Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2013

Iola Marlene Loureiro do Couto Rocha

Mergulhar nas funções trigonométricas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores (2º ciclo), realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira e do Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Professor Doutor Luís António Arsénio Descalço
Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

Professor Doutor Gaspar José Brandão Queirós Azevedo Machado
Professor Auxiliar, Universidade do Minho

Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

Professor Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz
Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço profundamente à Doutora Paula Oliveira e ao Doutor João Pedro Cruz, pelo modo como me orientaram na elaboração deste trabalho e pela disponibilidade, carinho e incentivo.

Ao meu marido, Jorge, que compartilhou ao meu lado, toda esta conquista sofrendo com as minhas angústias e mau humor. Queria agradecer pela sua compreensão, companheirismo força e confiança que depositou em mim.

Aos meus filhos, Gonçalo, Rodrigo e Tiago, que muitas vezes tiveram que suportar, mesmo sem entender a minha ausência, não podendo dedicar-lhes a devida atenção.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, Manuel e Celeste, a quem tudo devo.

A todas as pessoas que de uma forma ou outra, direta ou indiretamente, ajudaram para que eu chegasse ao final do curso, transmitindo palavras de força, coragem e persistência.

palavras-chave

Funções trigonométricas, seno, cosseno, tangente, Sage Mathematics, GeoGebra

resumo

O presente trabalho tem por base o estudo exaustivo das funções trigonométricas ao nível do ensino secundário. Para tal, foram estudadas as classes de funções, por exemplo do tipo, $f(x)=a\ sen(bx+c)+d$ onde a, b, c e d são parâmetros e foram inferidas algumas das suas caraterísticas, como o domínio, o contradomínio, o período, os zeros, os máximos e mínimos, a paridade e as assíntotas, caso existam.
Foram também criados recursos digitais de apoio ao ensino destas funções, recorrendo aos softwares Geogebra e Sage Mathematics.

keywords

Trigonometric functions, sine, cosine, tangent, SageMathematics, GeoGebra

abstract

This work is based on thorough study of the trigonometric functions at the level of secondary education. We present classes of functions, for example of the type f (x) = a sin(bx + c)+ d where a, b, c and d are parameters and also presente some of its features, like domain, range, period, zeros, maxima and minima, parity and asymptotes when exists.
We also have created digital resources to support the teaching of these functions, using the Geogebra and Sage Mathematics software.

Conteúdo

Listagens

Capítulo 1

Introdução

> "A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos." (NCTM, 2007)

Este projeto foi desenvolvido tendo por base três princípios: a realidade do nosso ensino/aprendizagem, que está em constante evolução, a necessidade de diversificar materiais e o facto de as novas tecnologias poderem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem, uma vez que são uma realidade no dia-a-dia dos alunos.

Reavaliar o paradigma educacional é um grande desafio para os docentes e investigadores do século XXI, uma vez que não podemos ficar alheios ao facto das TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) serem uma realidade que tem transformado e continuará a transformar a vida de cada um de nós e concomitantemente a vida nas escolas e a forma como devemos encarar o ensino.

Quando somos confrontados com os resultados dos alunos em provas de matemática deparamo-nos frequentemente com elevadas taxas de insucesso. As dificuldades evidenciadas têm como justificação a desmotivação, a falta de atenção e/ou concentração e a falta de métodos e hábitos de estudo. Face a esta realidade é urgente repensar as metodologias de ensino/aprendizagem da matemática, é importante diversificar os recursos e as estratégias utilizadas em contexto de sala de aula.

Richardson afirma no seu artigo intitulado "Blogs, Wikis, podcasts and other powerfull Web tools for classrooms" (Richardson, 2006) que as novas tecnologias e o seu uso originaram uma nova literacia, a chamada literacia informática, que pressupõe que no atual paradigma educacional, aos alunos deva ser pedido que saibam mais do que ler, já que se exige que continuamente sejam capazes de fazer também as suas próprias publicações online o que é sem dúvida mais estimulante. No entanto, é do senso comum que nem tudo que encontramos na Internet é material de origem confiável e fidedigna. Deste modo, é também para nós, enquanto educadores, um desafio formarmos alunos críticos em relação à informação que encontram e partilham. Seguindo este pressuposto, o autor afirma: "...tal requer obviamente que ensinemos os nossos alunos a serem consumidores mais ativos desse tipo de informação em vez de passivamente a aceitarem como legítima. A edição requer, portanto, capacidades de leitura e de observação, e não simplesmente aceitar o que está apresentado."

As novas tecnologias, neste momento, estão ao alcance da maioria dos alunos o que faz com que possam aceder com facilidade aos conteúdos publicados pelos professores, permitindo um trabalho colaborativo entre professor e aluno. Desta forma o professor não deve ficar alheio a esta evidência e deve criar conteúdos didáticos que complementem as tarefas escolares e apoiem o estudo. Consideramos que este tipo de materiais poderá ter um grande impacto na aprendizagem, na motivação e no envolvimento dos alunos nas atividades propostas. Acreditamos que o presente trabalho constitui um bom exemplo de utilização de tecnologia no ensino da matemática e apresenta ferramentas inovadoras nesse propósito, que poderão servir de guia ao trabalho docente. Todos estamos conscientes de que as grandes evoluções tecnológicas são uma realidade e os professores têm de estar atentos e preparados, porque os alunos não estão alheios a essa realidade e são cada vez mais exigentes.

1.1 Pertinência do estudo

Segundo José Manuel Moran em "A Pedagogia e a Didática da Educação Online" (Moran, 2005) ensinar e aprender são os grandes desafios dos dias de hoje. Educar é cada vez mais complexo, o que faz com que seja urgente repensar todo o processo, reaprender a ensinar, a estar com os alunos, a orientar atividades e a definir o que vale a pena fazer para ensinar/aprender melhor. Não podemos ficar "presos" ao que nos é conhecido e confortável, também nós temos de "abraçar" este desafio que é a evolução tecnológica, ou devemos dizer revolução?

Diversificar para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos alunos é uma árdua tarefa que se exige hoje a um professor, cortar as amarras com o que está pré-concebido é urgente. A educação, à semelhança de outros setores, necessita de investigação e inovação, uma vez que a sociedade está em constante mudança. Apesar de muitos recursos tecnológicos terem sido introduzidos nas escolas, na generalidade o processo ensino/aprendizagem manteve-se igual. Este facto pode ficar a dever-se à falta de formação dos docentes, mas acreditamos que se deve também, muitas vezes, à falta de motivação da própria classe docente. As tecnologias são utilizadas para ilustrar os conteúdos e não como recursos interativos. Parafraseando Moran (2005), estamos a viver uma etapa em que precisamos reorganizar todo o conhecimento em novos moldes, pelo que é necessário adotar novas propostas e novos desafios.

As causas do insucesso, a criação de oportunidades de aprendizagem que estimulem os alunos e a criação de condições que melhorem as aprendizagens são problemáticas que sempre despertaram o meu interesse. É neste perfil de professor reflexivo que me enquadro e daí a minha motivação para este estudo.

