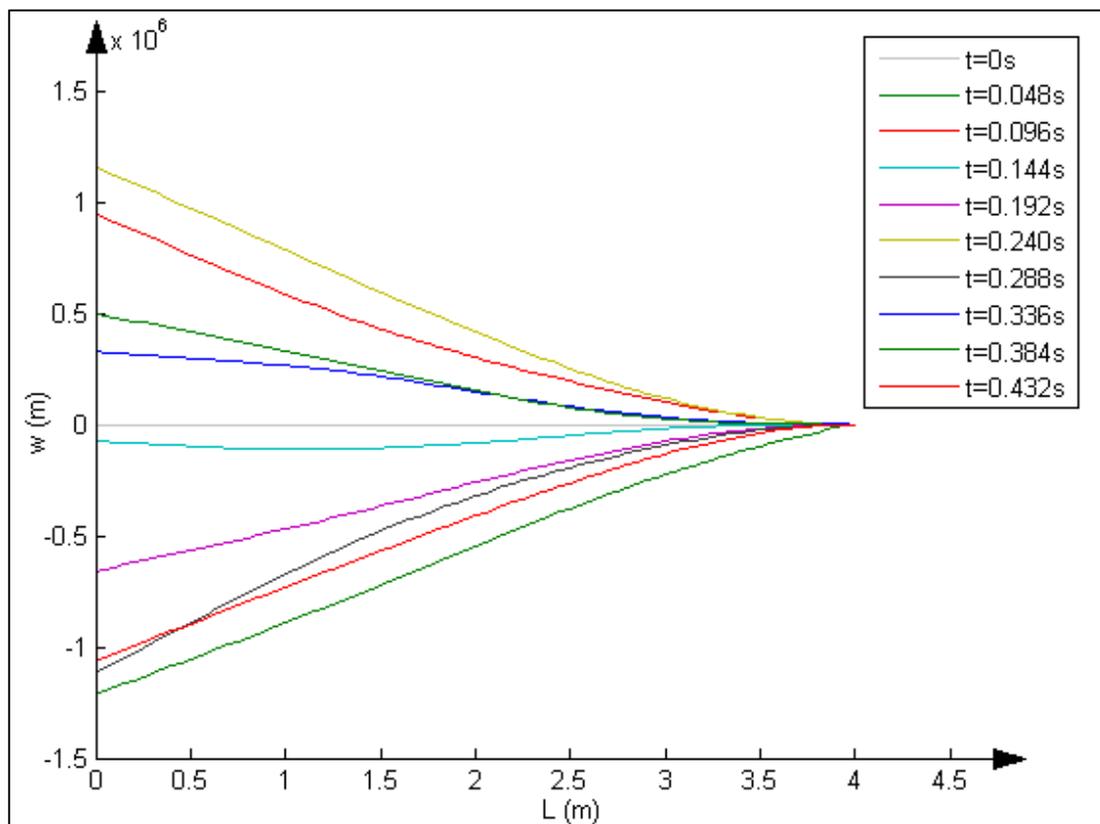


Figura 5.17 - Tensão normal da viga em consola para 10 diferentes instantes

A derivação da equação de Euler-Bernoulli envolve a seguinte hipótese física - a energia envolvida na deformação por corte é desprezada, e desta forma as tensões de corte ou tensões tangenciais são excluídas da análise dinâmica.

Uma hipótese é intercalar neste problema um modelo de corte - modelo de Timoshenko - e desta forma, conjugando as equações de compatibilidade de ambas as

teorias, poderemos afirmar que campo de deformação pode ser obtido pela seguinte definição.

$$\sigma_{zx} = \kappa \frac{V(x)}{A_c} \Rightarrow \frac{\kappa}{A_c} \frac{dM(x)}{dx} \quad (5.67)$$

O ponto de interesse, não está em saber a distribuição de tensões ao longo da viga, mas em obter um valor absoluto aproximado para o ponto mais crítico do sistema, ou seja, na posição inicial onde se encontra o apoio físico. Isto porque, se a tensão de von Mises definida em (4.42) ultrapassar a tensão de cedência do material,  $\sigma_Y = 210 \text{ MPa}$ , a estrutura em teoria entrará em colapso.

A tensão de von Mises máxima ocorre no instante em que a estrutura atinge o ponto de maior deslocamento (ainda na presença da força transitória aplicada). Mesmo nesse instante os resultados mostram um valor muito abaixo do limite suportado pelo material em causa:

$$\sigma_{VM} = 1.3766 \text{ MPa} \leq 210 \text{ MPa} \quad (5.68)$$

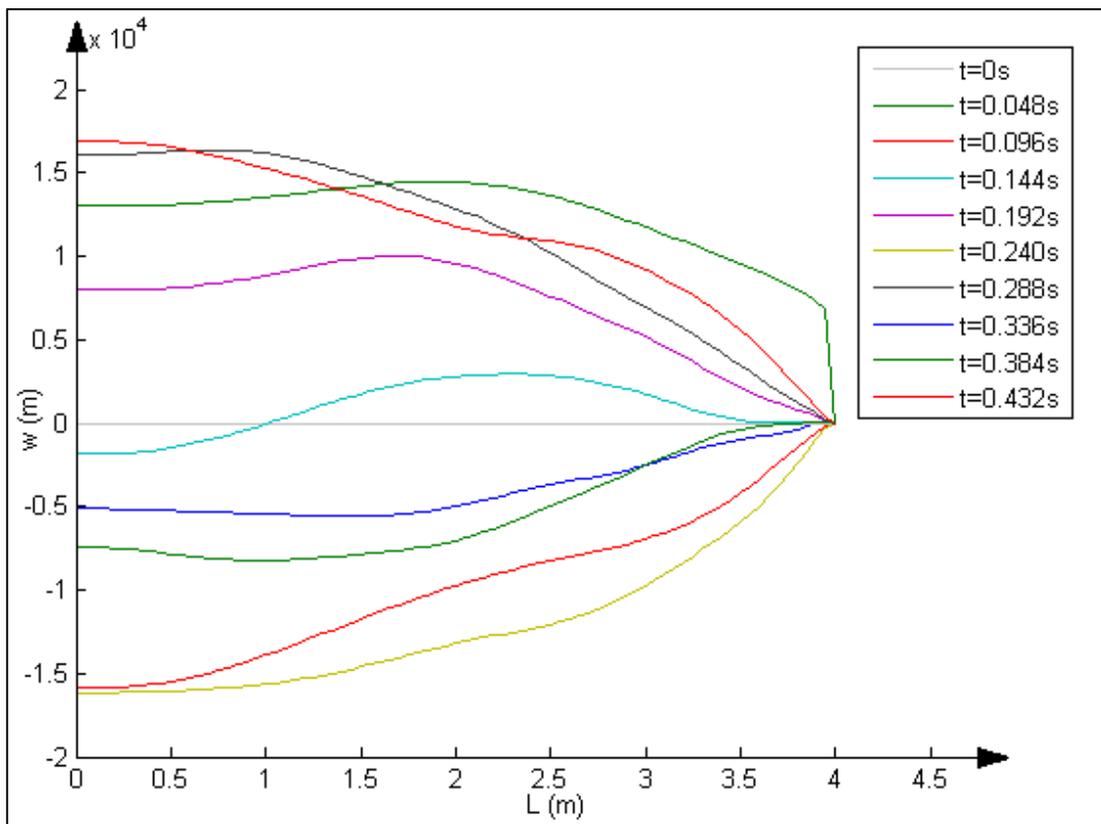


Figura 5.18 - Tensão tangencial da viga em consola para 10 diferentes instantes

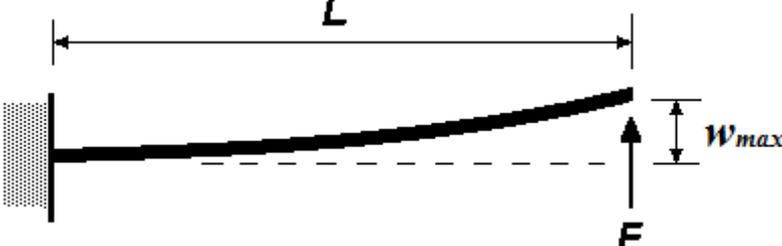
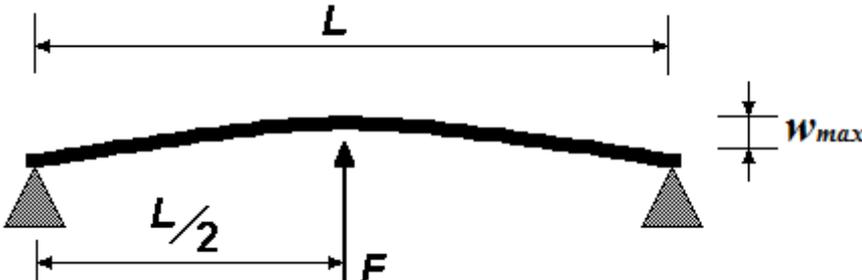
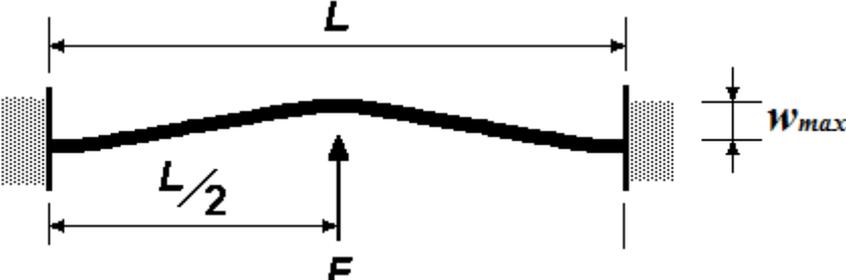
### 5.2.6. Cálculo do Factor Dinâmico

Um dos principais interesses para o estudo da dinâmica estrutural surge, no momento em que se observa que o deslocamento dinâmico transverso é maior que o deslocamento estático transverso, para um problema com as mesmas características. O factor dinâmico é tipicamente referido como o parâmetro que descreve a performance dinâmica deste tipo de problemas (Riecker, Lin and Trethewey, 1996) e é descrito como:

$$F_{din} = \frac{w_{din}}{w_{est}} \quad (5.69)$$

Para aprofundar um bocado mais este tema, optou-se por analisar os casos de estudo que se seguem, de três tipos de problemas estruturais apresentados da Tabela 5.3:

Tabela 5.3 – Deflexão máxima de três tipos de viga (Modelo Euler-Bernoulli) no primeiro modo de vibração

	$w_{max} = \frac{FL^3}{3EI}$
	$w_{max} = \frac{FL^3}{48EI}$
	$w_{max} = \frac{FL^3}{192EI}$

O estudo do factor dinâmico tem principal importância no ponto de deflexão máxima (extremidade livre para o primeiro exemplo e centro da viga para os outros dois exemplos) da viga. A segunda coluna da tabela apresenta valores de deslocamento

transverso, em função da carga aplicada e do tipo de viga, para problemas estáticos de vigas delgadas onde a deformação de corte é pouco relevante (Elliott, [s.d.]).

Usando os mesmos dados apresentados no Exemplo 3, no que diz respeito às dimensões e propriedades mecânicas da estrutura, ao se aplicar um impulso  $F = 500 \text{ N}$  por tempo indefinido, o sistema irá reagir através de um movimento sinusoidal. Com o auxílio do método de elementos finitos e com uma malha de 80 elementos no total, estabeleceu-se o comportamento em função do tempo que o ponto de deflexão máxima produziu, desde o instante de repouso até ao momento em que a viga volta à sua posição de equilíbrio, ou seja metade do período da onda de deformação do sistema vibratório. O tempo do passo será igualmente  $\Delta t = \frac{T}{16}$ .

Para a ajudar à análise dos gráficos (Figura 5.19, Figura 5.20 e Figura 5.21) através do software MATLAB foram retirados os valores de deflexão máxima, dinâmica e estática, e o factor dinâmico para os 3 problemas referidos.

Estes valores podem ser consultados na Tabela 5.4.

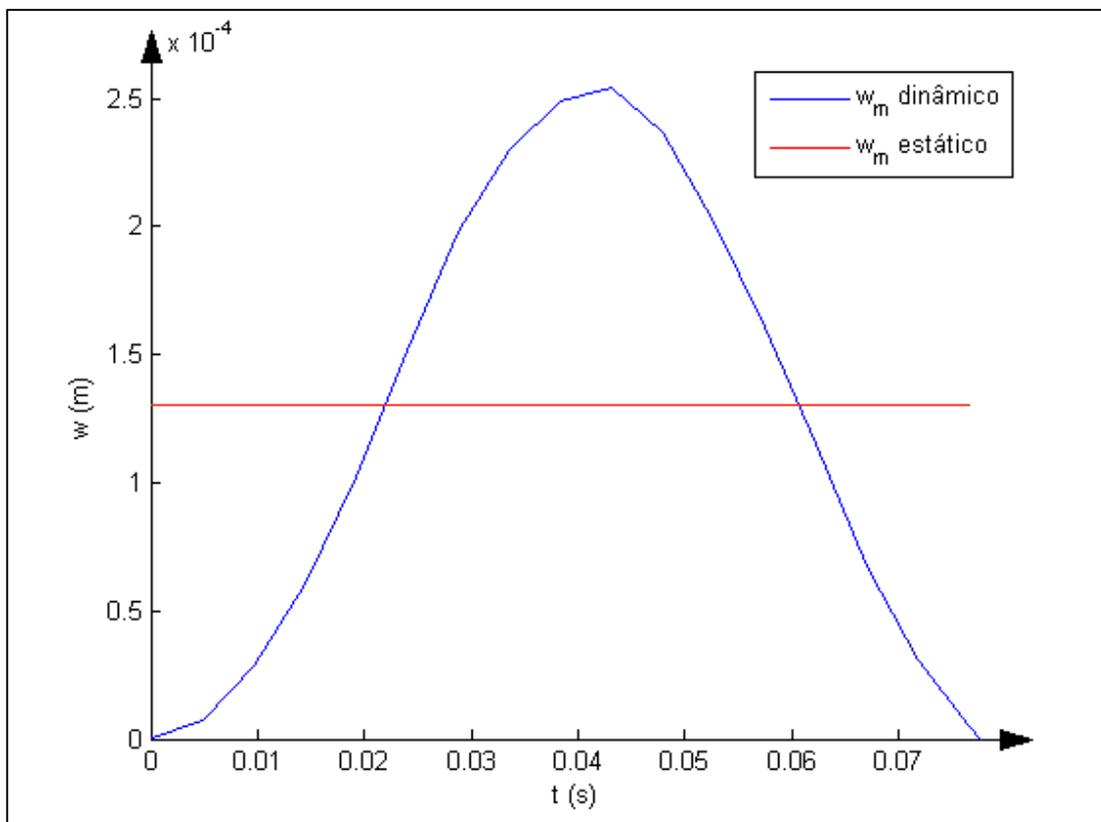


Figura 5.19 – Deslocamento dinâmico da extremidade da viga em consola em comparação com o respectivo deslocamento estático

Conclui-se que a performance dinâmica para estes 3 exemplos é muito semelhante quando se procede à comparação dos valores estáticos respectivos, sendo que tipicamente os valores dinâmicos são aproximadamente duas vezes maiores que os valores estáticos.

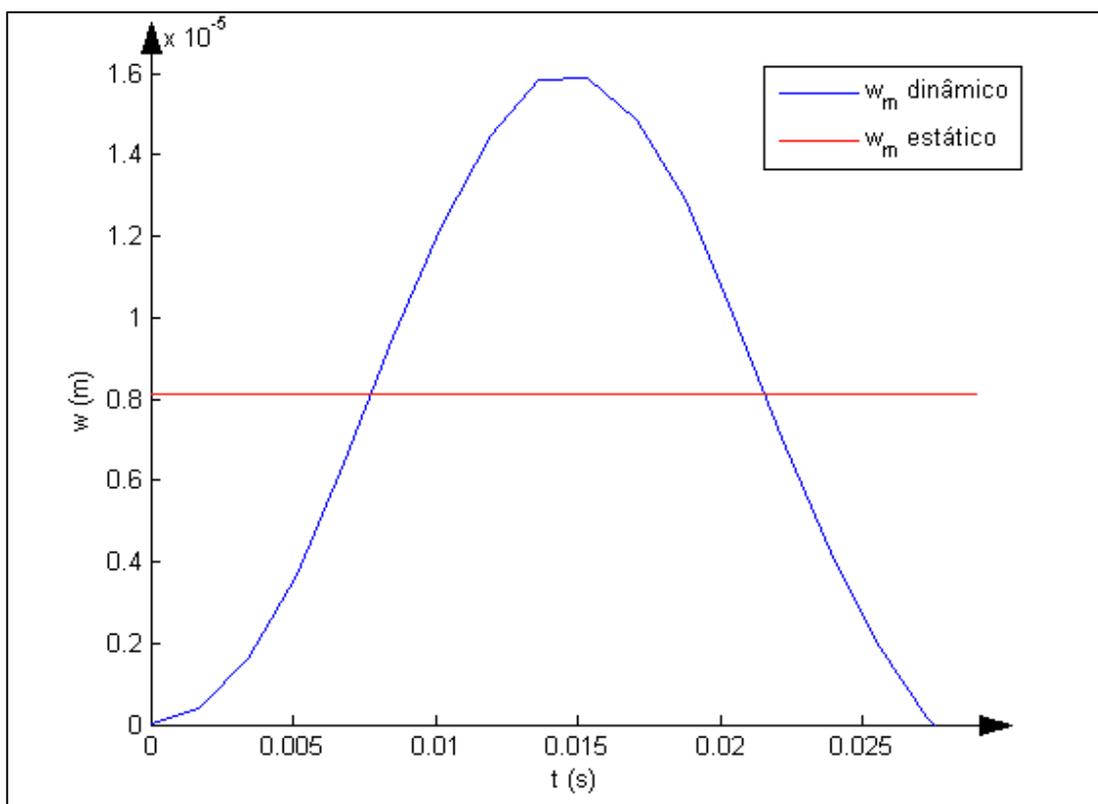


Figura 5.20 - Deslocamento dinâmico do centro da viga simplesmente apoiada em comparação com o respectivo deslocamento estático