É urgente repensar os existentes paradigmas de aprendizagem e investir em novos, onde o aluno possa ser mais autónomo e ao mesmo tempo corresponsável, sentindo-se parte integrante do seu processo de aprendizagem, onde é também um objetivo seu ultrapassar as suas dificuldades, como se aponta nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*:

> "Temos obrigação de proporcionar às nossas crianças um elevado nível de literacia quantitativa e de conhecimentos matemáticos, que os prepare para a cidadania, para o trabalho e para os seus estudos futuros." (NCTM, 2007)

Partindo deste pressuposto, não podemos continuar a adiar a introdução das TIC nas escolas, ou corremos o risco de não estarmos a preparar os alunos para o futuro, e falhamos no nosso papel de educadores. Acreditamos que o ensino à distância pode complementar o ensino presencial através da ampliação dos espaços de ensino/aprendizagem a ambientes virtuais. Tornou-se por isso pertinente, na sociedade em que vivemos, conhecer os efeitos da utilização de alguns recursos didáticos inovadores.

A escolha desta temática, tecnologias no ensino da matemática, prende-se, com a necessidade da criação de estratégias para melhorar as aprendizagens matemáticas, que possam ser implementadas nas nossas escolas, por sentirmos a necessidade de criar recursos diversificados para melhorar o ensino/aprendizagem e também, para prepararmos os alunos para uma sociedade em que as tecnologias têm um papel determinante como vem referido no programa de matemática A do ensino secundário:

> "(...) para além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica." (DES, 2001)

1.2 Enquadramento

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão bibliográfica realizada com o intuito de contribuir para uma reflexão sobre a problemática existente neste projeto. Assim, referem-se aspetos sobre as tecnologias de informação e comunicação na educação, ensino a distância, os programas de matemática no ensino em Portugal e as tecnologias na aprendizagem da matemática.

1.2.1 As tecnologias de informação e comunicação na educação

Embora não exista uma definição consensual de sociedade de informação entende-se ser "algo que vá além do simples uso de tecnologias que facilitam a armazenagem, combinação e transmissão de dados e informações" (Coutinho, 2003).

A difusão da Word Wide Web alterou a forma como acedemos à informação, a maneira como pesquisamos e preparamos aulas e em consequência o modo como os alunos comunicam com os professores e os professores com os alunos. Oliveira (2004) refere ainda que o professor continua a deter um lugar central de relevo nos contextos eletrónicos, pois a qualidade da fonte de conhecimento continua a ser atribuída ao professor.

Coutinho & Lisbôa (2011), referem que estamos a viver uma revolução tecnológica e ensinar numa sociedade em rede sendo esse um desafio que se coloca hoje aos professores que têm a responsabilidade de preparar os alunos para gerir a informação, construir o conhecimento e usar as tecnologias de uma forma responsável, crítica e criativa. O espaço físico da escola deixou de ser o local exclusivo para a construção do conhecimento; a escola saiu para além dos muros, abriu-se ao mundo. Nas últimas décadas, o ensino à distância tem assumido um papel de extremo relevo ao facilitar o acesso à informação inicial ou, em muitos casos, à reciclagem da informação detida, graças a mudanças significativas nos ambientes de aprendizagem, em quaisquer contextos ou situações, em grupo ou individualmente.

Papert (1997), colaborador de Jean Piaget, defendeu que a construção do conhecimento através do computador só acontece quando o aluno constrói um objeto do seu interesse, o que significa que o aluno tem de se envolver afetivamente nas aprendizagens. Papert ficou também conhecido pela criação da linguagem LOGO, uma linguagem de programação que consiste numa ação de programar ou de "ensinar" a tartaruga a produzir figuras e gráficos através de um conjunto de comandos, atividade entendida como uma tarefa em que o aluno age com o computador.

Segundo Ponte (1997), Seymour Papert foi o impulsionador de um forte movimento internacional de professores e educadores interessados em explorar a utilização do computador no ensino da matemática. Papert defende que em relação à aprendizagem, a criança deve aprender a comandar o computador e não o contrário. De facto, a motivação das crianças e jovens está cada vez mais nas novas tecnologias, as experiências pessoais de conhecimento dos alunos extravasam os modelos tradicionais de conhecimento e os professores devem ser capazes de dar cada vez mais importância à vertente afetiva da aprendizagem.

De acordo com Seymour Papert, as aprendizagens são sempre equacionadas com os contextos em que elas se realizam:

> "A tarefa da educação é, assim, a de criar os contextos adequados para que as aprendizagens se possam desenvolver de modo natural." (Papert, 1997)

Por isso, o autor refere ainda um outro ponto de vista relativamente à aprendizagem:

> "aprender a aprender não é algo difuso e irrelevante mas uma das condições fundamentais de sucesso na sociedade de informação para onde caminhamos a ritmo acelerado" (Papert, 1997)

1.2.2 Ensino à distância

Os meios de comunicação, rádio e televisão foram responsáveis pela expansão do ensino à distância, mas o seu contributo deixou um grande desafio para as gerações vindouras, isto porque, os conteúdos produzidos eram uniformes para todos os alunos e as interações entre professor e aluno eram praticamente inexistentes. O avanço das TIC proporcionou novas perspetivas devido à facilidade de produção e divulgação de conteúdos e despertou para a necessidade crescente de ir sempre mais além. Atualmente, praticamente todas as instituições de ensino superior e secundário em Portugal têm uma plataforma de ensino/aprendizagem semelhante ao Moodle e ao Blackboard. Estas plataformas são utilizadas maioritariamente no ensino presencial como repositório de conteúdos, o que é limitador. Miranda (2009) acredita que o ensino à distância é muito mais do que disponibilizar online os recursos do regime presencial. Como para qualquer outro método de ensino, é necessário definir objetivos, criar conteúdos de qualidade e diversificados, atividades bem conseguidas, se possível interativas e verificar frequentemente se os conhecimentos estão a ser adquiridos.

Efetivamente, o professor/tutor passou a ser um decisor sobre o processo de ensino/aprendizagem, adquiriu um papel relevante na condução das aprendizagens e tornou-se o corresponsável pela criação e manutenção de um ambiente propício à interação e à colaboração.

Papert apresenta um pressuposto que sustenta que "o papel do professor é criar as condições para a invenção, em lugar de fornecer conhecimentos consolidados" (Papert, 1997), e como, aliás, sustenta Souza, o "uso de tecnologia, por si só, não garante a melhoria à educação" (Souza, 2005); partindo desses pressupostos, a perspetiva construtivista é desejável. No entanto, a maioria das escolas não está organizada de forma a permitir a colaboração de professores e alunos ou possibilitar a criação de ambientes construtivistas de aprendizagem.

É inegável o impacto da evolução das TIC no crescente incremento e consequente desenvolvimento do ensino aberto, com recurso a redes e, em particular, à Internet, como infraestrutura de suporte e desenvolvimento da formação.

A Internet é, atualmente, um enorme repositório de informação a que podemos aceder de acordo com as necessidades inerentes a cada pessoa e que se prendem com o tempo, contexto e características individuais. O conceito de sala de aula está mais alargado e as suas fronteiras cada vez mais ténues. A Internet é, efetivamente, um meio eficaz de transmitir informação, com a possibilidade de atualização constante e imediata dos materiais disponibilizados. Este aspeto tornou-se essencial, uma vez que o fator tempo se assume como primordial no desenvolvimento dos sujeitos.

Neste sentido, o conceito de aprendizagem e a forma de equacionar as formas de ensino estão intimamente ligados às novas formas de o estruturar, levando à necessidade de repensar os métodos de ensino/ aprendizagem utilizados até ao momento. Nesta perspetiva, o enfoque é colocado na aprendizagem, na promoção e no reforço das interações aluno/professor e aluno/aluno, na colocação e na partilha de conhecimentos entre todos os agentes, nas metodologias de trabalho colaborativo, com recurso a materiais e a estratégias que estimulem os alunos a processar a informação autonomamente e de modo significativo, tendo em conta o seu estilo de aprendizagem e o seu lado "afetivo" (motivação, expetativas, atitudes, interesses,...).

A formação não pode assentar na simples transmissão da informação mas na potenciação de competências como o pensamento crítico, a gestão do conhecimento, o aprender a aprender, entre outras. Para tal, as estratégias formativas necessitam de se apoiar em processos educativos inovadores que permitam o desenrolar de tais processos de aprendizagem eficazes.

Através do ensino à distância pretendemos criar ambientes de aprendizagem suportados pelas tecnologias da informação e da comunicação, cujo principal objetivo seja a criação de conhecimento sem constrangimentos de espaço e tempo e recorrendo a um conjunto de estratégias que permitam criar uma verdadeira rede de conhecimento e de interações.

O aluno está mais implicado num processo de ensino - aprendizagem deste tipo, em que uma atitude mais passiva deverá dar lugar a uma atitude mais dinâmica, com uma maior autonomia e responsabilidade no processo de aprendizagem. Todavia, são aqui mobilizadas outras competências, mormente o esforço pessoal e a autodisciplina, bem como o apelo ao sentido crítico se torna muito maior e mais valorizado.

Como foi referido, este novo formato implica alterações metodológicas, pedagógicas, psicológicas e até afetivas com as consequentes alterações de papéis e funções dos atores que nele participam. O professor, que muitas vezes, resumia-se a um transmissor de informação passa a ser facilitador dos processos de ensino/aprendizagem, deixa de ser apenas uma das principais fontes de informação e converte-se em assessor, mediador, orientador, dinamizador, motivador e animador do processo de ensino/aprendizagem. Procura, para isso, criar um ambiente positivo, dar tempo para responder, antecipar e resolver dúvidas e problemas. Ele é, pois, um gestor e organizador da informação e dos trabalhos. Por sua vez, o aluno encontra neste formato uma maior flexibilidade, que lhe permite alcançar objetivos que de outra forma lhe estavam limitados. As aquisições situam-se a diferentes níveis: a nível dos conhecimentos formais e a nível pessoal, com o desenvolvimento da sua autonomia, do seu sentido crítico e do trabalho colaborativo.

Em suma, a diminuição de constrangimentos espácio-temporais, que o ensino à distância aporta ao processo de ensino/aprendizagem, faz dele um sistema mais democrático e aliciante, para quem dele depende. São exatamente estes elementos que fizeram dele um sistema de sucesso e onde os investimentos, quer a nível tecnológico, económico, metodológico, quer pedagógico são cada vez maiores e com maior sucesso.

1.2.3 Os programas de matemática no ensino em Portugal

Com o intuito de facilitar a compreensão tanto do ensino da matemática como dos recursos tecnológicos utilizados pelos professores é relevante o conhecimento de alguns aspetos essenciais ao nível do currículo da matemática a as grandes opções do processo ensino-aprendizagem desde os anos 40.

Nos anos 40 e 50, a memorização e a mecanização do ensino, como refere Ponte (2003), eram defendidas e os alunos tinham de memorizar teoremas, demonstrações e resolver inúmeros exercícios. Ao constatar-se que os alunos apresentavam reduzida competência ao nível do cálculo, surgiram muitas críticas não só no ensino da matemática em Portugal como também noutros países. Bento de Jesus Caraça, matemático que via para além do seu tempo, já questionava nessa época o ensino de memorização e mecanização, chamando à atenção para o facto de o ensino nestes moldes não promover o espírito crítico nos alunos.

Os anos 60 ficaram marcados pelo movimento internacional da matemática moderna que foi seguido pelos matemáticos que mostravam grande insatisfação com os conhecimentos dos jovens que chegavam à universidade e também uma crescente preocupação em modernizar a linguagem matemática veiculada a estes alunos. Nessa época, já se apelava à utilização de novos métodos de ensino de forma a abandonar tanto quanto possível o método expositivo e adotar um método onde o aluno tivesse um papel mais ativo na redescoberta de conceitos e relacionação de temas, na compreensão das ideias matemáticas e melhorar as competências ao nível do cálculo.

O movimento da matemática moderna apelava essencialmente a uma mudança, como podemos observar nas recomendações didáticas do ensino secundário: "(i) usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de um modo mais coerente; (ii) introduzir novos tópicos que se considerava poderem ser aprendidos pelos alunos e de valor nas novas aplicações desta ciência e (iii) eliminar alguns dos tópicos tradicionais, considerados obsoletos." (DES, 1997). Ainda na década de 60, numa primeira fase experimental da Matemática moderna, destacou-se em Portugal José Sebastião e Silva com a elaboração de manuais escolares para os níveis correspondentes aos atuais 10.º e 11.º anos com novos temas como, por exemplo Iniciação à Lógica, Estruturas Algébricas, Álgebra Linear, Probabilidades, Estatística, entre outros, e manteve temas que já se lecionavam como a Iniciação à Análise Infinitesimal, Trigonometria, Cálculo Algébrico e a Geometria Analítica. Segundo José Sebastião e Silva, a modernização do ensino não podia ser feita só ao nível dos programas, mas também ao nível de métodos de ensino, devendo o professor adaptar significativamente o método expositivo tradicional.

Nos anos 70, o movimento da matemática moderna generalizou-se a todos os níveis de ensino, dando origem a novos programas e manuais escolares. Embora a matemática tradicional nunca tivesse sido substituída pela Matemática moderna, houve uma junção das duas, e as aplicações da matemática, acabaram por desaparecer dos programas. Até aos anos 80, os ideais do movimento não foram contestados, mas nesta década surgiram críticas aos programas de matemática moderna pela sua carga de simbolismo, pelas estruturas abstratas de difícil compreensão, pelos fracos progressos ao nível do raciocínio, resolução de problemas e no domínio do cálculo.

Com efeito, coincidindo com as críticas já referidas, nesta década surge uma nova reforma no ensino da matemática com a publicação de documentos, relatórios, conferências, projetos destacando-se as Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar onde se destaca que o principal objetivo da matemática é levar o aluno a desenvolver o seu gosto pela matemática. Estas críticas foram cruciais nas mudanças que surgiram no final da década de 80 e na década de 90.