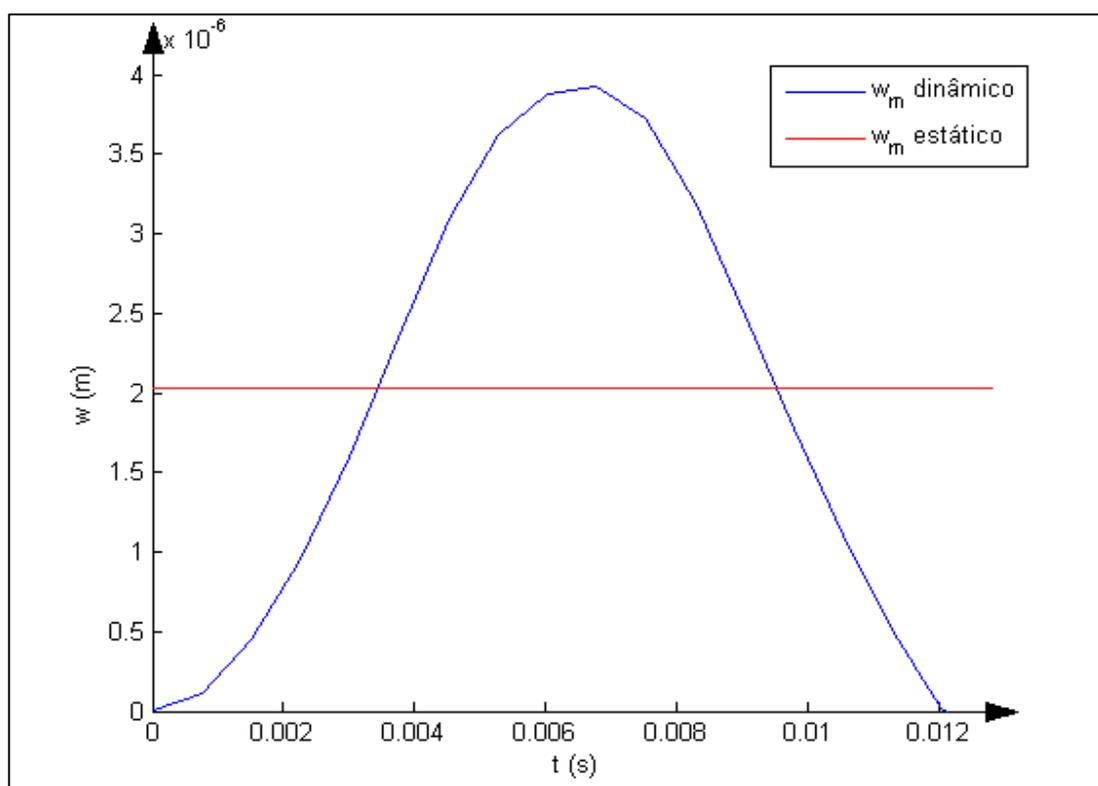


Figura 5.21 - Deslocamento dinâmico do centro da viga duplamente encastada em comparação com o respectivo deslocamento estático

A distinção entre os três casos estudados dá-se entre os valores absolutos de deflexão máxima. O deslocamento que uma determinada estrutura poderá adquirir, depende da velocidade que a força impulsiva consegue induzir no sistema vibratório.

Posto isto, uma rápida conclusão dos resultados diz-nos que quanto mais restrições forem impostas pelas condições fronteiras, mais condicionadas estarão as velocidades e conseqüentemente a viga deslocar-se-á menos da sua posição de repouso.

Tabela 5.4 – Factor dinâmico para as 3 diferentes vigas no ponto de deflexão máxima

	$w_{estático} (m)$	$w_{dinâmico} (m)$	$\dot{w}_{din. máximo} (m/s)$	$F_{dinâmico}$
<b>Viga encastrada</b> ( $x = 0$ )	1.3003E-04	2.5592E-04	10.93E-03	1.9682
<b>Viga simplesmente apoiada</b>	8.1270E-06	1.6023E-05	1.85E-03	1.9716
<b>Viga duplamente encastrada</b>	2.0317E-06	3.9997E-06	1.06E-03	1.9716

### 5.3. SOLUÇÃO ANALÍTICA VS. SOLUÇÃO NUMÉRICA

Como já referido, em estruturas dinâmicas, devido à dificuldade em obter as soluções analíticas correspondentes, é pertinente a utilização de métodos aproximados que nos permitam chegar a uma solução válida.

Contudo, quando possível, pode ser de alguma importância a comparação da solução exacta com os resultados obtidos numericamente.

Assumindo o exemplo anterior da viga simplesmente apoiada que entra num regime de vibração forçado (carga impulsiva no centro da viga), pode-se verificar pela Figura 5.20 que a deflexão máxima atinge um valor  $w_{máx} = 1.6023 * 10^{-5} m$ , sendo que o sistema vibra no primeiro modo de vibração.

Relembrando, a solução para os deslocamentos, no modo de vibração  $n$ , para uma viga simplesmente apoiada, esta pode ser traduzida na forma da equação (5.5):

$$w(x, t) = W_n(x) \sin(\omega t) = \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \sin(\omega t) \quad (5.70)$$

A equação da deformada da viga, quando submetida a uma carga concentrada de valor constante  $F_0$  (num período  $\Delta t$ ), é dada por:

$$\frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} = \frac{F_0}{EI} \quad (5.71)$$

Se tivermos em conta que a deformada da viga no instante que a estrutura atinge a deflexão máxima apresenta as seguintes peculiaridades:

$$\sin(\omega t) = 1 \quad (5.72)$$

$$w(x, t) = W_n(x) = \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \quad (5.73)$$

Temos então que a quarta derivada em ordem a  $x$  dessa deformada é igual à razão entre a carga que excita a estrutura no respectivo instante e as propriedades da viga, sendo que a constante  $C$  coincide com o deslocamento máxima provocado ao sistema.

Desta forma, ao derivar  $W_n(x)$  quatro vezes, obtém-se:

$$C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{F_0}{EI} \quad (5.74)$$

O ponto de contacto entre a carga e a estrutura dá-se para  $x = \frac{L}{2}$ , sendo nesta posição que se verifica o valor máximo de deflexão do sistema, como indicado na Figura 5.22.

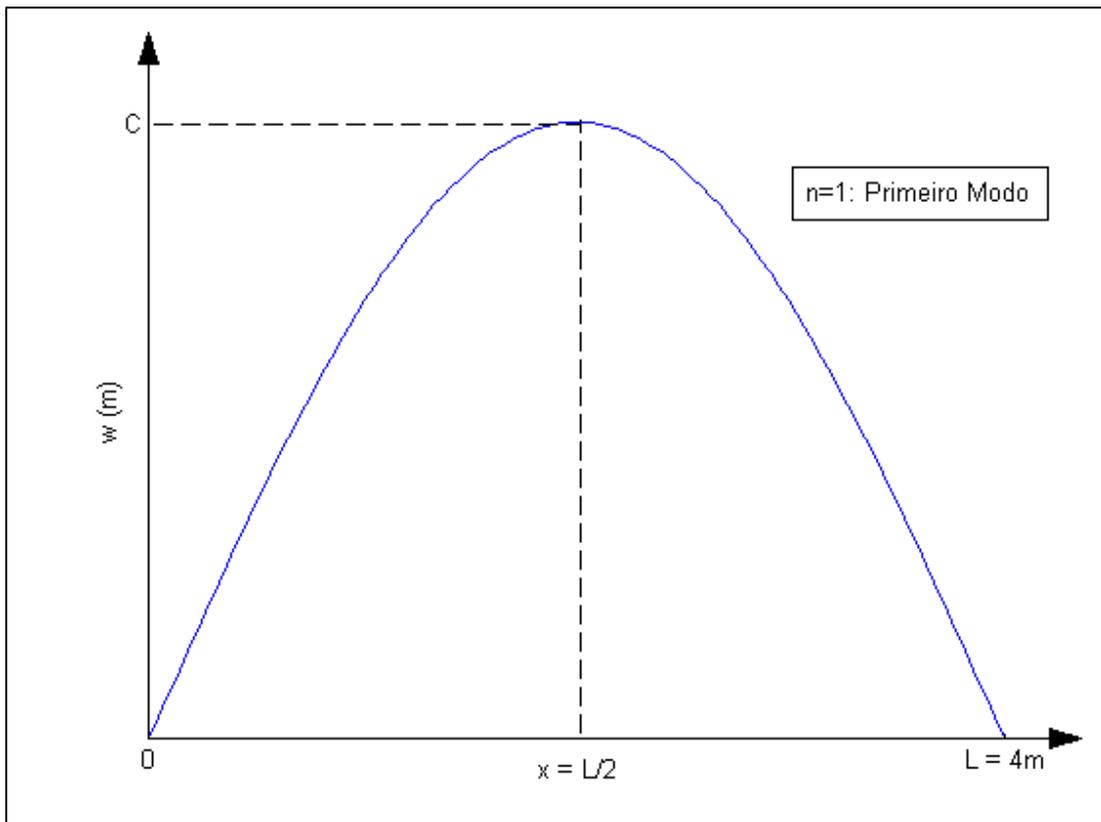


Figura 5.22 - Deformada máxima para o primeiro modo vibração  $n=1$

Deste modo, sabendo que se trata de uma viga que se move no seu primeiro modo de vibração,  $n = 1$ , pode-se concluir que:

$$C \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{EI} \Rightarrow C = w_{m\acute{a}xima} = 1.6019 * 10^{-5} m \quad (5.75)$$

No âmbito da avaliação de uma solução aproximada estima-se o erro relativo (métodos numéricos ou resultados experimentais em comparação com a respectiva solução exacta, são considerados precisos, para todos os resultados cujo erro relativo não exceda os 10%), sendo que este é calculado por meio da seguinte expressão:

$$Erro\ relativo = \left| \frac{\Delta s}{s_{analitica}} \right| * 100\% = \left| \frac{s_{analitica} - s_{aproximada}}{s_{analitica}} \right| * 100\% \quad (5.76)$$

Trabalhando com os valores em causa temos:

$$Erro\ relativo = \left| \frac{1.6019 * 10^{-5} - 1.6023 * 10^{-5}}{1.6019 * 10^{-5}} \right| * 100\% \approx 0.025\% \quad (5.77)$$

O resultado via MEF teve uma precisão acima dos 99%, o que significa que utilizando uma malha suficientemente refinada composta por elementos de viga mistos, o resultado por aí obtido irá convergir para a solução analítica associada (neste caso tanto analiticamente como numericamente a teoria utilizada é a teoria clássica de Euler-Bernoulli).

#### 5.4. TEORIA DE TIMOSHENKO EM ANÁLISE DINÂMICA

Até agora, a análise do comportamento dinâmico foi elaborada exclusivamente com o modelo de deformação Euleu-Bernoulli, quer através de métodos numéricos (MEF – formulação mista), quer na comparação com soluções analíticas em dinâmica ou em publicações que se guiam na teoria clássica de deformação.

A escolha do modelo de deformação (Euler-Bernoulli ou Timoshenko) mais apropriado na análise de vibrações transversais de uma dada estrutura, depende da proporção da sua altura  $h$ , com ao vão da viga  $L$ .

Para baixos valores do coeficiente  $L/h$ , admite-se que o modelo de Timoshenko deve ser empregue em detrimento das vigas Euler-Bernoulli. No entanto, mesmo para valores de  $L/h$ , a utilização de elementos de viga Timoshenko traz resultados mais consistentes em comparação aos elementos de viga Euler-Bernoulli, especialmente para altas frequências de vibração.

#### **Exemplo 4:**

Por forma a comparar os dois modelos de deformação, apresenta-se o caso de estudo de uma carga de massa  $m$ , que se move ao longo da viga simplesmente apoiada nas extremidades. A este problema pode-se estabelecer uma analogia com a análise dinâmica da estrutura, quando veículos se deslocam sobre pontes ou viadutos por exemplo.

O caso de estudo apresenta-se por meio da Figura 5.23 que ilustra uma carga concentrada correspondente ao peso de um corpo rígido,  $F = mg$ , que se move a velocidade constante  $v$ . O movimento da carga é feito desde a extremidade esquerda ( $x = 0$ ) até à outra extremidade da viga ( $x = L$ ), provocando um comportamento dinâmico na viga, à medida que a posição local  $\bar{x}$ , onde se encontra a carga concentrada, vai variando.

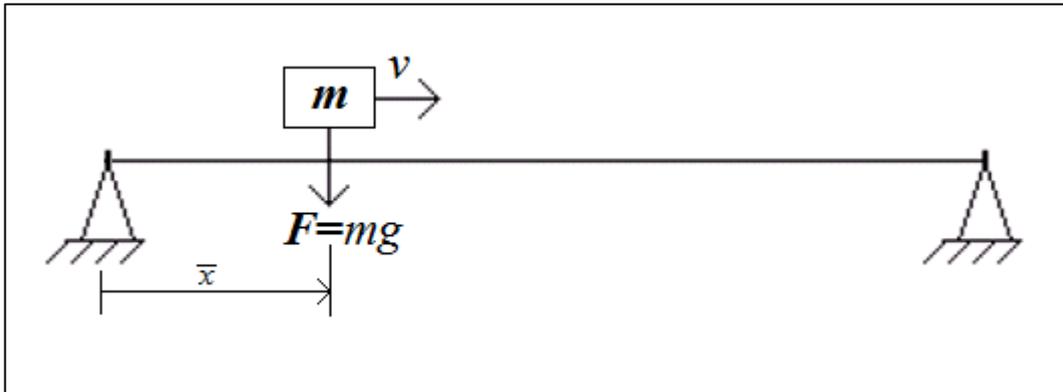


Figura 5.23 - Análise dinâmica de uma viga contínua submetida a uma carga móvel – exemplo 4

Apresentam-se de seguida os dados do problema:

Carga aplicada:

- $F = 10 \text{ kN}$

Dimensões da viga:

- $b = 0.3 \text{ m}$
- $h = 0.8 \text{ m}$
- $L = 4 \text{ m}$

Propriedades

- $E = 210 \text{ GPa}$

Material:

(Aço com 0.2% de carbono)

- $v = 0.3$
- $\sigma_Y = 210 \text{ MPa}$
- $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$

Recorrendo a elementos de viga de parâmetros mistos para os dois modelos de deformação em questão, a discretização do problema foi expressa através da divisão do domínio da viga em 80 elementos de igual dimensão com a seguinte medida:

$$L_e = \frac{L}{80} = 0.05 \text{ m} \quad (5.78)$$

A locomoção da carga provoca a alteração do ponto de contacto, sendo que o rastreio da resposta do sistema vibratório é feito em intervalos de tempo sucessivos  $\Delta t$ , num total de 100 iterações.

Deste modo, como o carregamento não se limita a um determinado nó (80 elementos são equivalentes a 81 nós), é necessária a sua representação ao longo do vão da viga, em função da iteração que está a ser analisada.

Para simplificação do problema estabeleceu-se que por cada iteração prescrita, o corpo rígido se transfere de um determinado nó para o nó imediatamente a seguir. Desta forma, a matriz das forças em função do tempo  $[F(t)]$  tem a forma de uma matriz diagonal como se verifica pela Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Matriz da força impulsiva

		Iteração		
		1	...	100
Nós	1	$F$	0	0
	⋮	0	⋮	0
	81	0	0	$F$

A primeira diferença observada entre os dois modelos ocorreu nos valores das frequências angulares naturais obtidas para a estrutura em questão.

Tendo como base os dados apresentados na Tabela 5.6 o modelo de Euler-Bernoulli mostra uma maior dispersão nos valores de velocidade angular.

Tabela 5.6 – Primeiras frequências angulares naturais do sistema para os dois modelos de deformação

	<i>Euler – Bernoulli</i> (rad/s)	<i>Timoshenko</i> (rad/s)
$\omega_1$	7.3643E02	7.0131E02
$\omega_2$	2.9469E03	2.4810E03
$\omega_3$	6.6347E03	4.7821E03
$\omega_4$	1.1806E04	7.2581E03
$\omega_5$	1.8468E04	9.7682E03
$\omega_6$	2.6631E04	1.2268E04
$\omega_i$	⋮	⋮
$\omega_{50}$	5.7232E05	1.3236E05

Esta afirmação pode ser justificada com o facto deste modelo ser mais refinado em relação à teoria clássica em dois aspectos. O primeiro aspecto, e já analisado em problemas estáticos, diz respeito à consideração da distorção da secção transversal. O segundo ponto, exclusivo para os problemas dinâmicos, é a inclusão dos momentos de inércia na equação relativa à energia cinética (5.29).

Em termos gráficos, a Figura 5.24 - Evolução das frequências naturais para os dois modelos apresenta a evolução do quociente das frequências naturais angulares para os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Conclui-se, para este problema, que dispendo de uma ordem crescente de frequências naturais a discrepância as velocidades angulares associadas, calculadas pelos dois modelos, vai aumentando de uma forma quase linear até estabilizar num quociente no valor de aproximadamente  $\omega_E/\omega_T = 350$ .