Atentemos nas novas orientações e nas suas ideias fundamentais:" (i) a natureza das competências matemáticas que merecem especial atenção no processo ensino-aprendizagem; (ii) o impacto das novas tecnologias computacionais na matemática e na sociedade em geral; (iii) a emergência de novos domínios na matemática; (iv) o aprofundamento da investigação sobre o processo ensino/aprendizagem." (DES, 1997).

Em 1997 o programa do ensino secundário passou a dar grande importância ao uso da calculadora gráfica e os temas sofreram alguns reajustes, sendo abordados a Análise Infinitesimal, o Cálculo Algébrico, a Trigonometria, a Geometria, Estatística e o aspeto mais inovador do programa é a abordagem do tema Probabilidades. Este programa inicia uma renovação curricular no ensino da matemática.

A razão de ser para a introdução destes novos conteúdos é que o programa da disciplina de matemática tem de ser simultaneamente abrangente e profundo para garantir que os alunos tenham uma vasta gama de opções profissionais e académicas.

Como se refere nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), os alunos do ensino secundário deveriam adquirir autonomia para desenvolver capacidades de trabalho em grupo, para se tornarem mais reflexivos e desenvolverem competências intelectuais e pessoais que pudessem levar consigo para o local de trabalho ou para o ensino superior.

1.2.4 As tecnologias na aprendizagem da matemática

O computador tem assumido um papel importante no desenvolvimento do ensino da matemática. Inicialmente o computador era apenas utilizado para realizar cálculos numéricos demorados, passando mais tarde a ser utilizado para diversos processos de investigação. Atualmente, matemáticos, engenheiros e cientistas criam modelos computacionais capazes de simular cenários que anteriormente não tinham ferramentas para conseguir. O acesso fácil e rápido nos dias de hoje, a uma grande informação permite a partilha de conhecimentos, o debate de ideias e representa um grande estímulo à atividade de produção matemática.

Atualmente os programas de matemática defendem e estimulam o uso das tecnologias, embora recomendem que estas sejam usadas com responsabilidade, para que possam enriquecer e melhorar as oportunidades das aprendizagens matemáticas dos alunos. As indicações metodológicas defendem que devem ser facultadas aos alunos oportunidades de abordar questões de experimentação, isto para que possam sentir as vantagens das tecnologias na execução de procedimentos rotineiros de forma rápida. Devem ter também a oportunidade de analisar diversos exemplos e diferentes representações dos conteúdos, explorar, formular conjeturas que manualmente seriam pouco exequíveis e muito menos desafiantes e estimulantes. No entanto, devemos ter sempre presente que a tecnologia não substitui o professor, uma vez que este assume o papel crucial na seleção de tarefas, na observação do raciocínio dos alunos através dos processos que estes escolhem numa determinada tarefa. Este comportamento e observação permite ao professor reunir diversos elementos de avaliação sobre os alunos.

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), as tecnologias são apresentadas como facilitadores da aprendizagem; recorrendo a elas é possível mostrar uma das mais interessantes aplicações da matemática que é a modelação de fenómenos. Neste caso, os alunos são levados a trabalhar em níveis cada vez mais elevados de generalização ou abstração, isto porque com o uso das tecnologias o aluno pode analisar mais exemplos ou visualizar diferentes formas de representação, que manualmente seriam demorados, conduzindo-o a formular conjeturas, e a aceder a um leque mais vasto de conteúdos.

As tecnologias são, consideradas muito importantes na aprendizagem e corresponsáveis pela formação do aluno, tal como refere Ricardo Silva:

> "(...) o foco de ação do professor deverá deslocar-se, cada vez mais, do ensinar para o aprender, ou seja aprender a aprender, pelo que a mais significativa necessidade da educação contemporânea é a de formar pessoas com capacidade de aprender continuamente de forma autónoma, crítica e criativa." (Silva, 2005)

1.2.5 Comparação com outros materiais semelhantes

Das pesquisas realizadas sobre recursos semelhantes aos criados para este projeto, encontram-se os materiais produzidos pelas editoras disponibilizados em CD-Roms, ou em bases de dados e e-Books que acompanham os manuais. Todos estes materiais podem ser adquiridos pelos alunos, e consistem em ficheiros em formato PDF (Portable Document Format) dos manuais com ligações a algumas aplicações dinâmicas. Salientamos ainda que o projeto da Porto Editora Escola Virtual dispõe de recursos variados (vídeos, aplicações dinâmicas, exercícios de escolha múltipla) e na Internet é possível encontrar diversos materiais dispersos produzidos por professores.

Domingos & Paula (2011) no artigo sobre "Tecnologias na Educação Matemática" referem que os materiais eletrónicos disponibilizados pelas editoras são pouco explorados e trabalhados em sala de aula. Muitos dos materiais disponibilizados ficam aquém do que seria desejável para proporcionar uma abordagem alternativa em sala de aula. Ainda assim, é possível encontrar alguns recursos em que o uso adequado pode ajudar na construção e compreensão de conceitos matemáticos complexos.

Atualmente, a maioria dos alunos dispõe de Internet em casa, o que possibilita o fácil acesso aos materiais disponibilizados pelo professor no ambiente virtual de aprendizagem. O acesso à Escola Virtual é possível mediante a subscrição de um dos pacotes de disciplinas disponíveis. A principal diferença deste projeto é ser totalmente gratuito para o professor e para o aluno e ser dada total liberdade de criação de conteúdo ao professor, assim como a possibilidade de gerar inúmeras versões do mesmo exercício. No projeto da Porto Editora o professor tem apenas a possibilidade de criar fichas de trabalho e testes com exercícios do banco de questões, essencialmente de escolha múltipla e selecionados pela editora, sem permitir que o aluno introduza respostas em linguagem simbólica.

Um dos principais desafios que se colocam aos professores é inerente aos ritmos diferenciados de aprendizagem dos seus alunos. Invariavelmente, o professor procura responder o melhor que sabe e pode a essas diferenças, não atrasando e incentivando os mais clarividentes, não deixando que os mais lentos percam o "comboio da aprendizagem". A diferenciação, chave do processo de ensino/aprendizagem do futuro, constitui por isso o maior desafio a um desempenho de sucesso. Foi a pensar nesse problema que, nasceu nos Estados Unidos da América, por Salman Khan, "The Khan Academy", uma organização sem fins lucrativos que tem como missão "fornecer educação de alta qualidade para qualquer um, em qualquer lugar". O desafio que começou com explicações simples de Matemática em vídeo no YouTube para os seus sobrinhos, deu origem a um portal com exercícios que testam a aprendizagem de cada lição, o que permite o acompanhamento do progresso, usando métricas inteligentes.

No portal, de livre acesso, podem inscrever-se formandos e formadores, sendo que os professores podem registar os seus alunos e, desta forma, utilizando todas as ferramentas disponibilizadas, monitorizar ao pormenor o seu processo de aprendizagem.

O portal disponibiliza mais de 2700 vídeos de Matemática, Ciências, Humanidades e Testes de Preparação, para diferentes graus de ensino. Com este material que continua a crescer dia a dia, Salman Khan tem já mais de 200 mil alunos em todo o mundo que "devoram" os seus testes e vídeos. Este sucesso foi compreendido pelos gigantes da informática, como a Microsoft e a Google, que decidiram financiar o projeto, permitindo assim a sua expansão para todo o mundo, nomeadamente com a tradução dos seus vídeos para outras línguas, entre as quais o português. De realçar que todo o conteúdo é aberto.

Uma outra ferramenta que tem como intenção melhorar o ensino e a aprendizagem é o WebWork. Este é um sistema que foi originalmente desenvolvido, em 1995, por Arnold Pizer e Gage Michael do Departamento de Matemática da Universidade de Rochester, nos Estados Unidos da América, para uso no ensino da matemática sendo atualmente utilizado com sucesso em mais de 550 departamentos e instituições.

O WebWork é um sistema que permite que os alunos resolvam trabalhos de casa via Web. Usando este sistema o aluno pode tentar responder várias vezes ao mesmo problema, uma vez que, após cada tentativa, aparece uma mensagem dizendo se a resposta está correta ou não, o que permite ao aluno descobrir o que fez de errado e compreender melhor o tema da pergunta. Por outro lado, são fornecidas ao professor estatísticas em tempo real, o que permitirá desenvolver planos de aula mais personalizados para melhor acompanhar os seus alunos. Cada conjunto de problemas é individualizado, pois cada aluno tem uma versão diferente de cada problema.

O sistema vem com uma biblioteca de mais do que 25000 problemas que abrangem áreas tais como: álgebra linear, probabilidades e estatística, matemática discreta, cálculo simples, equações diferenciais, análise complexa, etc.

Este sistema é apoiado pela Mathematics Association of America (MAA) uma organização com raízes no século XIX e com um papel importante no século XXI, pois realiza e divulga pesquisas sobre como aumentar a literacia e melhorar a educação matemática; executa uma série de programas de desenvolvimento profissional para as pessoas que trabalham nas ciências matemáticas, incluindo Programas de Aprimoramento Profissional e disponibiliza ainda uma variedade de materiais para ajudar os membros do corpo docente a melhorar o seu desempenho na experiência educacional com os alunos.

Outro dos sistemas que foi projetado para cursos que envolvam matemática foi o Maple TA. É um sistema fácil de usar baseado na web para criação de testes e trabalhos e permitir automaticamente avaliar as respostas e desempenho dos alunos.

O Maple TA permite ao professor fazer as perguntas que quer, da maneira que quer e obter as respostas que quer, graças às potencialidades do Maple. As questões podem ser de diferentes tipos; sempre que as perguntas são de resposta livre, a resposta correta não tem que ser idêntica à solução indicada, basta que seja equivalente, por exemplo, se a resposta correta for $1-\operatorname{sen}^2(x)$, o Maple TA também aceita $\cos^2(x)$. As perguntas abertas podem ter respostas infinitas e um modelo de questão é transformado em centenas ou milhares de perguntas semelhantes, o que proporciona aos alunos trabalhos de casa individuais. Permite também que os alunos repitam a mesma questão quando a resposta dada for incorreta. Caso o aluno não consiga responder à questão, esta é adaptada, e o aluno responde a uma versão mais simples da questão, antes de tentar novamente a original. Fornece ainda ferramentas sofisticadas de visualização, portanto as questões podem conter gráficos, e torna simples a introdução de expressões matemáticas.

Capítulo 2

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente

2.1 A função seno e suas generalizações

As funções trigonométricas são frequentemente usadas como modelos para descrever fenómenos naturais. Frequentemente utilizam-se generalizações destas funções envolvendo parâmetros. O nosso estudo baseia-se precisamente nestas generalizações e centramo-nos na ampla família de funções $f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$. Uma escolha adequada dos parâmetros permite-nos percorrer um vasto leque de funções desde a elementar $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$ a funções como $f(x) = -2\,\mathrm{sen}(3x - 4) + 5$.

Vejamos como obter as várias funções a partir dos parâmetros de $f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d$. Observe-se que a e b não devem ser nulos pois nesse caso a função seria constante, sem interesse para o estudo. Antes de analisarmos diferentes valores dos parâmetros, convém referir o que se entende por *alongamento e compressão* de um gráfico.

Alongamento e compressão vertical

- O parâmetro a determina o alongamento ou a compressão vertical da curva e, por consequência, determina também o intervalo em que a curva oscila, $-|a|$ a $|a|$.
- se $a < 0$ além do alongamento ou da compressão ocorrerá também a reflexão da curva em torno do eixo das abcissas.
- se $|a| > 1$ a curva alonga na vertical e se $|a| < 1$ a curva comprime na vertical.

Alongamento e compressão horizontal

- O parâmetro b determina o alongamento ou compressão horizontal da curva e, por consequência, determina também o intervalo em que a curva se repete.
- se $|b| > 1$ a curva comprime na horizontal e se $|b| < 1$ a curva alonga na horizontal.
- o intervalo em que a curva se repete é denominado período que neste caso é $\dfrac{2\pi}{|b|}$
- só haverá alteração do período se $|b| \neq 1$.

Translação vertical

- só haverá tanslação vertical se o parâmetro d for não nulo.
- a translação vertical será para cima se $d > 0$.
- a translação vertical será para baixo se $d < 0$.

Translação horizontal

- só haverá tanslação horizontal se o parâmetro c for não nulo.
- a translação será para a direita se $\dfrac{c}{b} < 0$.
- a translação será para a esquerda se $\dfrac{c}{b} > 0$.

Analisemos agora a influência dos diversos parâmetros na expressão da função $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx + c) + d$. Consideramos dois casos fundamentais, $a = 1$ e $a \neq 1$ e os vários subcasos que daí resultam por variação dos restantes parâmetros.