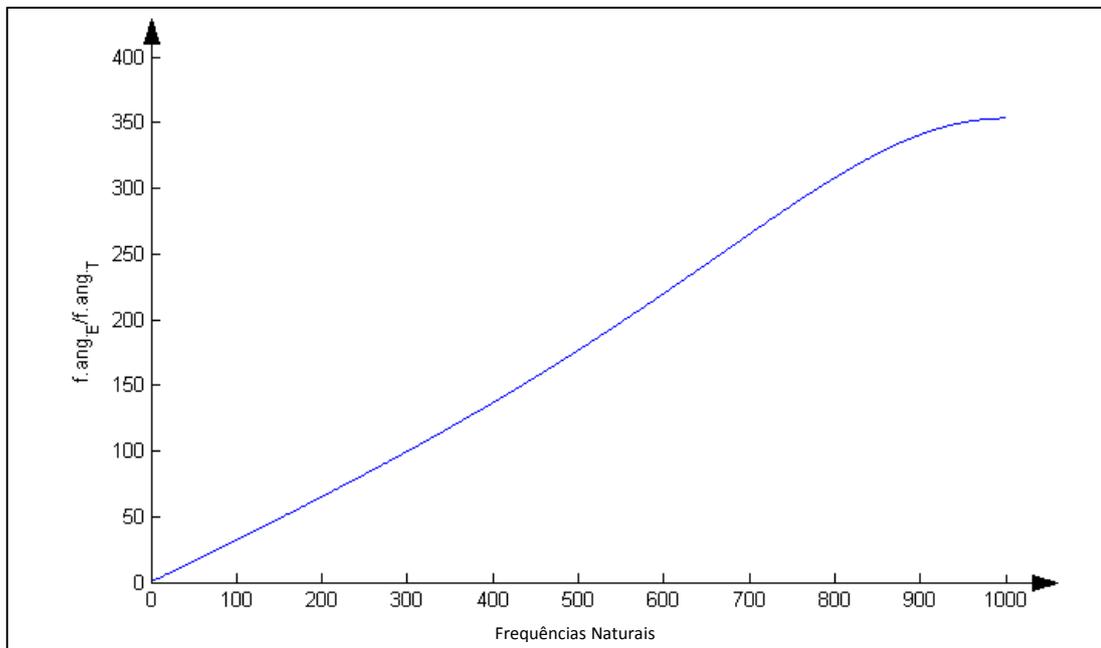


Figura 5.24 - Evolução das frequências naturais para os dois modelos

Deste ponto vista, então podemos afirmar que a propagação das ondas de flexão apresenta-se de uma forma mais correcta em vigas Timoshenko quando comparadas com as vigas Euler-Bernoulli, especialmente para frequências mais elevadas.

Voltando ao problema da carga móvel, definiu-se um passo temporal adequado às necessidades de uma análise minimamente precisa para a estrutura dinâmica em específico, no valor de  $\Delta t = 5.5 * 10^{-4} s$ , o que perfaz um valor de velocidade constante para o corpo rígido de:

$$v = \frac{L_e}{\Delta t} \approx 90.91 \text{ m/s} \quad (5.79)$$

Apresentam-se de seguida uma sequência de figuras, com o intuito de comparar a evolução das deformadas para os dois modelos abordados, em diferentes momentos do problema dinâmico.

Como se pode constatar, existem diferenças tanto a nível da geometria da deformada, como dos valores absolutos de deflexão que são maiores para vigas Timoshenko, o que provoca dois comportamentos dinâmicos distintos consoante o modelo de deformação utilizado. A discrepância mais evidente acontece no nó onde a carga móvel se concentra num determinado instante, pois a deformação é mais evidente em redor desse nó quando utilizada a teoria de Timoshenko.

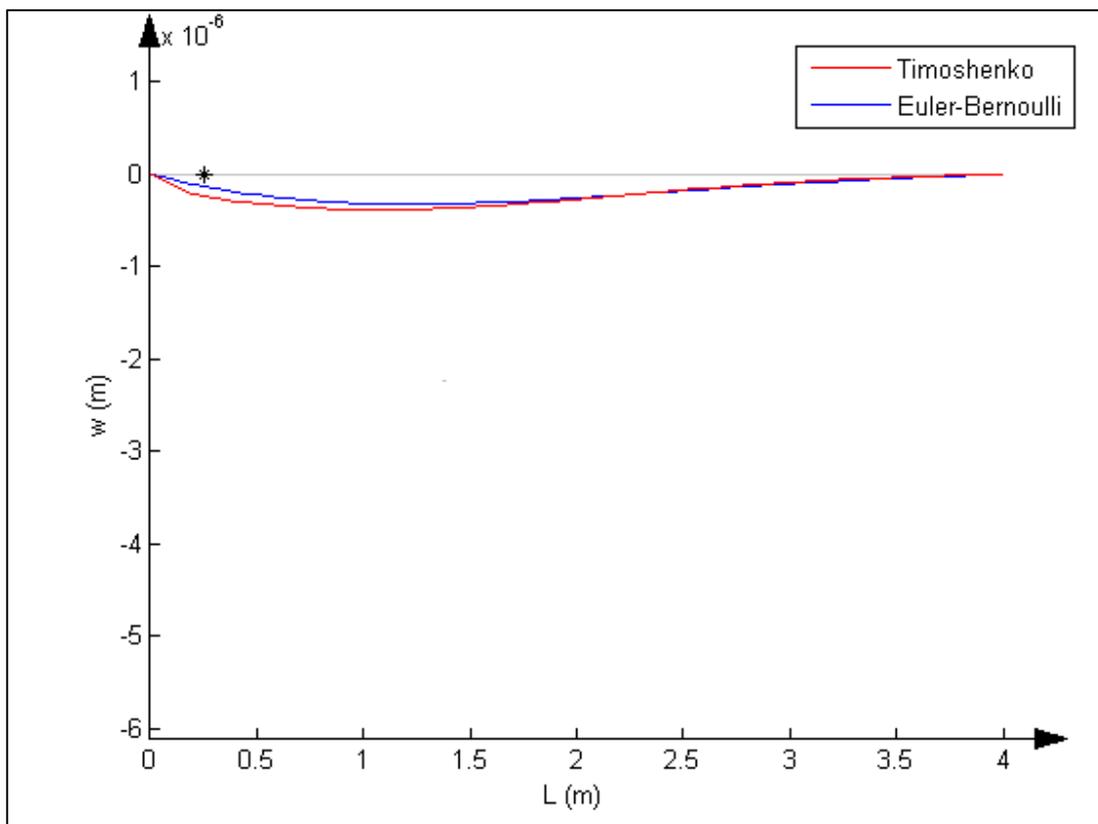


Figura 5.25 – Deformada da viga para  $t=0.0028$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

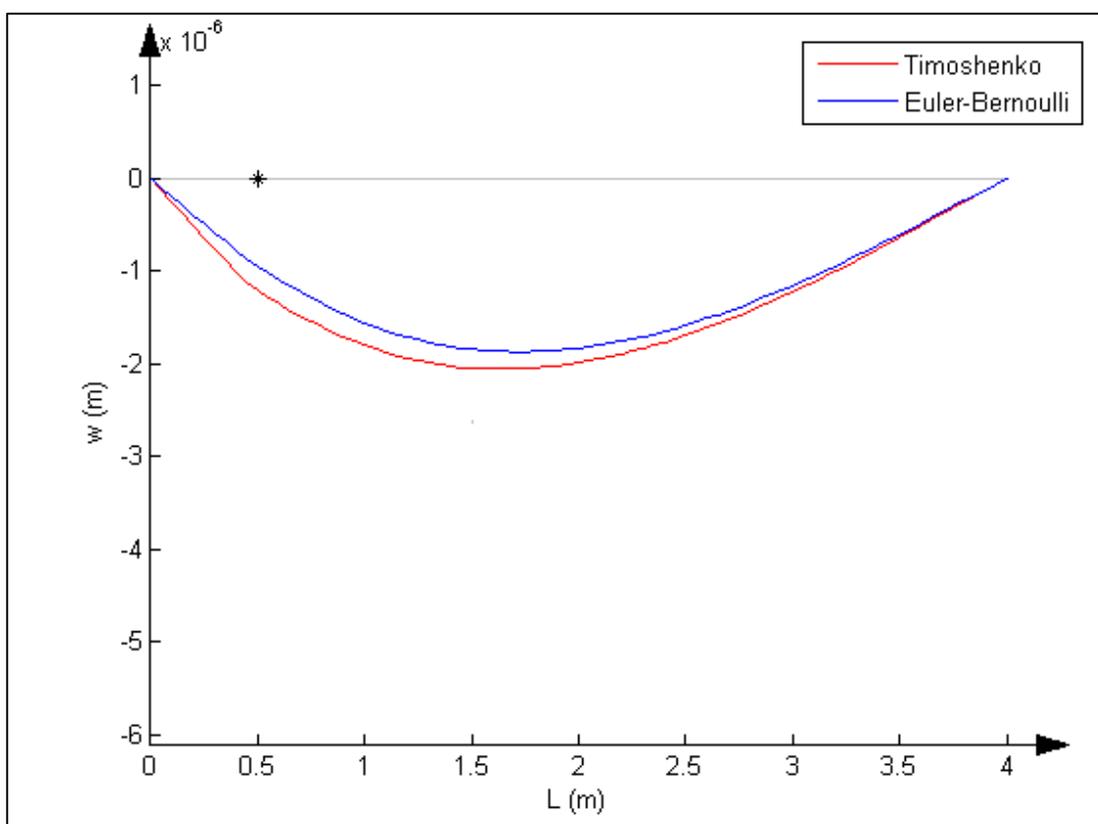


Figura 5.26 – Deformada da viga para  $t=0.0055$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

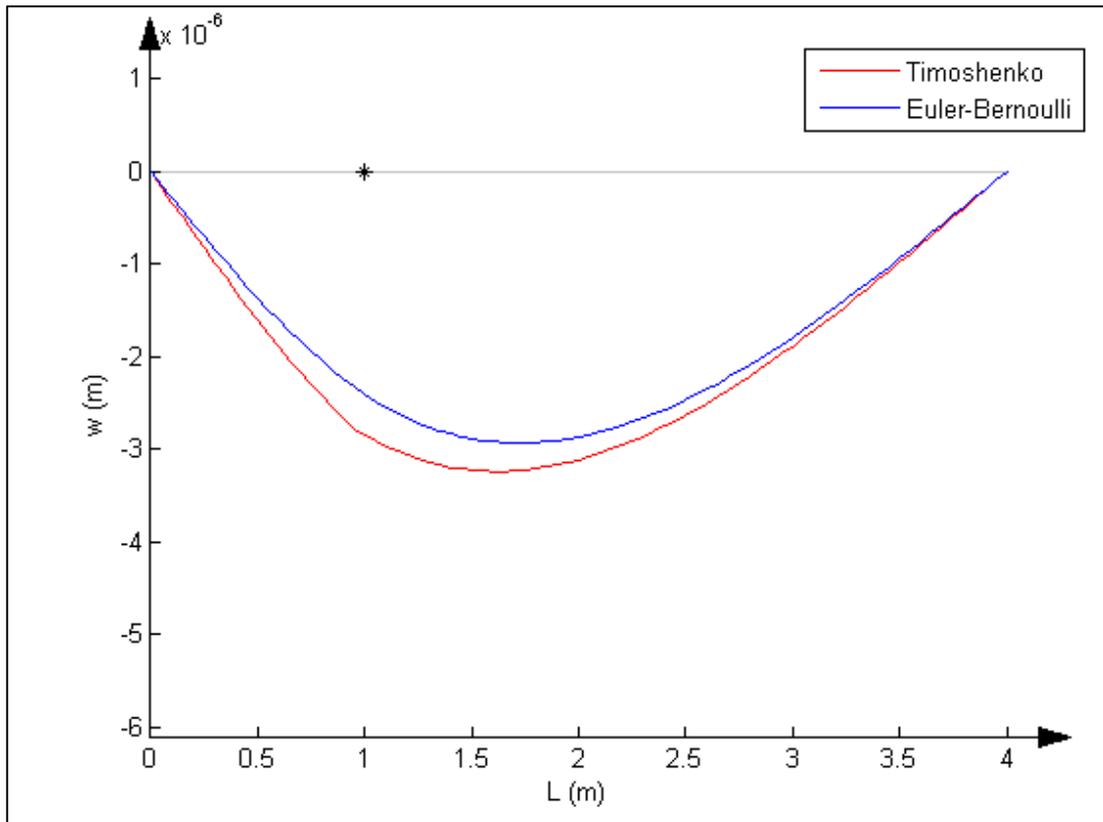


Figura 5.27 – Deformada da viga para i instante  $t=0.0110$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

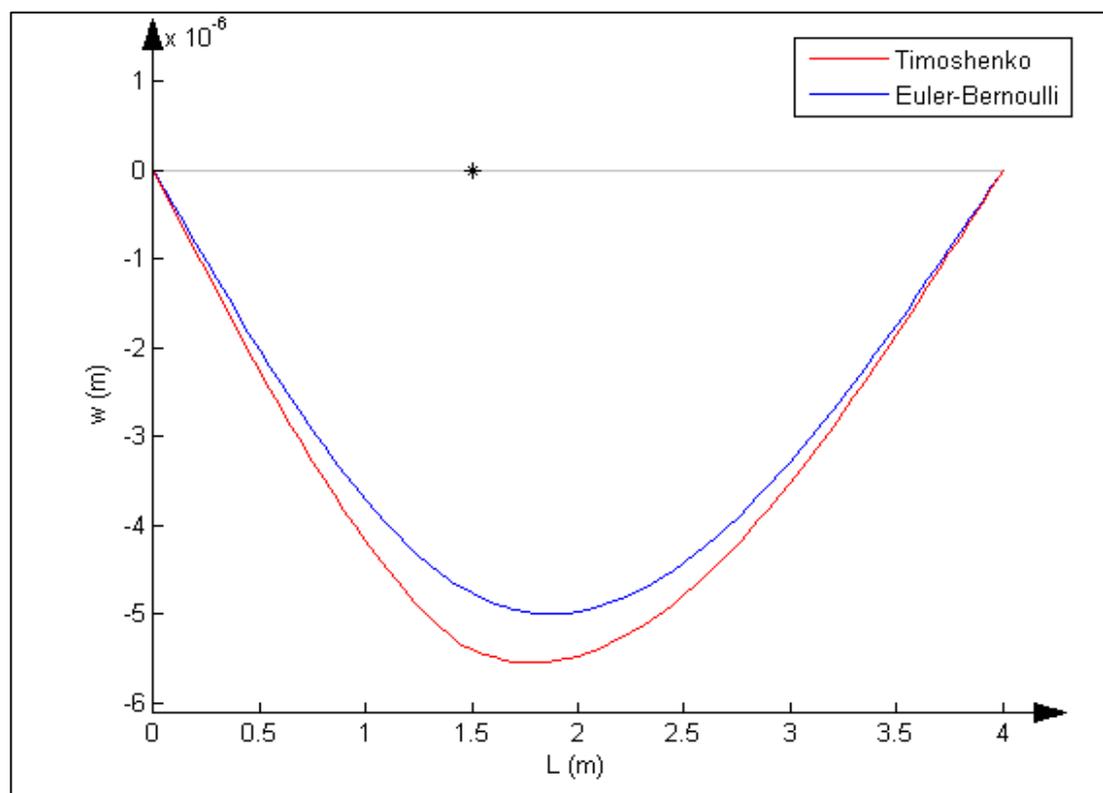


Figura 5.28 – Deformada da viga para i instante  $t=0.0165$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

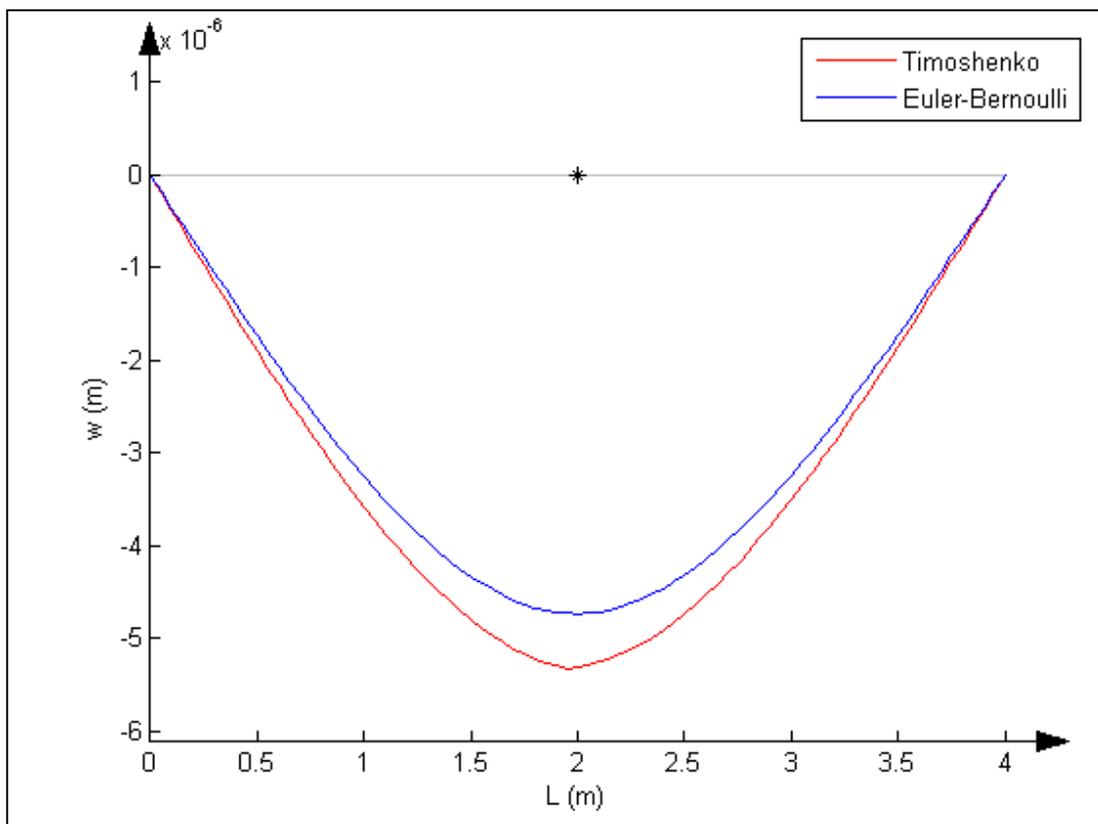


Figura 5.29 – Deformada da viga para i instante  $t=0.0220$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

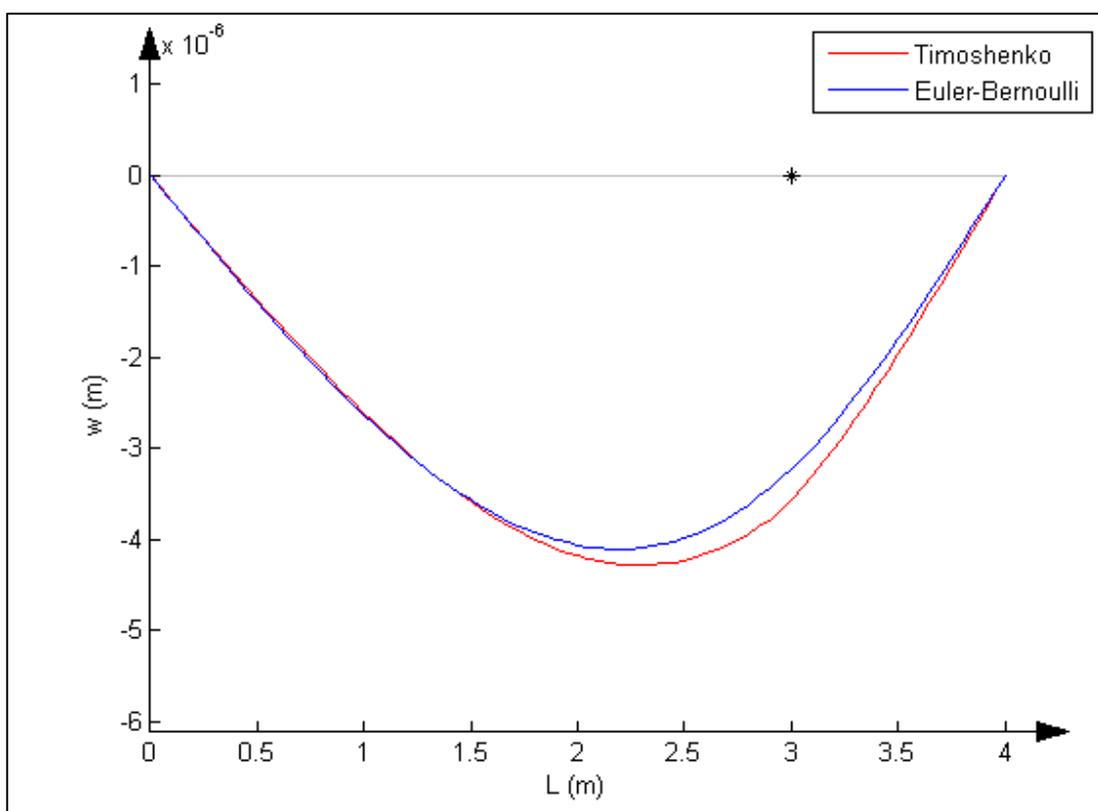


Figura 5.30 – Deformada da viga para i instante  $t=0.0330$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

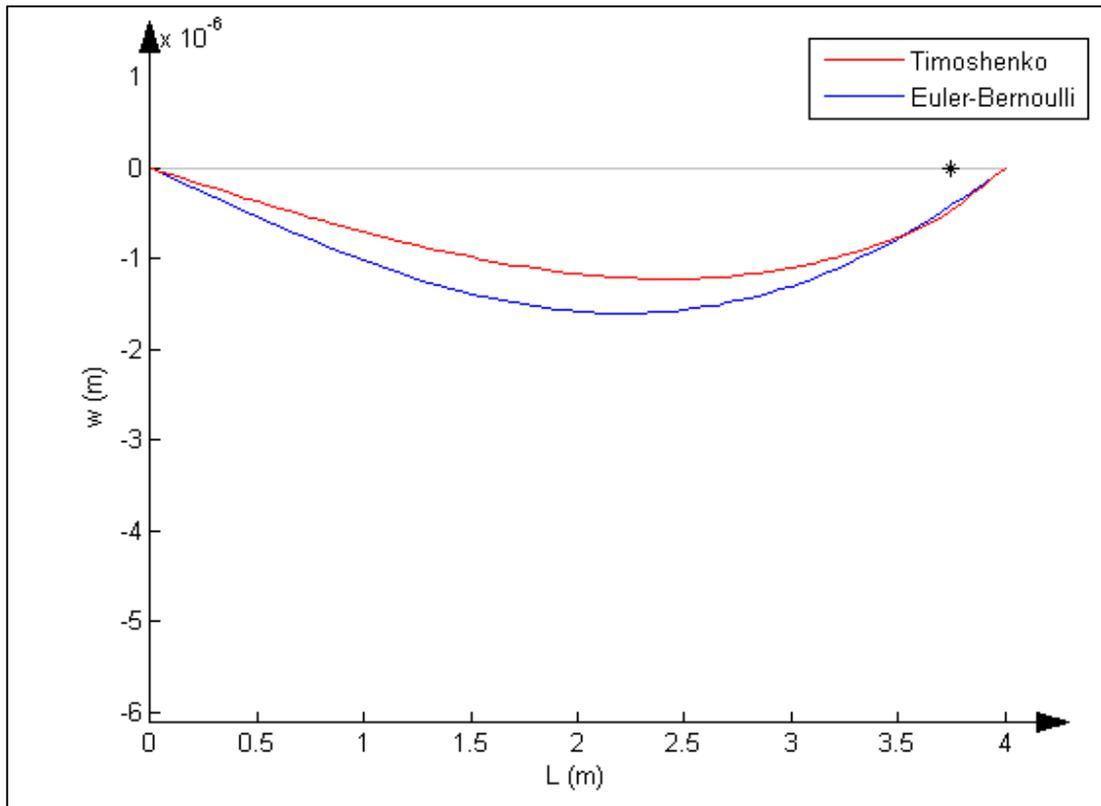


Figura 5.31 – Deformada da viga para o instante  $t=0.0413$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

Assumindo que é no ponto central da viga (neste caso é equivalente ao nó 40 da estrutura discretizada), que se observam os maiores valores de deslocamento transversal, então é de particular interesse estudar a resposta deste nó em particular quando excitado pela carga móvel.

Analisando os resultados expressos na Figura 5.32, o centro da viga não é afectado só no momento em que o ponto de contacto da carga é coincidente com o nó respectivo mas em todo o percurso que o corpo rígido faz ao longo do sistema vibratório. A partir do instante em que a carga passa pelo segundo apoio, a viga não amortecida entra num movimento harmónico simples que resulta no primeiro modo de vibração livre de uma viga simplesmente apoiada.

Mais uma vez, observou-se uma discrepância nos resultados entre a viga Timoshenko e a viga Euler-Bernoulli, nomeadamente no período em que a carga móvel percorria o sistema vibratório. Os valores de deflexão máxima coincidiram com a fase em que o corpo rígido foi de encontro ao centro da viga e são os seguintes:

$$w_{Timoshenko} = 6.0359 * 10^{-6} \text{ m} \quad (5.80)$$

$$w_{Euler-Bernoulli} = 5.4453 * 10^{-6} \text{ m} \quad (5.81)$$

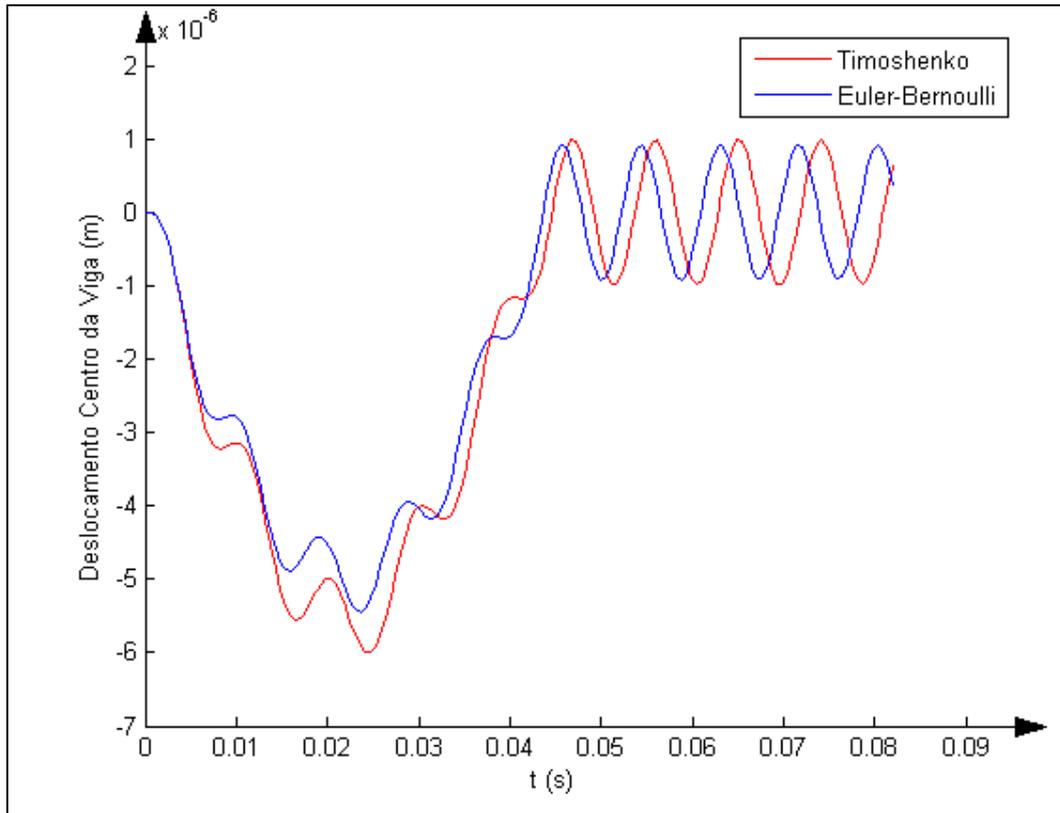


Figura 5.32 – Deslocamento no centro da viga em função do tempo até ao instante  $t=0.0825$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

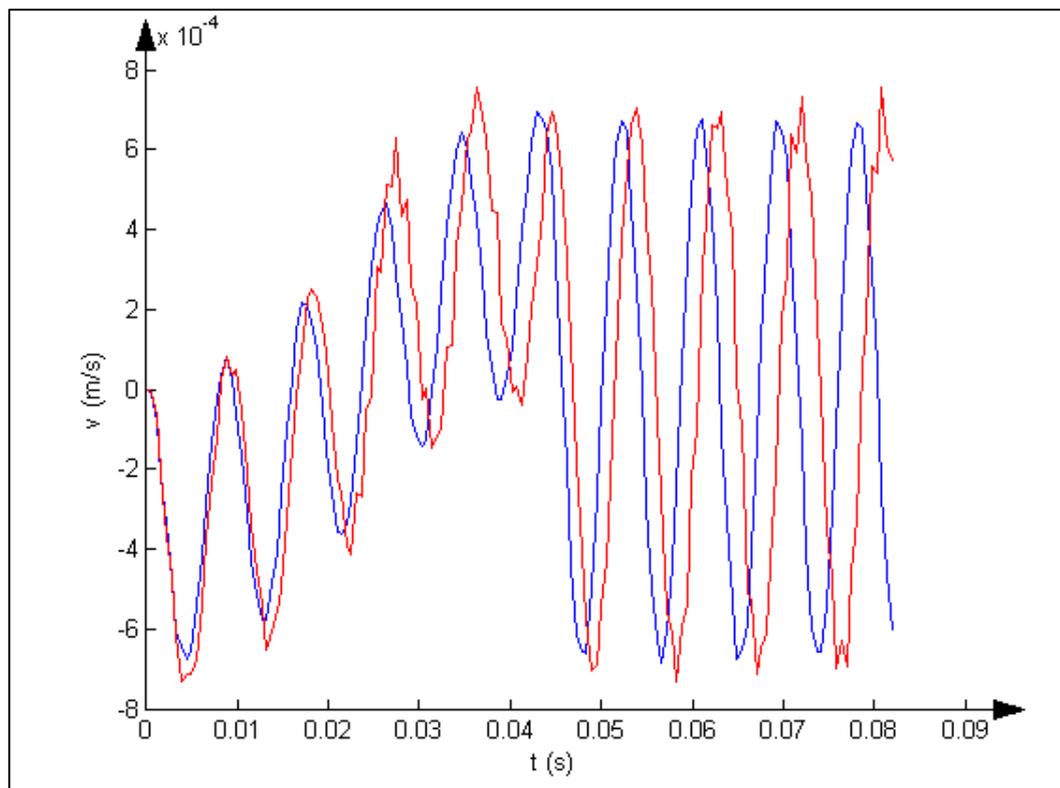


Figura 5.33 – Velocidade no centro da viga em função do tempo até ao instante  $t=0.0825$  s – 80 elementos viga de parâmetros híbridos

Da mesma forma, as velocidades no centro da viga também apresentam algumas diferenças, dependentes do tipo de modelo de viga utilizado. Mais uma vez, pela teoria de Timoshenko foram retirados os maiores valores absolutos de velocidade, à semelhança com o que se observa com os deslocamentos, o que faz sentido tendo em conta que estes dois parâmetros estão relacionados.

A explicação para um tão baixo valor de velocidade reflecte-se na utilização de uma estrutura em aço maciço com uma secção transversal exageradamente grande. O mesmo já se tinha verificado para os deslocamentos onde os valores giravam na casa dos micrómetros que equivalem à milésima parte do milímetro.

## 5.5. FORMULAÇÃO CLÁSSICA VS. FORMULAÇÃO MISTA EM ANÁLISE DINÂMICA

Por fim fez-se uma comparação dos resultados obtidos via formulação clássica com os obtidos via formulação mista.

### **Exemplo 5:**

Tomemos em conta o Exemplo 5, de uma viga em consola submetida a uma carga impulsiva  $F = 500N$ , sendo que a estrutura apresenta as seguintes características:

<u>Dimensões da viga:</u>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>b = 0.02 \text{ m}</math></li> <li>• <math>h = 0.08 \text{ m}</math></li> <li>• <math>L = 1 \text{ m}</math></li> </ul>
<u>Propriedades</u>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>E = 210 \text{ GPa}</math></li> </ul>
<u>Material:</u> (Aço com 0.2% de carbono)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\nu = 0.3</math></li> <li>• <math>\sigma_Y = 210 \text{ MPa}</math></li> <li>• <math>\rho = 7860 \text{ kg/m}^3</math></li> </ul>

A Tabela 5.7 e tabela têm a finalidade de apresentar as 5 primeiras frequências de vibração naturais da viga, obtidas quer pela formulação clássica, quer pela formulação mista nos dois modelos de deformação em comparação com as soluções analíticas calculadas através da equação (5.65) para a teoria de Euler-Bernoulli e retiradas de bibliografia especializada para a teoria de Timoshenko. (Theoretical and Mechanics, 2009).

Os resultados obtidos não apresentam muita discrepância, quer em relação à solução analítica, quer em comparação com os dois tipos de elementos de viga implementados.

Já para o modelo de Timoshenko (Tabela 5.8) existe um intervalo de incerteza associado a cada um dos valores obtidos para as velocidades angulares, quando em comparação com os resultados analíticos.

**Tabela 5.7 - Frequências naturais calculadas analiticamente e por MEF – Euler-Bernoulli**

<i>Euler – Bernoulli – Frequência angular natural (rad/s)</i>			
	<i>Solução Analítica</i>	<i>MEF – F.Clássica</i>	<i>MEF – F.Mista</i>
<b>1</b>	419.6	419.7	419.7
<b>2</b>	2666.8	2630.3	2630.7
<b>3</b>	7387.3	7364.8	7369.2
<b>4</b>	14284.0	14432.1	14450.7
<b>5</b>	23383.0	23857.4	23910.7

Deste modo como o desvio  $\Delta\omega$  é menor, em todas as frequências apresentadas, para o método de elementos finitos de parâmetros híbridos em relação à formulação clássica, conclui-se que a formulação mista apresenta resultados mais precisos.

**Tabela 5.8 – Frequências naturais calculadas analiticamente e por MEF – Timoshenko**

<i>Timoshenko – Frequência angular natural (rad/s)</i>					
	<i>Solução Analítica</i>	<i>MEF – F.Clássica</i>	$\Delta\omega = \omega - \omega_{MEF}$	<i>MEF – F.Mista</i>	$\Delta\omega = \omega - \omega_{MEF}$
<b>1</b>	424.1	459.1	35	418.1	6
<b>2</b>	2653.7	2791.3	137.6	2562.6	91.1
<b>3</b>	7145.3	7478.2	332.9	6937.7	207.6
<b>4</b>	13016.0	13846.4	830.4	12992.6	23.4
<b>5</b>	19645.0	21490.7	1845.7	20369.0	724

Outra vantagem da aplicação deste tipo de formulação, como já referido, tem a ver com esforço computacional que nele advém. A Tabela 5.9 mostra os tempos de processamento necessários para a resolução do Exemplo 5, sendo que o esforço computacional é mais evidente para modelos clássicos de deformação, principalmente Euler-Bernoulli onde as funções de forma de terceiro grau têm um papel muito fulcral na obtenção do tempo de processamento maior.

Tabela 5.9 - Tempos de processamento para análise dinâmica

<i>Euler – Bernoulli – Tempo (s)</i>		<i>Timoshenko (s) – Tempo (s)</i>	
<i>Formulação Clássica</i>	<i>Formulação Mista</i>	<i>Formulação Clássica</i>	<i>Formulação Mista</i>
20.7421	10.6559	17.2342	11.7592

Foi concebido igualmente o estudo do deslocamento da extremidade livre, até ao instante  $t = 00.016 s$ . Para a teoria de Euler-Bernoulli, o comportamento do nó que retracta esse ponto da viga coincide para as duas formulações utilizadas, e portanto é ilustrado com a cor preta.

Quando se considera a deformação de corte, já se verifica algum desfasamento entre os resultados obtidos, embora pouco significativos. Essas diferenças são expressas em termos gráficos através da Figura 5.35 -.