1. $a = 1$

   (a) $b = 1$

      i. $c = d = 0$ temos a função $f_1(x) = \mathrm{sen}\,(x)$

      ii. $d = 0$ e $c \neq 0$ temos uma translação horizontal da função $\mathrm{sen}\,(x)$, $f_4(x) = \mathrm{sen}\,(x + c)$

      iii. $c = 0$ e $d \neq 0$ temos uma translação vertical da função $\mathrm{sen}\,(x)$, $f_5(x) = \mathrm{sen}\,(x) + d$

      iv. $c \neq 0$ e $d \neq 0$ obtemos neste caso uma translação da função $\mathrm{sen}\,(x)$ associada ao vetor $(-c, d)$, $f_{11}(x) = \mathrm{sen}\,(x + c) + d$

(b) $b \neq 0$ e $b \neq 1$

i. $c = d = 0$ temos a função $f_3(x) = \operatorname{sen}(bx)$ que é uma contração ou expansão da função $\operatorname{sen}(x)$ dependendo do valor de b ser em módulo maior ou menor que 1.

ii. $d = 0$ e $c \neq 0$ temos uma translação horizontal da função $\operatorname{sen}(bx)$, $f_9(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$

iii. $c = 0$ e $d \neq 0$ temos uma translação vertical da função $\operatorname{sen}(bx)$, $f_{10}(x) = \operatorname{sen}(bx) + d$

iv. $c \neq 0$ e $d \neq 0$ obtemos neste caso uma translação da função $\operatorname{sen}(bx)$ associada ao vetor $\left(-\frac{c}{b}, d\right)$, $f_{15}(x) = \operatorname{sen}(bx + c) + d$

2. $a \neq 0$ e $a \neq 1$

(a) $b = 1$

i. $c = d = 0$ temos a função $f_2(x) = a \operatorname{sen}(x)$, que aumenta ou diminui a amplitude da curva, consoante $|a| > 1$ ou $|a| < 1$.

ii. $d = 0$ e $c \neq 0$ temos uma translação horizontal da função $a \operatorname{sen}(x)$, $f_7(x) = a \operatorname{sen}(x + c)$

iii. $c = 0$ e $d \neq 0$ temos uma translação vertical da função $a \operatorname{sen}(x)$, $f_8(x) = a \operatorname{sen}(x) + d$

iv. $c \neq 0$ e $d \neq 0$ obtemos neste caso uma translação da função $a \operatorname{sen}(x)$ associada ao vetor $(-c, d)$, $f_{14}(x) = a \operatorname{sen}(x + c) + d$

(b) $b \neq 0$ e $b \neq 1$

i. $c = d = 0$ temos a função $f_6(x) = a \operatorname{sen}(bx)$ que é um alongamento ou compressão da função $\operatorname{sen}(bx)$ dependendo de $|a|$ ser menor ou maior que 1.

ii. $d = 0$ e $c \neq 0$ temos uma translação horizontal da função $a \operatorname{sen}(bx)$, $f_{12}(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$

iii. $c = 0$ e $d \neq 0$ temos uma translação vertical da função $a \operatorname{sen}(bx)$, $f_{13}(x) = a \operatorname{sen}(bx) + d$

iv. $c \neq 0$ e $d \neq 0$ obtemos neste caso uma translação da função $a \operatorname{sen}(bx)$ associada ao vetor $\left(-\frac{c}{b}, d\right)$, $f_{16}(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$

O estudo de funções parametrizadas do tipo $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$ permite-nos criar um vasto leque de exercícios, desde os mais simples aos mais complexos, consoante os diversos valores que atribuímos aos parâmetros. A grandiosidade deste facto permite-nos iniciar o estudo desde a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e prosseguir ao ritmo desejado até $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$, onde $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

O seguinte esquema permite-nos enquadrar e derivar todos os casos referidos acima. Começando com a função elementar $\operatorname{sen}(x)$, obtém-se todas as outras.

Optamos por este esquema para agrupar as várias subclasses de funções que têm como base a função $\operatorname{sen}(x)$. Esta foi a nossa escolha, mas poderia ter sido outra.

O mesmo esquema se pode aplicar às classes $a\cos(bx+c)+d$ e $a\tan(bx+c)+d$ que têm como base as funções $\cos x$ e $\tan x$ respetivamente.

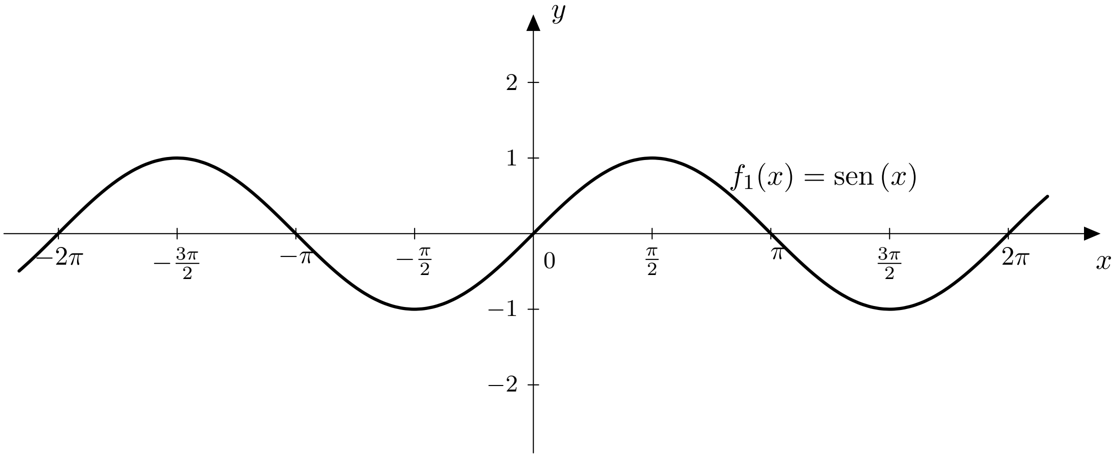
- $f_1(x) = \operatorname{sen}(x)$
  - $f_2(x) = a\operatorname{sen}(x)$
    - $f_6(x) = a\operatorname{sen}(bx)$
      - $f_{12}(x) = a\operatorname{sen}(bx+c)$ — $f_{16}(x) = a\operatorname{sen}(bx+c)+d$
      - $f_{13}(x) = a\operatorname{sen}(bx)+d$
    - $f_7(x) = a\operatorname{sen}(x+c)$ — $f_{14}(x) = a\operatorname{sen}(x+c)+d$
    - $f_8(x) = a\operatorname{sen}(x)+d$
  - $f_3(x) = \operatorname{sen}(bx)$
    - $f_9(x) = \operatorname{sen}(bx+c)$ — $f_{15}(x) = \operatorname{sen}(bx+c)+d$
    - $f_{10}(x) = \operatorname{sen}(bx)+d$
  - $f_4(x) = \operatorname{sen}(x+c)$ — $f_{11}(x) = \operatorname{sen}(x+c)+d$
  - $f_5(x) = \operatorname{sen}(x)+d$

De seguida vamos estudar a influência dos parâmetros nas funções.

2.1.1 A função seno

Comecemos pela função mais simples, $f_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ onde $a = b = 1$ e $c = d = 0$. Sendo a base de partida para todas as funções o professor deve explorá-la bem, explicitando todas as suas caraterísticas.

Podemos observar que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é uma função ímpar, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ e é uma função periódica de período 2π.