Como altura da viga é relativamente pequena, deste modo a distorção da secção transversal foi pouco significativa. Assim se explica a semelhança do deslocamento máximo obtido,  $w_{m\acute{a}x.} \approx 1.8 * 10^{-3} m$ , para os dois modelos de deformação.

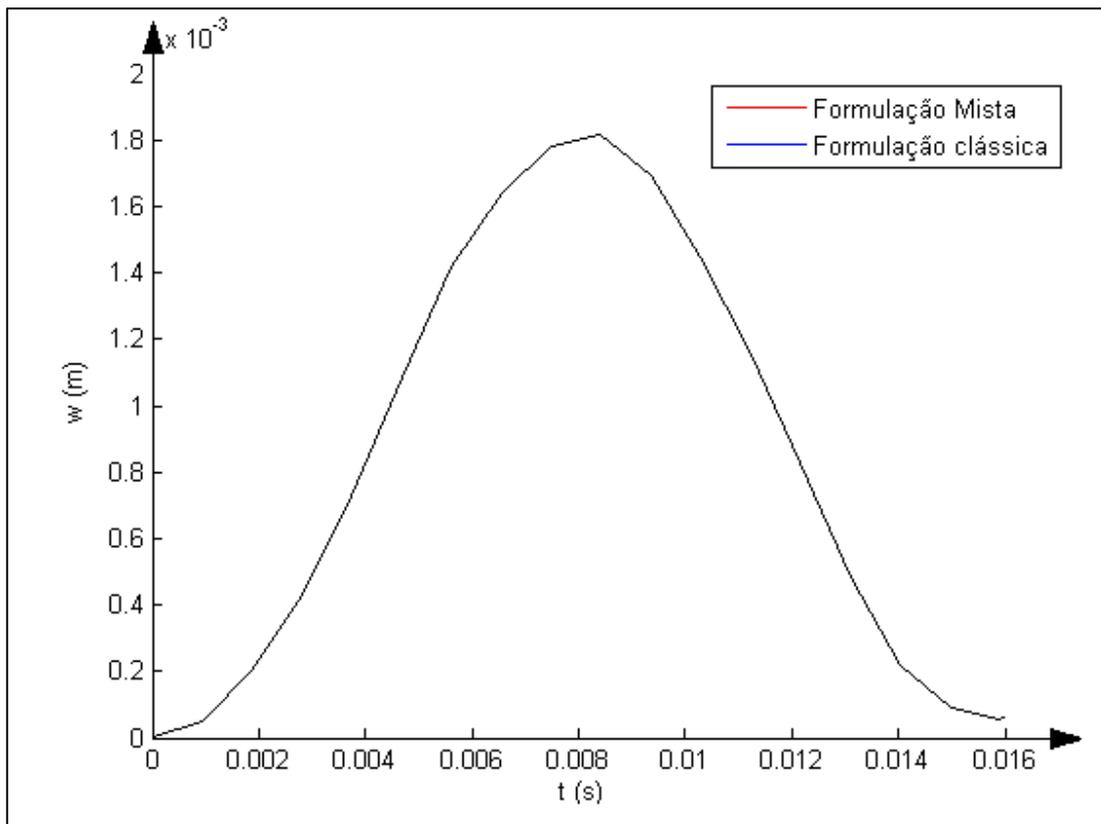


Figura 5.34 – Deslocamento extremidade livre para as duas formulações – Euler-Bernoulli

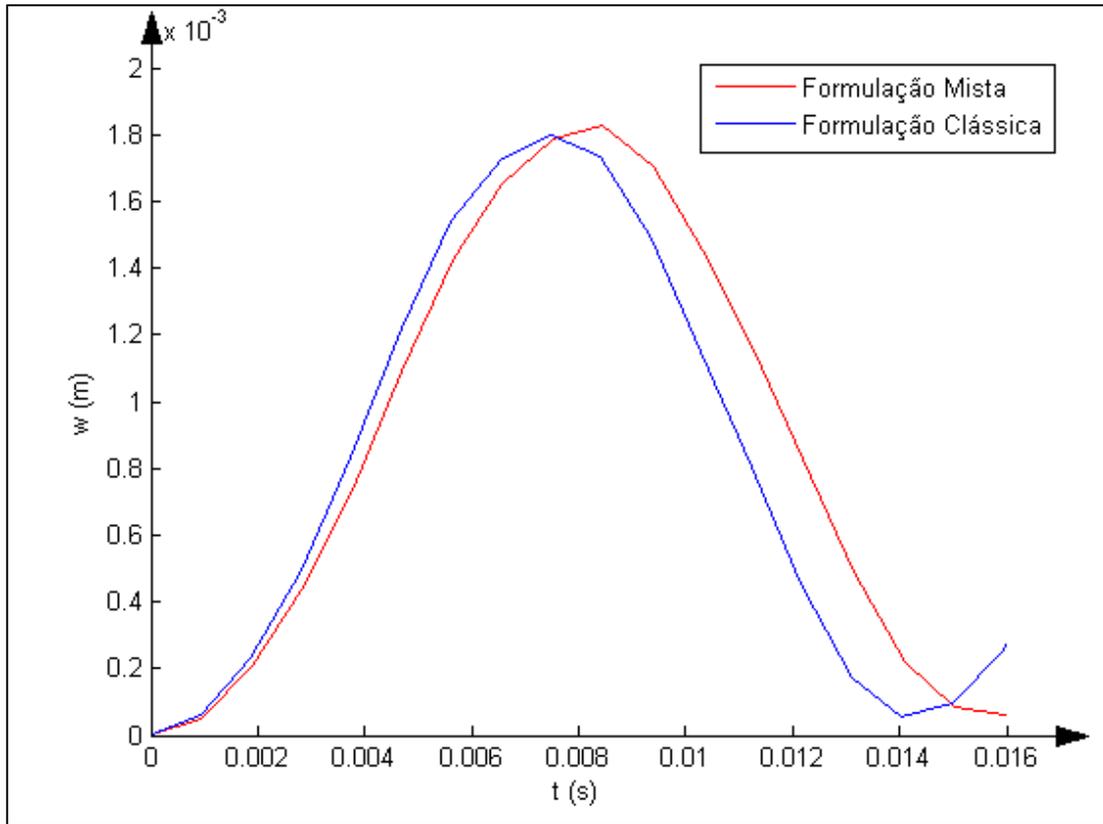


Figura 5.35 - Deslocamento extremidade livre para as duas formulações – Timoshenko

## **Capítulo 6. Conclusões e Trabalho Futuro**

O trabalho é finalizado neste capítulo com comentários e conclusões acerca dos resultados obtidos de forma a introduzir e contextualizar sugestões para futuros trabalhos e desenvolvimentos.

### **6.1. CONCLUSÕES**

Através deste trabalho foi possível verificar a eficácia do método dos elementos finitos proposto em formulação híbrida que é capaz de, em grande parte dos modelos estruturais, conduzir a bons resultados com o mínimo esforço computacional e pela utilização de funções de forma de baixa ordem. Ainda mais este método, quando na perspectiva de calcular somente o campo de deslocamentos, elimina a necessidade, de calcular os valores nodais dos momentos através da condensação destes.

Em problemas dinâmicos, simulados através de técnicas de integração temporal da equação de equilíbrio da estrutura em regime dinâmico, a condensação de graus de liberdade de rotação (normalmente associados a uma contribuição de momentos de inércia em muito menor relevância do que as forças de inercia associadas a deslocamentos transversais, por flexão do elemento de viga), o uso de algoritmos implícitos permitiu visualizar com boa precisão a propagação de ondas de flexão em vigas submetidas a forças transversais do tipo impulsional. Tal problema seria simulado com maior esforço computacional através da utilização da formulação clássica ou sem a precisão atingida no caso de se fazer uso de soluções explícitas (como o método de Diferenças Centrais).

O facto de não se verificar o fenómeno de Shear Locking traz uma grande vantagem em relação à formulação clássica que recorre a métodos aproximados de integração numérica que só convergem para a solução exacta com malhas mais refinadas.

A validação dos resultados teóricos com a literatura mostrou-se efectiva, uma vez que a concordância entre os valores gerados pelo programa computacional com os resultados da literatura foi confirmada.

### **6.2. TRABALHO FUTURO**

Como área de futuro desenvolvimento, a implementação de técnicas experimentais sem contacto, como a detecção de propagação de ondas usando interferometria com laser pulsado, constituiria um método muito eficaz para avaliar o desempenho dos elementos finitos aqui propostos; como alternativa de técnica experimental mais económica, seria a de uso de extensometria com unidade de aquisição de sinal em regime dinâmico de alta velocidade; a limitação deste método incide no carácter discreto dos sinais associados á deformação da viga, os quais são detectados por extensómetros.

Pouco pratico é o facto de os extensómetros necessitarem de cablagem, a qual ainda que de fina secção, induz sempre alguma perturbação dinâmica na viga em vibração.

Tendo em vista o desenvolvimento das simulações numéricas realizadas neste trabalho, poder-se-ia fazer o estudo dinâmico de sistemas amortecidos.

O amortecimento próprio dos sistemas vibratórios desempenha um papel importante na análise dinâmica dos mesmos. No entanto, devido à limitação do conhecimento sobre o amortecimento, uma das maneiras mais eficazes de tratar este problema é através da matriz de amortecimento de Rayleigh equivalente, expressa na forma:

$$[C] = \alpha_c [M] + \beta_c [K] \quad (6.1)$$

É difícil prever valores válidos, num sistema matricial com muitos graus de liberdade, para os coeficientes de amortecimento de Rayleigh  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  no início de uma análise dinâmica.

Do ponto de vista do engenheiro, pretende-se desta forma descrever um procedimento, que garanta uma estimativa racional de  $\alpha_c$  e  $\beta_c$ , para não se correr o risco de assumir uma relação de amortecimento constante irrealista. Em termos matemáticos, estas constantes podem ser calculadas a partir da razão de amortecimento  $\zeta_n$ , através da equação (6.2):

$$\zeta_n = \frac{\alpha_c}{2\omega_i} + \frac{\beta_c \omega_i}{2} \quad (6.2)$$

Onde  $n$  representa o modo de vibração a analisar.

Deste modo, definindo a razão de amortecimento, para os diferentes modos, e sabendo de antemão as respectivas frequências naturais, pode-se fazer uma estimativa razoável das constantes de amortecimento. Sendo no geral os primeiros modos de vibração os mais significativos, então para estes modos os valores de  $\zeta_n$  poderão ser estimados experimentalmente como o número de ciclos (um ciclo tem a duração do período natural da onda) em que a amplitude da onda demora a decair em 50%:

$$\zeta_n = \frac{0.11}{n_{50\%}} \quad (6.3)$$

Por exemplo, pegando novamente no problema da viga em consola, em que o comportamento dinâmico na extremidade livre é dado pela Figura 5.12, se assumirmos porventura um sistema sub-amortecido (valores de  $\zeta_n < 1$ ), então a estrutura, no momento em que a força impulsiva deixa de actuar, apresenta uma oscilação que vai diminuindo até ao ponto em que eventualmente a viga volta à sua posição de equilíbrio inicial, como mostra a Figura 6.1.

Pode-se ainda adicionar outros parâmetros no código, em MATLAB, da simulação numérica como é o caso da adição de cargas distribuídas não uniformes, ou a utilização de malhas adaptativas com elementos de diferentes dimensões, por forma a diminuir o esforço computacional.

Outro trabalho que se pode desenvolver coincide com o estudo de materiais compósitos, o que implicaria a utilização de um modelo numérico bidimensional (no mínimo).

Por fim, sugere-se que sejam comparados os resultados obtidos com simulações realizadas por meio de outros métodos aproximados.

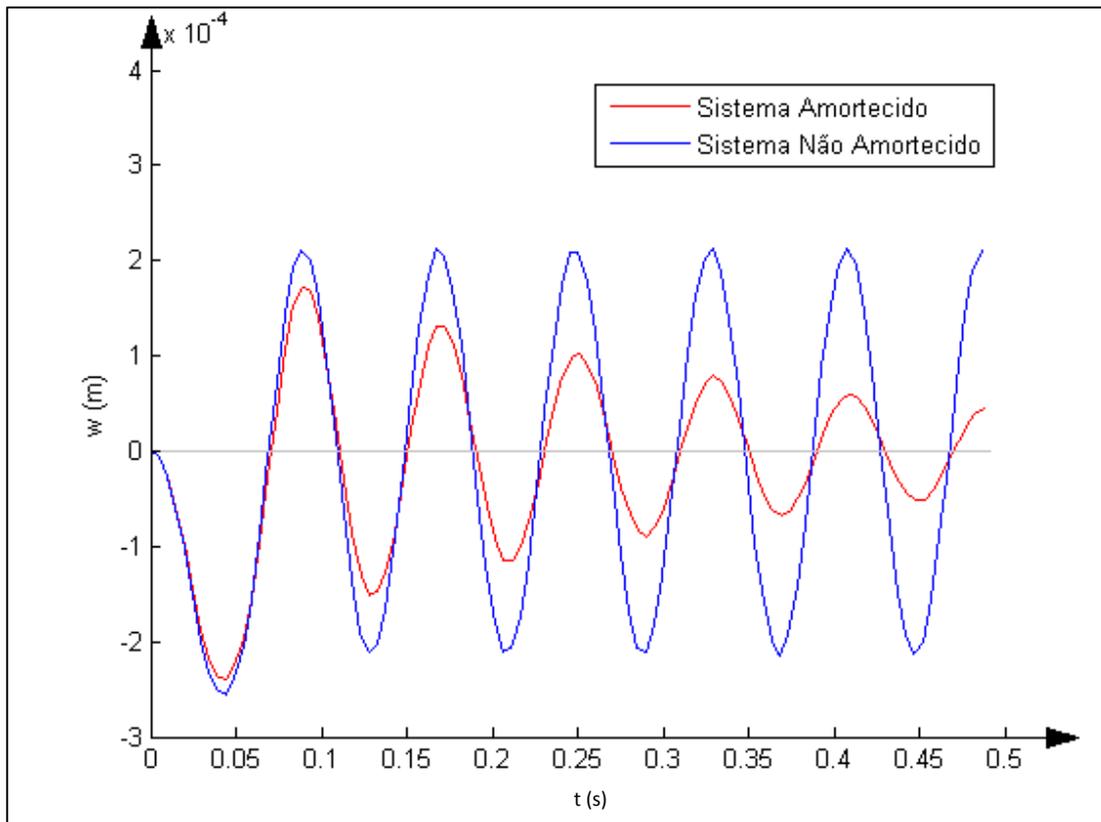


Figura 6.1 - Comportamento dinâmico de 2 sistemas - amortecido e não amortecido



## Referências Bibliográficas

CARDOSO, Rui Pedro Ramos - **Vibrações**. Aveiro : [s.n.], 2011. 34 p

CASTRO, Luís (Departamento De Engenharia Civil/Instituto Superior Técnico) - **Análise de Pórticos Planos**, 1998. 164 p.

DIAS, Teixeira *et al.* - **Método dos Elementos Finitos - Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia**. Aveiro : ETEP – Edições Técnicas e Profissionais (Grupo LIDEL), 2010. 488 p. ISBN 978-972-8480-25-7.

FEODOSIEV, V. I. - **Resistance des Matériaux, (trad. francesa do russo)**. Moscovo : MIR, 1972. 579 p.

FERREIRA, António Joaquim Mendes (FEUP) - **MATLAB Codes for Finite Element Analysis**. Porto : [s.n.], 2009. 236 p. ISBN 978-1-4020-9199-5.

HU, Haichang - **Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications**. Beijing : Science Press, 1984. 491 p. ISBN 0-677-31330-6.

J.N.REDDY - **An Introduction to The Finite Element Method Department of Mechanical Engineering**. Third ed. New York : The McGraw-Hill Companies, 2005. 425 p.

MOREIRA, Rui A. S.; MELO, Francisco J. M. Q.;Rodrigues, J.F.D. - STATIC AND DYNAMIC CHARACTERIZATION OF COMPOSITION CORK FOR SANDWICH BEAM CORES. **Journal of Materials Science**. Springer, Vol. 45, March 2010. p. 3350 - 3366

NASCIMENTO, RANGEL FERREIRA DO - **Análise dinâmica de vigas utilizando o elemento finito de Timoshenko com refinamento p -adaptativo**. [S.l.] : Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho,” 2005. 212 p.

RIECKER, Joseph; LIN, Yih-Hwang; TRETHERWEY, Martin - Discretization considerations in moving load finite element beam models. In **Finite Elements in Analysis and Design**. [S.l.] : Elsevier Science B.V., 1996. p. 129 - 144

STOKEY, William F. - VIBRATION OF SYSTEMS HAVING DISTRIBUTED MASS AND ELASTICITY. In HARRIS, CYRIL M. (Ed.) - **Shock and Vibration Handbook**. Third ed., 1988. 50 p. Chapter 7. ISBN 9780071508193.

MAJKUT, Leszek - FREE AND FORCED VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS DESCRIBED BY SINGLE DIFFERENCE EQUATION. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**. 2009. p. 193 - 210

BOWER, Allan; FRANCK, Jen - **Dynamics and Vibrations: Notes: Multi-DOF vibrations** [Em linha], atual. 2013. [Consult. 6 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:[http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/Notes/vibrations\\_mdof/vibrations\\_mdof.htm](http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/Notes/vibrations_mdof/vibrations_mdof.htm)>.

DURÁN, Ricardo G. - **Galerkin Approximations and Finite Element Methods** [Em linha], atual. 2005. [Consult. 6 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:[http://mate.dm.uba.ar/~rduran/class\\_notes/fem.pdf](http://mate.dm.uba.ar/~rduran/class_notes/fem.pdf)>.

ELLIOTT, Russ - **Deflection of beams** [Em linha] , atual. 2010. [Consult. 7 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:<http://www.clag.org.uk/beam.html>>.

FELIPPA, Carlos - **Matrix Finite Element Methods in Dynamics Course Material** [Em linha], atual. 2013. [Consult. 7 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:<http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/MFEMD.d/>>.

FRANCO, José Ricardo Queiroz - **Análise Estrutural I** [Em linha], atual. 2007. [Consult. 18 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:[http://www.cadtec.dees.ufmg.br/nucleoad/forum/arquivos/apostila\\_ptv.pdf](http://www.cadtec.dees.ufmg.br/nucleoad/forum/arquivos/apostila_ptv.pdf)>.

HUEBNER, Kenneth *et al.* - **The Finite Element Method for Engineers** [Em linha]. [S.l.] : John Wiley & Sons, 2001. 720 p. [Consult. 7 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:<http://books.google.com/books?id=f3MZE1BYq3AC&pgis=1>>. ISBN 0471370789.

WIKIPÉDIA, A Enciclopédia Livre - **Tensão (mecânica)** [Em linha], atual. 2014. [Consult. 21 nov. 2014]. Disponível em WWW:<URL:[http://pt.wikipedia.org/wiki/Tensão\\_%28mecânica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tensão_%28mecânica%29)>.

## Anexos

### Anexo I - Código MATLAB de um Problema Estático – Formulação Mista

```
% Formulação mista
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms G
syms Ac
syms m

%Funções de forma
xj=Le;
xi=0;
Ni=(xj-x)/(xj-xi);
Nj=(x-xi)/(xj-xi);
dNi=diff(Ni,1,x);
dNj=diff(Nj,1,x);

corte='sim';
if corte=='sim'
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNi,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNi,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNj,x,0,Le);
else
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le);
end

K13=int(dNi*dNi,x,0,Le);
K14=int(dNi*dNj,x,0,Le);
K23=int(dNj*dNi,x,0,Le);
K24=int(dNj*dNj,x,0,Le);
K31=int(dNi*dNi,x,0,Le);
K32=int(dNi*dNj,x,0,Le);
K33=0;
K34=0;
K41=int(dNj*dNi,x,0,Le);
K42=int(dNj*dNj,x,0,Le);
K43=0;
K44=0;
Ke=[K11 K12 K13 K14;K21 K22 K23 K24;K31 K32 K33 K34;K41 K42 K43 K44];
fe=[0;0;int(Ni*P*(Ni+Nj),x,0,Le);int(Nj*P*(Ni+Nj),x,0,Le)];

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=0.25; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=4; A=b*h; poisson=0.3;
densidade=7860;
```

```

numberElements=80; %Número elementos
P=0; %Carga distribuída
m=0; %Momento distribuído
pos_inicial=0;
pos_final=L;
F=500; %Carga concentrada
posicao_F=L;

k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+poisson));

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Aquisição das coordenadas
dos nós de 0 a L
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Condições fronteira
n=3;
if n==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[]'; %g.l. momentos nulos
elseif n==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[1 numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
elseif n==3;
%Encastrada em x=0
    fixedNodeU =[numberNodes+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
elseif n==4;
%Encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
end
prescribedDof=[fixedNodeM;fixedNodeU]; %g.l. que são nulos

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transversal e momento
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
U=zeros(GDof,1); %vector dos deslocamentos e momentos
force=zeros(GDof,1); %vector força e rotação
stiffness=zeros(GDof); %vector rigidez

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ indice indice+numberNodes]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)

```

```

%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx(indice(2))-xx(indice(1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke);
%Vector força do elemento
    f1=subs(fe);
%Equivalent force vector
    force(elementDof)=force(elementDof)+f1; %Cria o vector força global
% stiffness matrix
    stiffness(elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
%Mensagem de erro
    error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=zeros(GDof,1);
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force
(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)));
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)))=force(round(GDof/2+1));
f1(round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force(round(GDof));
f2=zeros(GDof,1);
f2(GDof/2+1+z2)=F;
if pos_final- pos_inicial==L
    force=force+f2;
else
    force=f1+f2;
end

%Solução
%Function to find solution in terms of global displacements
activeDof=setdiff([1:GDof],[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
U=stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof); %Resolução do sistema
reduzido dando os valores nodais
displacements=zeros(GDof,1); %Vector deslocamento(zeros)
displacements(activeDof)=U; %Solução do problema já com os g.l. nulos

%Cálculo dos campos
U=displacements(GDof/2+1:GDof); %Valores de deslocamento
M=displacements(1:GDof/2); %Valores de rotação
V=zeros(numberElements,1);
O=zeros(numberElements,1);
T1=zeros(numberElements+1,1);
for n=1:numberElements;
    V(n)= subs(dNi)*M(n)+subs(dNj)*M(n+1);
    O(n)= V(n)/(G*Ac)+(subs(dNi)*U(n)+subs(dNj)*U(n+1));
end
T_normal=h.*(M/(2*I));
T_corte=k.*V/Ac;
T1(1)=T_corte(1);
T1([2:end])=T_corte([1:end]);

```

```

T_vm=sqrt (T_normal.^2+3.*T1.^2);
Tmax=max (T_vm)

%Gráficos
plot (nodeCoordinates,-U, '.',nodeCoordinates,-U,'b-');
figure
plot (nodeCoordinates,M, '.',nodeCoordinates,M,'b-');
figure
hold on
plot (nodeCoordinates (1:numberElements),O, '.');
stairs (nodeCoordinates (1:numberElements),O);
hold off
figure
hold on
plot (nodeCoordinates (1:numberElements),V, '.');
stairs (nodeCoordinates (1:numberElements),V);
hold off
figure
plot (nodeCoordinates,T_normal, '.',nodeCoordinates,T_normal,'b-');
figure
hold on
plot (nodeCoordinates (1:numberElements),T_corte, '.');
stairs (nodeCoordinates (1:numberElements),T_corte);
hold off
TimeSpent = toc

```

## Anexo II - Código Matlab de um Problema Estático – Formulação Mista (Forma Compacta)

```

% Formulação mista_forma compacta
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms Ac
syms m

%Funções de forma
xj=Le;
xi=0;
Ni=(xj-x)/(xj-xi);
Nj=(x-xi)/(xj-xi);
dNi=diff(Ni,1,x);
dNj=diff(Nj,1,x);

corte='sim';
if corte=='sim'
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNi,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNi,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNj,x,0,Le);
else
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le);
end
K13=int(dNi*dNi,x,0,Le);
K14=int(dNi*dNj,x,0,Le);
K23=int(dNj*dNi,x,0,Le);
K24=int(dNj*dNj,x,0,Le);

Ae=[K11 K12;K21 K22];
Be=[K13 K14;K23 K24];
Ke=[Ae,Be;Be',zeros(2,2)];
Oe=[0;0];
Ve=[int(Ni*P*(Ni+Nj),x,0,Le);int(Nj*P*(Ni+Nj),x,0,Le)];
fe=[Oe;Ve];

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=1; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=5.6; A=b*h; poisson=0.3;
densidade=7860;
numberElements=1000; %Número elementos
P=15000; %Carga distribuida
m=0; %Momento distribuido
pos_inicial=2.8;
pos_final=L;
F=42000; %Carga concentrada
posicao_F=1.4;

```

```

k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+poisson));

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)';%dá as coordenadas dos nós de
0 a l
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Condições fronteira
n=4;
if n==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[]'; %g.l. momentos nulos
    elseif n==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[1 numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
    elseif n==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
    elseif n==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
end

%g.l. que são nulos
prescribedDof_M=[fixedNodeM];
prescribedDof_U=[fixedNodeU];

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e momento
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
U=zeros(GDof,1); %Vector dos deslocamentos e momentos
force=zeros(GDof,1); %Vector força e rotação
stiffness=zeros(GDof); %Vector rigidez

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ indice indice+numberNodes]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    le=xx(indice(2))-xx(indice(1)); %Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke); %Vector força do elemento
    f1=subs(fe); %Equivalent force vector

```

```

    force(elementDof)=force(elementDof)+f1; %Cria o vector força global
%Stiffness matrix
    stiffness(elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
% Mensagem de erro
    error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=zeros(GDof,1);
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force
(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)));
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)))=force(round(GDof/2+1));
f1(round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force(round(GDof));
f2=zeros(GDof,1);
f2(GDof/2+1+z2)=F;
if pos_final- pos_inicial==L
    force=force+f2;
else
    force=f1+f2;
end

%Solução
%Function to find solution in terms of global displacements
activeDof_M=setdiff([1:GDof/2]',[prescribedDof_M]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
activeDof_U=setdiff([1:GDof/2]',[prescribedDof_U]);

%Matrizes s.global
AA=stiffness(1:GDof/2,1:GDof/2);
BB=stiffness(1:GDof/2,GDof/2+1:GDof);
VV=force(GDof/2+1:GDof);
%Matrizes s.reduzido
AA=AA(activeDof_M,activeDof_M);
BB=BB(activeDof_M,activeDof_U);
VV=VV(activeDof_U);
KK=-BB'*AA^-1*BB;
U=KK\VV; %Resolução do sistema reduzido dando os valores nodais

displacements=zeros(GDof/2,1); %Vector deslocamento(zeros)
displacements(activeDof_U)=U; %Solução do problema já com os g.l. nulos

%Valores de deslocamento e rotação
U=displacements; %Valores de deslocamento

%Gráficos
plot(nodeCoordinates,U,'.',nodeCoordinates,U,'b-');
TimeSpent = toc

```

## Anexo III - Código Matlab de um Problema Estático – Formulação Clássica (Euler-Bernoulli)

```

%% Euler-Bernoulli
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P

N1=-1+(3*x^2)/(Le^2)-(2*x^3)/(Le^3);
N2=-x+(2*x^2)/(Le)-(x^3)/(Le^2);
N3=-(3*x^2)/(Le^2)+(2*x^3)/(Le^3);
N4=(x^2)/(Le)-(x^3)/(Le^2);
dN1=-diff(N1,2,x);
dN2=-diff(N2,2,x);
dN3=-diff(N3,2,x);
dN4=-diff(N4,2,x);
B=[dN1 dN2 dN3 dN4];
B_t=[dN1;dN2;dN3;dN4];
Ke=E*I*int(B_t*B,x,0,Le);
fe=-int([N1;N2;N3;N4]*P,x,0,Le);

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=1; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=5.6; A=b*h; densidade=7860;
numberElements=80; %Número elementos
P=15000;% Carga distribuída
pos_inicial=2.8;
pos_final=L;
F=42000; %Carga concentrada
posicao_F=1.4;

%Condições fronteira
n=4;
if n==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2 2*numberElements+2]'; %g.l. rotação fixos
elseif n==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[]' %g.l. rotação fixos
elseif n==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2]'; %g.l. rotação fixos
elseif n==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2]'; %g.l. rotação fixos
end

prescribedDof=[fixedNodeU;fixedNodeO]; %g.l. que são nulos
% geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;

```

```

nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Dá as coordenadas dos nós de
0 a l
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e rotação
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
U=zeros(GDof,1); %Vector dos deslocamentos e rotações
force=zeros(GDof,1); %Vector força
stiffness=zeros(GDof); %Vector rigidez

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ 2*(indice(1)-1)+1 2*(indice(2)-1)...
                2*(indice(2)-1)+1 2*(indice(2)-1)+2]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx(indice(2))-xx(indice(1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke);
%Vector força do elemento
    f1=subs(fe);
%Equivalent force vector
    force(elementDof)=force(elementDof)+f1; %Cria o vector força global
%Stiffness matrix
    stiffness(elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
    % Mensagem de erro
    error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=force;
f1(1:round((pos_inicial/Le)*2))=0;
f1(round((pos_final/Le+1)*2+1):GDof)=0;
f1(round(pos_inicial/Le+1)*2-1)=force(1);
f1(round((pos_final/Le)*2+1))=force(GDof-1);
f1(round(pos_inicial/Le+1)*2)=force(2);
f1(round((pos_final/Le)*2+2))=force(GDof);
f2=zeros(GDof,1);
f2((z2+1)*2-1)=F;
if pos_final- pos_inicial==L
    force=force+f2;
else

```

```

    force=f1+f2;
end

%Solução
%Function to find solution in terms of global displacements
activeDof=setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
U=stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof); %Resolução do sistema
reduzido dando os valores nodais
displacements=zeros(GDof,1);
displacements(activeDof)=U; %Solução do problema já com os g.l. nulos

% Drawing deformed shape
U=displacements(1:2:GDof); %Valores de deslocamento
O=displacements(2:2:GDof); %Valores de rotação

%Gráficos
hold on
plot(nodeCoordinates,-O, '.');
stairs(nodeCoordinates,-O);
hold off
figure
x=linspace(0,Le,100);
for n=1:numberElements
    Wx=subs(N1*U(n)+N2*O(n)+N3*U(n+1)+N4*O(n+1));
    ux=Le*n-1;
    trans=[1 0 ux;0 1 0;0 0 1]; %Matriz translação
    T=trans;
    tf=maketform('affine',T'); %Matriz de transformação, desta vez de T
    onde affine dáno a projecção projectiva
    Wx=imtransform(Wx,tf); %Dimensões da janela
    x1=linspace(nodeCoordinates(n),nodeCoordinates(n+1),100);
    hold on
    plot(x1,Wx)
end
plot(nodeCoordinates,-U, '.');
TimeSpent = toc

```

## Anexo IV - Código Matlab de um Problema Estático – Formulação Clássica (Timoshenko)

```

%% Timoshenko
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms G
syms Ac
syms m

xj=Le;
xi=0;
Ni=(xj-x)/(xj-xi);
Nj=(x-xi)/(xj-xi);
dNi=diff(Ni,1,x);
dNj=diff(Nj,1,x);
B=[dNi dNj 0 0;Ni Nj dNi dNj];
B_t=B';
D=[E*I 0;0 G*Ac];
Ke=int(B_t*D*B,x,0,Le);
% Ke=[ (Ac*G*Le)/4+E*I/Le, (Ac*G*Le)/4-E*I/Le, (Ac*G)/2, -(Ac*G)/2
%      (Ac*G*Le)/4-E*I/Le, (Ac*G*Le)/4+E*I/Le, (Ac*G)/2, -(Ac*G)/2
%      (Ac*G)/2, (Ac*G)/2, (Ac*G)/Le, -(Ac*G)/Le
%      -(Ac*G)/2, -(Ac*G)/2, -(Ac*G)/Le, (Ac*G)/Le];
fe=int([Ni 0;Nj 0;0 Ni;0 Nj]*[m;P],x,0,Le);

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=1; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=5.6; A=b*h; poisson=0.3;
densidade=7860;
numberElements=80; %Número elementos
P=15000; %Carga distribuida
m=0; %Momento distribuido
pos_inicial=2.8;
pos_final=L;
F=42000; %Carga concentrada
posicao_F=1.4;

k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+poisson));

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Dá as coordenadas dos nós de
0 a l
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Condições fronteira
n=4;
if n==1;
%Viga duplamente encastrada

```

```

    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1 numberNodes]'; %g.l. rotação fixos
elseif n==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[]'; %g.l. rotação fixos
elseif n==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[numberNodes+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1]'; %g.l. rotação fixos
elseif n==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1]'; %g.l. rotação fixos
end
prescribedDof=[fixedNodeO;fixedNodeU]; %g.l. que são nulos

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes (i,1)=i;
    elementNodes (i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e rotação
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
U=zeros (GDof,1); %Vector dos deslocamentos e rotações
force=zeros (GDof,1); %Vector força
stiffness=zeros (GDof); %Vector rigidez

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes (e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ indice indice+numberNodes]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx (indice (2))-xx (indice (1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs (Ke);
%Vector força do elemento
    f1=subs (fe);
%Equivalent force vector
    force (elementDof)=force (elementDof)+f1; %Cria o vector força global
%Stiffness matrix
    stiffness (elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness (elementDof,elementDof)+k1;
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
% Mensagem de erro
    error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=zeros (GDof,1);

```

```

f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force
(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)));
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)))=force(round(GDof/2+1));
f1(round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force(round(GDof));
f2=zeros(GDof,1);
f2(GDof/2+1+z2)=F;
if pos_final-pos_inicial==L
force=force+f2;
else
force=f1+f2;
end

%Solução
%Function to find solution in terms of global displacements
activeDof=setdiff([1:GDof],[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
U=stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof); %Resolução do sistema
reduzido dando os valores nodais
displacements=zeros(GDof,1); %Vector deslocamento(zeros)
displacements(activeDof)=U; %Solução do problema já com os g.l. nulos

%Drawing deformed shape
U=displacements(GDof/2+1:GDof); %Valores de deslocamento
O=displacements(1:GDof/2); %Valores de rotação

%Gráficos
hold on
plot(nodeCoordinates,-O, '.',nodeCoordinates,-O,'b-');
hold off
figure
plot(nodeCoordinates,-U, '.',nodeCoordinates,-U,'b-');
TimeSpent = toc

```

## Anexo V - Código Matlab de um Problema Dinâmico – Formulação Mista (Forma Compacta)

```

% Análise Dinâmica Formulação mista
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms G
syms A
syms Ac
syms m
syms densidade

%Funções de forma
xj=Le;
xi=0;
Ni=(xj-x)/(xj-xi);
Nj=(x-xi)/(xj-xi);
dNi=diff(Ni,1,x);
dNj=diff(Nj,1,x);

corte='sim';
if corte=='sim'
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNi,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNi*dNj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNi,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le)+1/(G*Ac)*int(dNj*dNj,x,0,Le);
else
    K11= 1/(E*I)*int(Ni*Ni,x,0,Le);
    K12= 1/(E*I)*int(Ni*Nj,x,0,Le);
    K21= 1/(E*I)*int(Nj*Ni,x,0,Le);
    K22= 1/(E*I)*int(Nj*Nj,x,0,Le);
end
end
K13=int(dNi*dNi,x,0,Le);
K14=int(dNi*dNj,x,0,Le);
K23=int(dNj*dNi,x,0,Le);
K24=int(dNj*dNj,x,0,Le);

Ae=[K11 K12;K21 K22];
Be=[K13 K14;K23 K24];
Ke=[Ae,Be;Be',zeros(2,2)];
Oe=[0;0];
Ve=[int(Ni*P*(Ni+Nj),x,0,Le);int(Nj*P*(Ni+Nj),x,0,Le)];
fe=[Oe;Ve];
N=[0 0 Ni Nj];
N_t=N';
Me=A*densidade*int(N_t*N,x,0,Le);

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=0.25; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=4; A=b*h; poisson=0.3;
densidade=7860;
numberElements=80; %Número elementos
n_iter=100; %Número de iterações