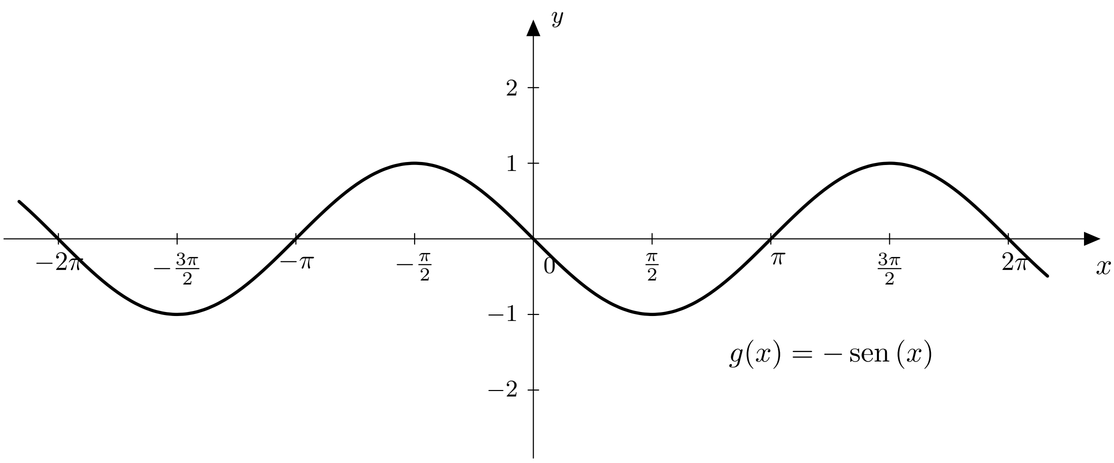


As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte.

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = k\pi$	1 Maximizantes $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	-1 Minimizantes $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

Sendo a função $\operatorname{sen}(x)$ ímpar, observe-se que $a = -1$, $b = 1$ e $c = d = 0$ e $a = 1$, $b = -1$ e $c = d = 0$ conduzem exatamente à mesma função, $g(x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$.



Relativamente à função original, apenas trocam os maximizantes com os minimizantes.

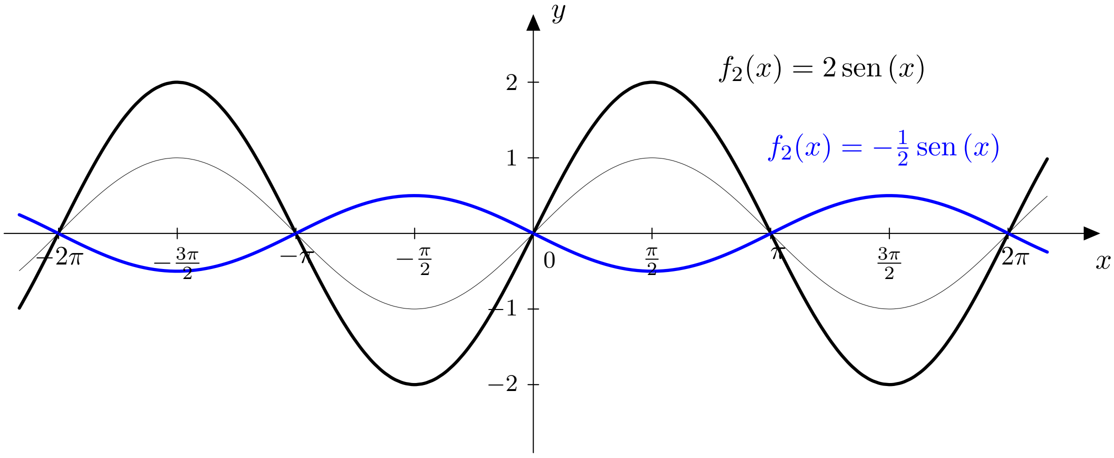
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π	$x=k\pi$	1 Maximizantes $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$	-1 Minimizantes $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$	ímpar

$k\in\mathbb{Z}$

2.1.2 A função $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x)$

No caso da função $f_2(x) = a\,\mathrm{sen}(x)$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $b=1$ e $c=d=0$, a alteração produz-se no contradomínio e, consequentemente, nos extremos da função, embora os extremantes se mantenham. O máximo da função será $|a|$ e o mínimo $-|a|$, já que, $|a\,\mathrm{sen}\,(x)| \leq |a|$. Os zeros da função são exatamente os zeros da função seno, bem como o seu período.

Foram escolhidos dois exemplos, um com $a>0$ e $|a|>1$ e outro com $a<0$ e $|a|<1$, para ilustrar os diferentes comportamentos. A função referência $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$ mantém-se como termo de comparação com as funções referidas.



As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte.

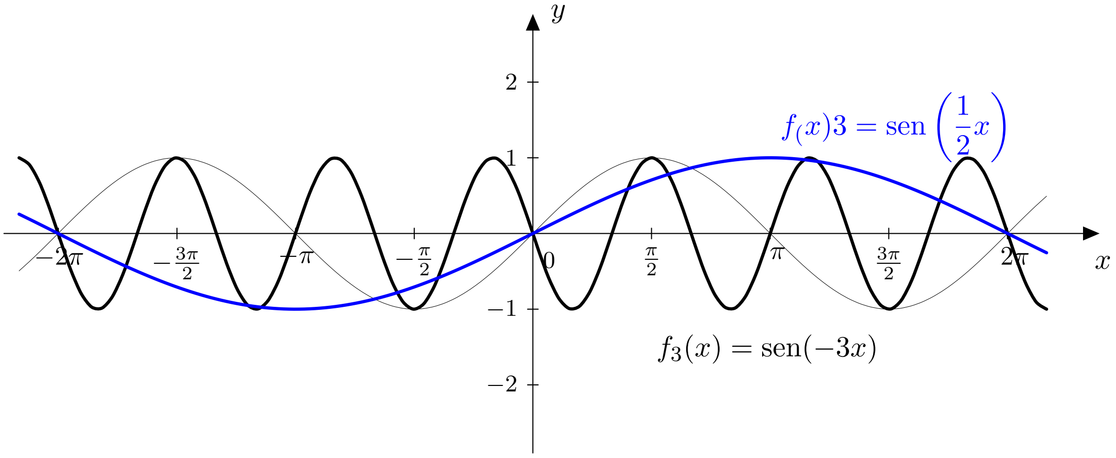
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\|a\|,\|a\|]$	2π	$x=k\pi$	$\|a\|$ Maximizantes se $a>0$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ se $a<0$ $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$	$-\|a\|$ Minimizantes se $a>0$ $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ se $a<0$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$	ímpar

$k\in\mathbb{Z}$

2.1.3 A função $f(x) = \text{sen}\,(bx)$

No estudo da função $f_3(x) = \text{sen}\,(bx)$, onde $a = 1$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, e $c = d = 0$, vamos ter a alteração do período da função, consequentemente, os zeros e os extremantes da função também vão sofrer alterações.

Os zeros da função estarão espaçados de meio período, isto é, de $\dfrac{\pi}{|b|}$ e os seus maximizantes (minimizantes) de um período inteiro, ou seja, $\dfrac{2\pi}{|b|}$.