```

```

P=0; %Carga distribuída
m=0; %Momento distribuído
pos_inicial=0;
pos_final=L;
F=500; %Carga concentrada
posicao_F=L;

k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+poisson));

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Dá as coordenadas dos nós de
0 a l
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Condições fronteira
nn=3;
if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[]'; %g.l. momentos nulos
elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[1 numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
elseif nn==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[1 numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeM =[numberNodes]'; %g.l. momentos nulos
end
%g.l. que são nulos
prescribedDof_M=[fixedNodeM];
prescribedDof_U=[fixedNodeU];

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e momento
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
force=zeros(GDof,n_iter); %Vector força e rotação
stiffness=zeros(GDof); %Vector rigidez
mass=zeros(GDof); %Vector rigidez
C=zeros(GDof);

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento

```

```

    elementDof=[ indice indice+numberNodes]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx(indice(2))-xx(indice(1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke);
%Matriz massa do elemento
    M1=subs(Me);
%Vector força do elemento
    f1=subs(fe);
%Equivalent force vector
    force(elementDof,2)=force(elementDof,2)+f1; %Cria o vector força
global
%Stiffness matrix
    stiffness(elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
%Smatriz massa global
    mass(elementDof,elementDof)=...
    mass(elementDof,elementDof)+M1;
end

%Free vibration problem
activeDof_M=setdiff([1:GDof/2]',[prescribedDof_M]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
activeDof_U=setdiff([1:GDof/2]',[prescribedDof_U]);

%Matrizes s.global
AA=stiffness(1:GDof/2,1:GDof/2);
BB=stiffness(1:GDof/2,GDof/2+1:GDof);
MM=mass(GDof/2+1:GDof,GDof/2+1:GDof);

%Matrizes s.reduzido
AA=AA(activeDof_M,activeDof_M);
BB=BB(activeDof_M,activeDof_U);
MM=MM(activeDof_U,activeDof_U);
KK=BB'*AA^-1*BB;

[V,D]=eig(KK,MM); %Retira os eigenvectors das colunas de V e eigenvalues
da diagonal de D
D=diag(D); %Retira os valores das diagonais de
w=sort(sqrt(D));
modeNumber=1; %Modo de vibração
w1=w(modeNumber);
mode_shape=V(:,modeNumber);
f=w1/(2*pi);
T=1/f;
t=T/16;

%Constantes de amortecimento
C=zeros(size(KK));
amortecimento='não'
if amortecimento=='sim'
% zeta =0.001/100
% C=subs(zeta*2*sqrt(stiffness*mass))
    zeta1=4.4/100;
    zeta2=1.1/100;
    beta=2/w(1)*(zeta1-w(2)/w(1)*zeta2)/(1-w(2)^2/w(1)^2)
    alpha=(zeta2-beta*w(2)/2)*2*w(2)

```

```

    C=subs (alpha*MM+beta*KK);
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
% Mensagem de erro
    error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=zeros (GDof,1);
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force
(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)));
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)))=force(round(GDof/2+1));
f1(round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force(round(GDof));
f2=zeros (GDof,n_iter);

%Carga móvel
% for n=1:GDof/2
%     f2(n+GDof/2,n)=F;
% end

%Carga estática de 0.025s
if nn==1;
    f2(round(GDof/2+1+z2),2:105)=F; %Colocar aqui as iterações afectadas
pela força
elseif nn==2;
    f2(round(GDof/2+1+z2),2:45)=F;
elseif nn==3;
    f2(round(GDof/2+1+z2),2:12)=F;
end

if pos_final- pos_inicial==L
    force=force+f2;
else
    force=f1+f2;
end

%Vectores deslocamento e suas derivadas no tempo
U=zeros (GDof/2,n_iter); %Vector dos deslocamentos e rotações
dU=zeros (GDof/2,n_iter);
ddU=zeros (GDof/2,n_iter);
VV=force (GDof/2+1:GDof,:);

%Sistema reduzido
U=U(activeDof_U,:);
dU=dU(activeDof_U,:);
ddU=ddU(activeDof_U,:);
F=VV(activeDof_U,:);
K=KK;
M=MM;
C=C;

%Solução
for n=1:1:n_iter-1

```

```

ddU(:,n+1)=(K*0.25*t^2+C*0.5*t+M)^-1*(F(:,n+1)-K*U(:,n)-(K*t+C)*dU(:,n)-
(K*0.25*t^2+C*0.5*t)*ddU(:,n));
dU(:,n+1)=dU(:,n)+0.5*t*(ddU(:,n+1)+ddU(:,n));
U(:,n+1)=U(:,n)+0.5*t*(dU(:,n+1)+dU(:,n));
end

%Momentos
Momentos=-AA^-1*BB*U;

%Solução do problema já com os g.l. nulos
displacements=zeros(GDof/2,n_iter);
displacements(activeDof_U,:)=U;
Moments=zeros(GDof/2,n_iter);
Moments(activeDof_M,:)=Momentos;
T_normal=h*Moments/(2*I);
VVV=zeros(numberElements+1,n_iter);

for n=1:numberElements;
    VVV(n,:)=subs(dNi)*Moments(n,:)+subs(dNj)*Moments(n+1,:);
end
T_corte=k.*VVV/Ac;

%Drawing deformed shape
U=displacements; %Valores de deslocamento

udin=max(max(abs(U)))
P=max(max(abs(F)));

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    uest=P*L^3/(192*E*I)
    elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    uest=P*L^3/(48*E*I)
    elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    uest=P*L^3/(3*E*I)
end

fdin=udin/uest
tt=0:t:(n_iter-1)*t;

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    plot(tt,-U(round(GDof/4),:))
    elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    plot(tt,-U(round(GDof/4),:))
    elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    plot(tt,-U(end,:))
end

%Gráfico - Deslocamento
figure
for i=1:10:n_iter;
    Ui=U(:,i);

```

```

    plot(nodeCoordinates,-Ui);
    hold on
    plot(Le*i,0,'k*');
    hold off
    axis([0 4 -6.1*10^-6 1.1*10^-6]);
    pause(0.1);
end

%Gráfico - Tensão Normal
figure
for i=1:10:n_iter;
    Mi=T_normal(:,i);
    plot(nodeCoordinates,-Mi);
    hold on
    plot(Le*i,0,'k*');
    hold off
    axis([0 4 -5*10^5 5*10^5]);
    pause(0.1);
end

%Gráfico - Tensão de Corte
figure
for i=linspace(1,n_iter,10);
    Vi=T_corte(:,i);
    plot(nodeCoordinates,-Vi);
    hold on
    plot(Le*i,0,'k*');
    hold off
    axis([0 4 -5*10^5 5*10^5]);
    pause(0.1);
end
TimeSpent = toc

```

## Anexo VI - Código Matlab de um Problema Dinâmico – Formulação Clássica (Euler-Bernoulli)

```

% Análise Dinâmica - Euler Bernoulli
tic
clc, clear all, close all;
syms xe
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms densidade
syms A
syms f

N1=-1+(3*xe^2)/(Le^2)-(2*xe^3)/(Le^3);
N2=-xe+(2*xe^2)/(Le)-(xe^3)/(Le^2);
N3=-(3*xe^2)/(Le^2)+(2*xe^3)/(Le^3);
N4=(xe^2)/(Le)-(xe^3)/(Le^2);
dN1=-diff(N1,2,xe);
dN2=-diff(N2,2,xe);
dN3=-diff(N3,2,xe);
dN4=-diff(N4,2,xe);
B=[dN1 dN2 dN3 dN4];
B_t=[dN1;dN2;dN3;dN4];
Ke=E*I*int(B_t*B,xe,0,Le);
fe=-int([N1;N2;N3;N4]*P,xe,0,Le);
N=[N1 N2 N3 N4];
N_t=[N1;N2;N3;N4];
Me=A*densidade*int(N_t*N,xe,0,Le);

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=0.8; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=4; A=b*h; densidade=7860;
numberElements=80; %Número elementos
n_iter=200; %Número de iterações
P=0; %Carga distribuída
pos_inicial=0;
pos_final=L;
F=10000; %Carga concentrada
posicao_F=L/2;

%Condições fronteira
nn=1;
if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2 2*numberElements+2]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L

```

```

    fixedNodeU =[1 2*numberElements+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[2]'; %g.l. rotação fixos
end
prescribedDof=[fixedNodeU;fixedNodeO]; %g.l. que são nulos

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Dá as coordenadas dos nós de
0 a L
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e rotação
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
force=zeros(GDof,n_iter); %Vector força
stiffness=zeros(GDof); %Vector rigidez
mass=zeros(GDof); %Vector rigidez
C=zeros(GDof);

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ 2*(indice(1)-1)+1 2*(indice(2)-1)...
        2*(indice(2)-1)+1 2*(indice(2)-1)+2]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx(indice(2))-xx(indice(1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke);
%Matriz massa do elemento
    M1=subs(Me);
%Vector força do elemento
    f1=subs(fe);
%Equivalent force vector
    force(elementDof,2)=force(elementDof,2)+f1;%cria o vector força
global
%Matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)=...
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
%Matriz massa global
    mass(elementDof,elementDof)=...
    mass(elementDof,elementDof)+M1;
end

%Free vibration problem
activeDof=setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
[V,D]=eig(stiffness(activeDof,activeDof),...
mass(activeDof,activeDof)); %Retira os eigenvectors das colunas de V e
eigenvalues da diagonal de D
D=diag(D); %Retira os valores das diagonais de

```

```

w=sort(sqrt(D));
modeNumber=1; %Modo de vibração
w1=w(modeNumber);
mode_shape=V(:,modeNumber);
f=w1/(2*pi);
T=1/f;
t=T/16;

%Constantes de amortecimento
C=zeros(size(stiffness));
amortecimento='não'
if amortecimento=='sim'
% zeta =0.001/100
% C=subs(zeta*2*sqrt(stiffness*mass))
zeta1=4.4/100;
zeta2=1.1/100;
beta=2/w(1)*(zeta1-w(2)/w(1)*zeta2)/(1-w(2)^2/w(1)^2)
alpha=(zeta2-beta*w(2)/2)*2*w(2)
C=subs(alpha*mass+beta*stiffness);
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
%Mensagem de erro
error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=force;
f1(1:round((pos_inicial/Le)*2))=0;
f1(round((pos_final/Le+1)*2+1):GDof)=0;
f1(round(pos_inicial/Le+1)*2-1)=force(1);
f1(round((pos_final/Le)*2+1))=force(GDof-1);
f1(round(pos_inicial/Le+1)*2)=force(2);
f1(round((pos_final/Le)*2+2))=force(GDof);
f2=zeros(GDof,n_iter);

%Carga móvel
% for n=1:GDof/2
%     f2(2*n-1,n)=F;
% end

%Carga estática de 0.025s
if nn==1;
f2(round((z2+1)*2-1),2:105)=F; %Colocar aqui as iterações afectadas
pela força
elseif nn==2;
f2(round((z2+1)*2-1),2:45)=F;
elseif nn==3;
f2(round((z2+1)*2-1),2:18)=F;
end

if pos_final-pos_inicial==L
force=force+f2;
else
force=f1+f2;

```

```

end

%Vetores deslocamento e suas derivadas no tempo
U=zeros(GDof,n_iter); %Vector dos deslocamentos e rotações
dU=zeros(GDof,n_iter);
ddU=zeros(GDof,n_iter);

%Sistema reduzido
activeDof=setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
U=U(activeDof,:);
dU=dU(activeDof,:);
ddU=ddU(activeDof,:);
F=force(activeDof,:);
K=stiffness(activeDof,activeDof);
M=mass(activeDof,activeDof);
C=C(activeDof,activeDof);

%Solução
for n=1:1:n_iter-1
ddU(:,n+1)=(K*0.25*t^2+C*0.5*t+M)^-1*(F(:,n+1)-K*U(:,n)-(K*t+C)*dU(:,n)-
(K*0.25*t^2+C*0.5*t)*ddU(:,n));
%ddU(:,n+1)=(K*1/6*t^2+C*0.5*t+M)^-1*(F(:,n+1)-K*U(:,n)-(K*t+C)*dU(:,n)-
(K*1/3*t^2+C*0.5*t)*ddU(:,n));
dU(:,n+1)=dU(:,n)+0.5*t*(ddU(:,n+1)+ddU(:,n));
%dU(:,n+1)=dU(:,n)+ddU(:,n)*t+(ddU(:,n+1)-ddU(:,n))/2*t;
U(:,n+1)=U(:,n)+0.5*t*(dU(:,n+1)+dU(:,n));
%U(:,n+1)=U(:,n)+dU(:,n)*t+ddU(:,n)/2*t^2+(ddU(:,n+1)-ddU(:,n))/6*t^2;
end

%Solução do problema já com os g.l. nulos
displacements=zeros(GDof,n_iter);
displacements(activeDof,:)=U;

%Drawing deformed shape
U=displacements(1:2:GDof,:); %Valores de deslocamento

udin=max(max(abs(U)))
P=max(max(abs(F)));

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
uest=P*L^3/(192*E*I)
elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
uest=P*L^3/(48*E*I)
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
uest=P*L^3/(3*E*I)
end

fdin=udin/uest
tt=0:t:(n_iter-1)*t;

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
plot(tt,-U(round(GDof/4),:))

```

```

elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
plot(tt,-U(round(GDof/4),:))
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
plot(tt,-U(end,:))
end

figure
%Gráficos
for i=1:1:n_iter;
Ui=U(:,i);
plot(nodeCoordinates,-Ui,'.');
axis([0 4 -1*10^-5 1*10^-5]);
pause(0.1);
end
TimeSpent = toc

```

## Anexo VII - Código Matlab de um Problema Dinâmico – Formulação Clássica (Timoshenko)

```

% Análise Dinâmica - Timoshenko
tic
clc, clear all, close all;
syms x
syms Le
syms E
syms I
syms P
syms G
syms Ac
syms m
syms densidade

xj=Le;
xi=0;
Ni=(xj-x)/(xj-xi);
Nj=(x-xi)/(xj-xi);
dNi=diff(Ni,1,x);
dNj=diff(Nj,1,x);
B=[dNi dNj 0 0;Ni Nj dNi dNj];
B_t=B';
D1=[E*I 0;0 G*Ac];
Ke=int(B_t*D1*B,x,0,Le);
fe=int([Ni 0;Nj 0;0 Ni;0 Nj]*[m;P],x,0,Le);
N=[Ni Nj 0 0;0 0 Ni Nj];
N_t=N';
D2=[densidade*I 0;0 densidade*Ac];
Me=int(N_t*D2*N,x,0,Le);

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=0.8; I=b*h^3/12; EI=E*I; L=4; A=b*h; poisson=0.3;
densidade=7860;
numberElements=80; %Número elementos
n_iter=150; %Número de iterações
P=0; %Carga distribuída
m=0; %Momento distribuído
pos_inicial=0;
pos_final=L;
F=10000; %Carga concentrada
posicao_F=L/2;

k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+poisson));

%Geração das coordenadas dos nós
numberNodes=numberElements+1;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberNodes)'; %Dá as coordenadas dos nós de
0 a L
xx=nodeCoordinates;
xx=nodeCoordinates(:,1);

%Condições fronteira
nn=1;

```

```

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1 numberNodes]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    fixedNodeU =[numberNodes+1]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1]'; %g.l. rotação fixos
elseif nn==4;
%Viga encastrada em x=0 e s.apoiada em x=L
    fixedNodeU =[numberNodes+1 2*numberNodes]'; %g.l. deslocamento fixos
    fixedNodeO =[1]'; %g.l. rotação fixos
end
prescribedDof=[fixedNodeO;fixedNodeU]; %g.l. que são nulos

%Ciclo for cria matriz elementnodes em que as linhas representam o
elemento e as colunas representam os nós do respectivo elemento
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end

%Graus de liberdade - deslocamento transverso e rotação
GDof=2*numberNodes; %2 g.l. por cada nó
force=zeros(GDof,n_iter); %Vector força
stiffness=zeros(GDof); %Vector rigidez
mass=zeros(GDof); %Vector rigidez

%Cálculo da matriz rigidez e do vector força
for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:); %Extrai os nós de cada elemento
    elementDof=[ indice indice+numberNodes]; %Extrai os g.l. de cada
elemento (4)
%Comprimento dos elementos igual a diferença das coordenadas do elemento
    Le=xx(indice(2))-xx(indice(1));
%Matriz rigidez do elemento
    k1=subs(Ke);
%Matriz massa do elemento
    M1=subs(Me);
%Vector força do elemento
    f1=subs(fe);
%Equivalent force vector
    force(elementDof,2)=force(elementDof,2)+f1; %Cria o vector força
global
%Stiffness matrix
    stiffness(elementDof,elementDof)=... %Cria a matriz rigidez global
    stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
%Matriz massa global
    mass(elementDof,elementDof)=...
    mass(elementDof,elementDof)+M1;
end

%Free vibration problem

```

```

activeDof=setdiff([1:GDof]', [prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
[V,D]=eig(stiffness(activeDof,activeDof),...
mass(activeDof,activeDof)); %Retira os eigenvectors das colunas de V e
eigenvalues da diagonal de D
D=diag(D); %Retira os valores das diagonais de
w=sort(sqrt(D));
modeNumber=1; %Modo de vibração
w1=w(modeNumber);
mode_shape=V(:,modeNumber);
f=w1/(2*pi);
T=1/f;
t=T/16;

%Constantes de amortecimento
C=zeros(size(stiffness));
amortecimento='não'
if amortecimento=='sim'
% zeta =0.001/100
% C=subs(zeta*2*sqrt(stiffness*mass))
zeta1=4.4/100;
zeta2=1.1/100;
beta=2/w(1)*(zeta1-w(2)/w(1)*zeta2)/(1-w(2)^2/w(1)^2)
alpha=(zeta2-beta*w(2)/2)*2*w(2)
C=subs(alpha*mass+beta*stiffness);
end

z1=(pos_final-pos_inicial)/Le;
z1=str2num(sprintf('%5.4f',z1));
z2=posicao_F/Le;
z2=str2num(sprintf('%5.4f',z2));
if (fix(z2) - z2) ~= 0 or (fix(z1) - z1) ~= 0
%Mensagem de erro
error('O número de elementos não serve para o problema')
end

f1=zeros(GDof,1);
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force
(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)):round(GDof/2+1+(pos_final/Le)));
f1(round(GDof/2+1+(pos_inicial/Le)))=force(round(GDof/2+1));
f1(round(GDof/2+1+(pos_final/Le)))=force(round(GDof));
f2=zeros(GDof,n_iter);

%Carga móvel
% for n=1:GDof/2
%     f2(n+GDof/2,n)=F;
% end

%Carga estática de 0.025s
if nn==1;
f2(round(GDof/2+1+z2),2:105)=F; %Colocar aqui as iterações afectadas
pela força
elseif nn==2;
f2(round(GDof/2+1+z2),2:45)=F;
elseif nn==3;
f2(round(GDof/2+1+z2),2:45)=F;
end

```

```

if pos_final- pos_inicial==L
    force=force+f2;
else
    force=f1+f2;
end

%Vetores deslocamento e suas derivadas no tempo
U=zeros(GDof,n_iter); %Vector dos deslocamentos e rotações
dU=zeros(GDof,n_iter);
ddU=zeros(GDof,n_iter);

%Sistema reduzido
activeDof=setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]); %Dá os g.l. não nulos
através do comando setdiff
U=U(activeDof,:);
dU=dU(activeDof,:);
ddU=ddU(activeDof,:);
F=force(activeDof,:);
K=stiffness(activeDof,activeDof);
M=mass(activeDof,activeDof);
C=C(activeDof,activeDof);

%Solução
for n=1:1:n_iter-1
    ddU(:,n+1)=(K*0.25*t^2+C*0.5*t+M)^-1*(F(:,n+1)-K*U(:,n)-
        (K*t+C)*dU(:,n)-(K*0.25*t^2+C*0.5*t)*ddU(:,n));
    dU(:,n+1)=dU(:,n)+0.5*t*(ddU(:,n+1)+ddU(:,n));
    U(:,n+1)=U(:,n)+0.5*t*(dU(:,n+1)+dU(:,n));
end

%Solução do problema já com os g.l. nulos
displacements=zeros(GDof,n_iter);
displacements(activeDof,:)=U;

%Drawing deformed shape
U=displacements(GDof/2+1:1:GDof,:); %Valores de deslocamento

udin=max(max(abs(U)))
P=max(max(abs(F)));

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    uest=P*L^3/(192*E*I)
elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
    uest=P*L^3/(48*E*I)
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
    uest=P*L^3/(3*E*I)
end

fdin=udin/uest
tt=0:t:(n_iter-1)*t;

if nn==1;
%Viga duplamente encastrada
    plot(tt,-U(round(GDof/4),:))

```

```

elseif nn==2;
%Viga simplesmente apoiada
plot(tt,-U(round(GDof/4),:))
elseif nn==3;
%Viga encastrada em x=0
plot(tt,-U(end,:))
end

figure
%Gráficos
for i=1:1:n_iter;
    Ui=U(:,i);
    plot(nodeCoordinates,-Ui,'.');
    axis([0 4 -2*10^-6 2*10^-6]);
    pause(0.1);
end
TimeSpent = toc

```

## Anexo VIII - Código MATLAB para resolução do Exemplo 2 – Solução Analítica (Timoshenko)

```

%% Exemplo 2 - solução exacta(Timoshenko)
clc, clear all, close all;

%Variáveis
syms x;
syms x1;
syms x2;
syms x3;
syms RA;
syms MA;

%Dados
E=210*10^9; b=0.3; h=1; I=b*h^3/12; EI=E*I; Le=4; A=b*h; v=0.3;
k=5/6;
Ac=k*A;
G=E/(2*(1+v))
F=42000;
p=15000;

c1=0;
c2=2*(1+v)*I*MA/Ac;

%Funções singulares
Vx=RA-F*(x-1.4)^0-p*(x-2.8)^1;
Mx=RA*x-F*(x-1.4)^1-p/2*(x-2.8)^2+MA;
Ox=(RA/2*x^2-F/2*(x-1.4)^2-p/6*(x-2.8)^3+MA*x+c1)/(E*I);
Wx=((RA*x-F*(x-1.4)^1-p/2*(x-2.8)^2+MA)/(E*I))-((RA/6*x^3-F/6*(x-1.4)^3-
p/24*(x-2.8)^4+MA/2*x^2+c1*x+c2)/(E*I));

%Condições fronteira
x=5.6;
Mx=subs(Mx)
Wx=subs(Wx)
[MA, RA]=solve('MA + (28*RA)/5 - 235200 = 0','5747/93750000 -
(317*RA)/70312500000 - (249*MA)/87500000000 = 0')

%Função deslocamento transverso
Wx_1=((RA*x1-0*F*(x1-1.4)^1-0*p/2*(x1-2.8)^2+MA)/(G*Ac))-((RA/6*x1^3-
0*F/6*(x1-1.4)^3-0*p/24*(x1-2.8)^4+MA/2*x1^2+c1*x1+c2)/(E*I));
Wx_2=((RA*x2-F*(x2-1.4)^1-0*p/2*(x2-2.8)^2+MA)/(G*Ac))-((RA/6*x2^3-
F/6*(x2-1.4)^3-0*p/24*(x2-2.8)^4+MA/2*x2^2+c1*x2+c2)/(E*I));
Wx_3=((RA*x3-F*(x3-1.4)^1-p/2*(x3-2.8)^2+MA)/(G*Ac))-((RA/6*x3^3-F/6*(x3-
1.4)^3-p/24*(x3-2.8)^4+MA/2*x3^2+c1*x3+c2)/(E*I));

%Função momentos
Mx_1=RA*x1-0*F*(x1-1.4)^1-0*p/2*(x1-2.8)^2+MA;
Mx_2=RA*x2-F*(x2-1.4)^1-0*p/2*(x2-2.8)^2+MA;
Mx_3=RA*x3-F*(x3-1.4)^1-p/2*(x3-2.8)^2+MA;

%Função esforços
Vx_1=RA-0*F*(x1-1.4)^0-0*p*(x1-2.8)^1;
Vx_2=RA-F*(x2-1.4)^0-0*p*(x2-2.8)^1;
Vx_3=RA-F*(x3-1.4)^0-p*(x3-2.8)^1;

```

```

%Função rotação
Ox_1=(RA/2*x1^2-0*F/2*(x1-1.4)^2-0*p/6*(x1-2.8)^3+MA*x1+c1)/(E*I);
Ox_2=(RA/2*x2^2-F/2*(x2-1.4)^2-0*p/6*(x2-2.8)^3+MA*x2+c1)/(E*I);
Ox_3=(RA/2*x3^2-F/2*(x3-1.4)^2-p/6*(x3-2.8)^3+MA*x3+c1)/(E*I);

%Gráfico
x1=linspace(0,1.4,100);
x2=linspace(1.4,2.8,100);
x3=linspace(2.8,5.6,100);
Wx_1=subs(Wx_1);
Wx_2=subs(Wx_2);
Wx_3=subs(Wx_3);
hold on
plot(x1,Wx_1)
plot(x2,Wx_2)
plot(x3,Wx_3)
hold off

figure
Mx_1=subs(Mx_1);
Mx_2=subs(Mx_2);
Mx_3=subs(Mx_3);
hold on
plot(x1,Mx_1)
plot(x2,Mx_2)
plot(x3,Mx_3)

figure
Ox_1=subs(Ox_1);
Ox_2=subs(Ox_2);
Ox_3=subs(Ox_3);
hold on
plot(x1,Ox_1)
plot(x2,Ox_2)
plot(x3,Ox_3)

figure
Vx_1=subs(Vx_1);
Vx_2=subs(Vx_2);
Vx_3=subs(Vx_3);
hold on
plot(x1,Vx_1)
plot(x2,Vx_2)
plot(x3,Vx_3)

```

## Anexo IX - Código MATLAB para Modos de Vibração de uma Viga Simplesmente Apoiada – Solução Analítica

```

%% Eq. ondas propagação viga s. apoiada força no centro da viga
clc, clear all, close all;
syms xx
syms L
syms c
syms n

beta=n*pi()/L;
Yi=c*sin(beta*xx);
dYi=diff(Yi,xx);
ddYi=diff(dYi,xx);
dddYi=diff(ddYi,xx);
ddddYi=diff(dddYi,xx)

x=linspace(0,4,100);
L=4;
E=206.8*10^9;
b=0.3;
h=0.8;
I=b*h^3/12;
A=b*h;
Densidade=7830;
F=10000;
we=F*L^3/(48*E*I);

for i=1
    n=1;
    xx=L/2;
    ddddYi=subs(ddddYi)
    c=256*F/(E*I*pi^4)
    beta=i*pi()/L;
    Yi=c*sin(beta*x);
    for t=1:0.0005:1.05
        w=beta^2*sqrt(E*I/(Densidade*A));
        yi=Yi*cos(w*t);
        plot(x,yi)
        axis([0 4 -8*10^-6 8*10^-6]);
        pause(0.1);
        plot(x,we,'g.')
        hold on
        plot(x,-we,'g.')
        handle1=plot(x,Yi,'r');
        handle2=plot(x,-Yi,'r');
        set(handle1,'LineWidth',[2]);
        set(handle2,'LineWidth',[2]);
        hold off
    end
end

```

## Anexo X - Código MATLAB para Modos de Vibração de uma Viga em Consola – Solução Analítica

```
% Eq. ondas propagação viga encastrada
clc, clear all, close all;

syms x
L=4;
E=206.8*10^9;
b=0.3;
h=0.8;
I=b*h^3/12;
A=b*h;
Densidade=7830;
F=10000;
we=F*L^3/(3*E*I);
fdin=1.5;
wd=fdin*we;
c=wd
c1=4*04458^-5;
%c2=c;

for i=4 %Maior ou igual a 4
    i1=1.875104069;
    i2=4.694091133;
    i3=7.854757438;
    ii=(i-0.5)*pi;
    beta=(i1)/L;
    Yi=c1*(cosh(beta*x)-
    cos(beta*x)+(cosh(beta*x)+cos(beta*x))/(sinh(beta*x)+sin(beta*x))*(-
    sinh(beta*x)+sin(beta*x)));
    An=1;
    fase=0;
    for t=0:0.1:10
        x=linspace(0,4,100);
        Yi=subs(Yi);
        w=beta^2*sqrt(E*I/(Densidade*A));
        %yi=Yi*(An*cos(w*t)+Bn*sin(w*t));
        yi=Yi*An*cos(w*t+fase);
        plot(x,yi);
        axis([0 4 -8*10^-4 8*10^-4]);
        pause(0.05);
        plot(x,we,'g.')
        hold on
        plot(x,-we,'g.')
        handle1=plot(x,Yi,'r');
        handle2=plot(x,-Yi,'r');
        set(handle1,'LineWidth',[2]);
        set(handle2,'LineWidth',[2]);
        hold off
    end
end
```

**Anexo XI – Deslocamentos Nodais , Velocidades Nodais e Acelerações Nodais, na extremidade livre do Exemplo 3, para as várias iterações temporais – MEF com um só elemento**

Iteração	$w (m)$	$\dot{w} (m)$	$\ddot{w} (m)$
1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
2	4,83E-06	1,72E-03	6,13E-01
3	2,34E-05	4,90E-03	5,22E-01
4	5,78E-05	7,36E-03	3,53E-01
5	1,03E-04	8,72E-03	1,32E-01
6	1,52E-04	8,79E-03	-1,08E-01
7	1,98E-04	7,55E-03	-3,33E-01
8	2,34E-04	5,19E-03	-5,08E-01
9	2,54E-04	2,06E-03	-6,07E-01
10	2,56E-04	-1,37E-03	-6,17E-01
11	2,39E-04	-4,61E-03	-5,35E-01
12	2,06E-04	-7,15E-03	-3,73E-01
13	1,57E-04	-1,04E-02	-7,69E-01
14	8,95E-05	-1,37E-02	-4,38E-01
15	8,52E-06	-1,51E-02	-4,17E-02
16	-7,37E-05	-1,42E-02	3,61E-01
17	-1,45E-04	-1,12E-02	7,09E-01
18	-1,95E-04	-6,53E-03	9,53E-01
19	-2,16E-04	-8,94E-04	1,05E+00
20	-2,04E-04	4,87E-03	1,00E+00
21	-1,63E-04	9,92E-03	7,97E-01
22	-9,72E-05	1,35E-02	4,75E-01
23	-1,70E-05	1,51E-02	8,33E-02
24	6,56E-05	1,44E-02	-3,21E-01
25	1,39E-04	1,16E-02	-6,78E-01

Iteração	$w (m)$	$\dot{w} (m)$	$\ddot{w} (m)$
26	1,91E-04	7,06E-03	-9,34E-01
27	2,15E-04	1,49E-03	-1,05E+00
28	2,07E-04	-4,31E-03	-1,01E+00
29	1,68E-04	-9,46E-03	-8,24E-01
30	1,05E-04	-1,32E-02	-5,12E-01
31	2,55E-05	-1,50E-02	-1,25E-01
32	-5,75E-05	-1,46E-02	2,81E-01
33	-1,32E-04	-1,20E-02	6,45E-01
34	-1,87E-04	-7,58E-03	9,14E-01
35	-2,14E-04	-2,08E-03	1,05E+00
36	-2,09E-04	3,73E-03	1,02E+00
37	-1,74E-04	8,99E-03	8,49E-01
38	-1,12E-04	1,29E-02	5,48E-01
39	-3,39E-05	1,49E-02	1,66E-01
40	4,92E-05	1,47E-02	-2,41E-01
41	1,25E-04	1,23E-02	-6,12E-01
42	1,82E-04	8,09E-03	-8,92E-01
43	2,13E-04	2,67E-03	-1,04E+00
44	2,11E-04	-3,15E-03	-1,03E+00
45	1,78E-04	-8,50E-03	-8,73E-01
46	1,19E-04	-1,26E-02	-5,83E-01
47	4,23E-05	-1,48E-02	-2,07E-01
48	-4,09E-05	-1,48E-02	2,00E-01
49	-1,18E-04	-1,26E-02	5,77E-01
50	-1,78E-04	-8,59E-03	8,69E-01

Iteração	$w (m)$	$\dot{w} (m)$	$\ddot{w} (m)$
51	-2,11E-04	-3,25E-03	1,03E+00
52	-2,13E-04	2,57E-03	1,04E+00
53	-1,83E-04	8,00E-03	8,96E-01
54	-1,26E-04	1,23E-02	6,18E-01
55	-5,07E-05	1,47E-02	2,48E-01
56	3,25E-05	1,49E-02	-1,59E-01
57	1,11E-04	1,30E-02	-5,42E-01
58	1,73E-04	9,07E-03	-8,45E-01
59	2,09E-04	3,83E-03	-1,02E+00
60	2,14E-04	-1,98E-03	-1,05E+00
61	1,88E-04	-7,49E-03	-9,17E-01
62	1,33E-04	-1,19E-02	-6,51E-01
63	5,89E-05	-1,45E-02	-2,88E-01
64	-2,40E-05	-1,50E-02	1,18E-01
65	-1,03E-04	-1,33E-02	5,06E-01
66	-1,67E-04	-9,54E-03	8,19E-01
67	-2,07E-04	-4,41E-03	1,01E+00
68	-2,15E-04	1,38E-03	1,05E+00
69	-1,92E-04	6,97E-03	9,37E-01
70	-1,40E-04	1,15E-02	6,83E-01
71	-6,71E-05	1,44E-02	3,28E-01
72	1,55E-05	1,51E-02	-7,61E-02
73	9,58E-05	1,35E-02	-4,69E-01
74	1,62E-04	1,00E-02	-7,92E-01
75	2,04E-04	4,97E-03	-9,98E-01

Iteração	$w (m)$	$\dot{w} (m)$	$\ddot{w} (m)$
76	2,16E-04	-7,90E-04	-1,06E+00
77	1,95E-04	-6,43E-03	-9,56E-01
78	1,46E-04	-1,11E-02	-7,15E-01
79	7,51E-05	-1,42E-02	-3,67E-01
80	-7,04E-06	-1,51E-02	3,44E-02
81	-8,81E-05	-1,38E-02	4,31E-01
82	-1,56E-04	-1,04E-02	7,64E-01
83	-2,01E-04	-5,53E-03	9,83E-01
84	-2,16E-04	1,94E-04	1,06E+00
85	-1,99E-04	5,89E-03	9,73E-01
86	-1,52E-04	1,07E-02	7,45E-01
87	-8,30E-05	1,39E-02	4,06E-01
88	-1,48E-06	1,51E-02	7,26E-03
89	8,03E-05	1,40E-02	-3,93E-01
90	1,50E-04	1,09E-02	-7,34E-01
91	1,98E-04	6,08E-03	-9,67E-01
92	2,16E-04	4,02E-04	-1,06E+00
93	2,02E-04	-5,34E-03	-9,88E-01
94	1,58E-04	-1,03E-02	-7,74E-01
95	9,08E-05	-1,37E-02	-4,44E-01
96	1,00E-05	-1,51E-02	-4,89E-02
97	-7,23E-05	-1,42E-02	3,54E-01
98	-1,44E-04	-1,13E-02	7,04E-01
99	-1,94E-04	-6,62E-03	9,50E-01
100	-2,15E-04	-9,97E-04	1,05E+00