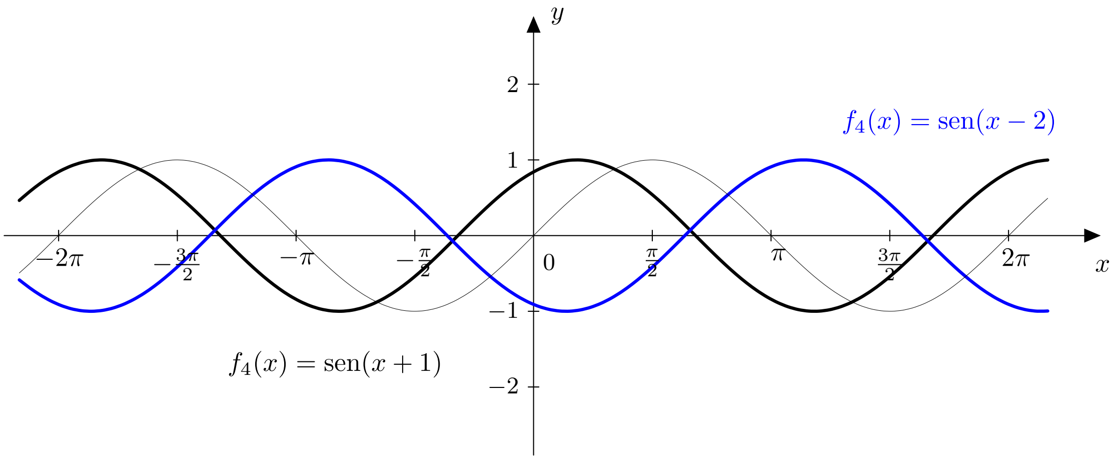
Vejamos as suas caraterísticas no seguinte quadro.

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\dfrac{2\pi}{\mid b \mid}$	$x = \dfrac{k\pi}{b}$	1 Maximizantes $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	-1 Minimizantes $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.4 A função $f(x) = \text{sen}(x + c)$

Na função $f_4(x) = \text{sen}\,(x + c)$, onde $a = b = 1$, $c \neq 0$, e $d = 0$, as alterações vão-se sentir nos zeros e nos extremantes uma vez que, se $c > 0$, o gráfico de $\text{sen}\,(x)$ deslocar-se-á $|c|$ unidades, horizontalmente, para a esquerda e se $c < 0$, o gráfico de $\text{sen}\,(x)$ deslocar-se-á $|c|$ unidades, horizontalmente, para a direita.
Vejamos,



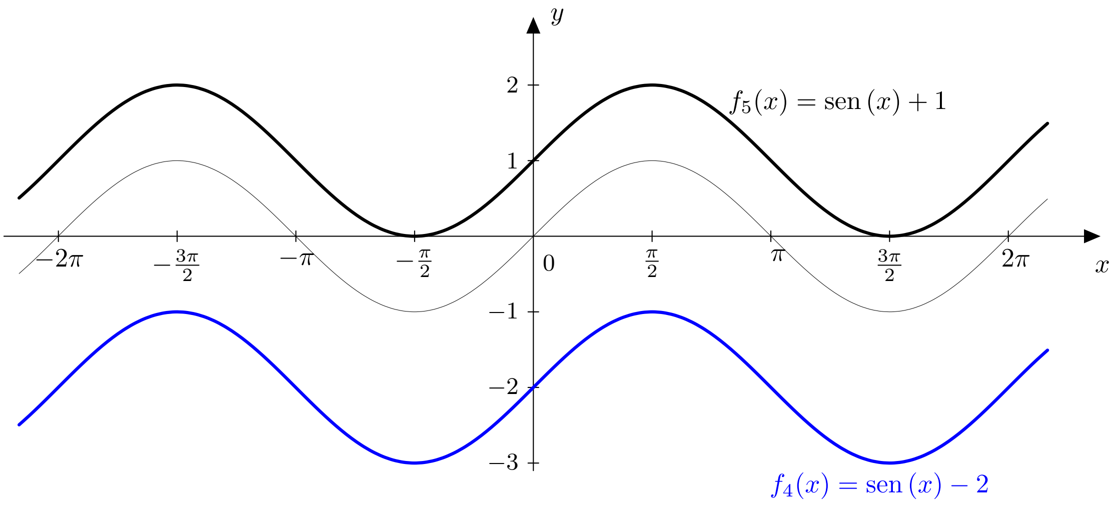
Em modo de síntese, temos as suas caraterísticas no quadro seguinte:

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = -c + k\pi$	1 Maximizantes $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	-1 Minimizantes $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	ímpar se $c \in \{k\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.5 A função $f(x) = \text{sen}(x) + d$

Ao analisar a função $f_5(x) = \text{sen}\,(x) + d$, onde $a = b = 1$, $d \neq 0$ e $c = 0$, verificamos que a alteração produz-se no contradomínio, zeros, extremos e paridade, uma vez que se $d > 0$ o gráfico de $\text{sen}\,(x)$ desloca-se $|d|$ unidades, verticalmente, para cima e se $d < 0$, o gráfico de $\text{sen}\,(x)$ desloca-se $|d|$ unidades, verticalmente, para baixo.



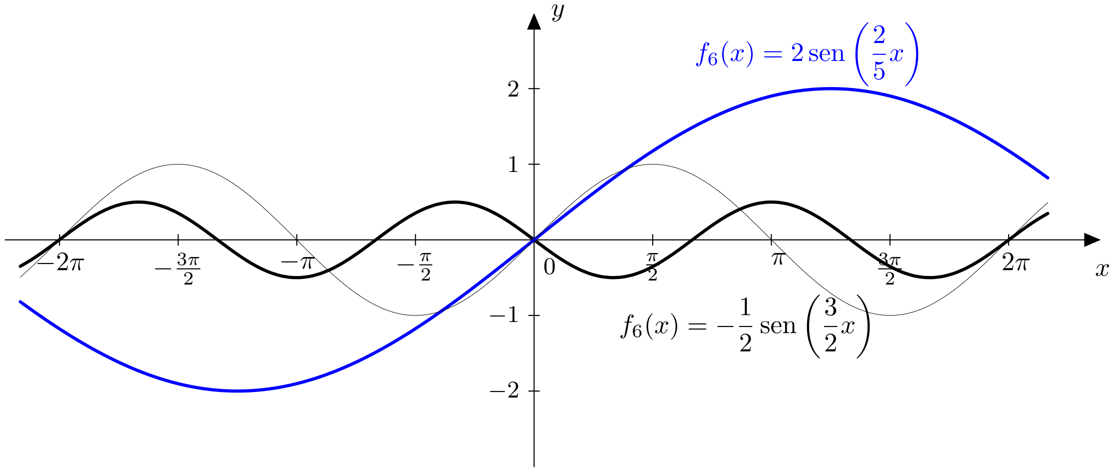
As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte.

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1+d, 1+d]$	2π	se $\|d\| > 1$ não existem se $\|d\| < 1$ $x = \alpha + k\pi$ com $\alpha = \text{sen}^{-1}\,(-d)$ se $d = 1$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $d = -1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	$1 + d$ Maximizantes $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	$-1 + d$ Minimizantes $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.6 A função $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx)$

No estudo da função $f_6(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx)$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, e $c = d = 0$, a alteração produz-se no período e no contradomínio e por consequência nos zeros, extremantes e extremos.



As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte.

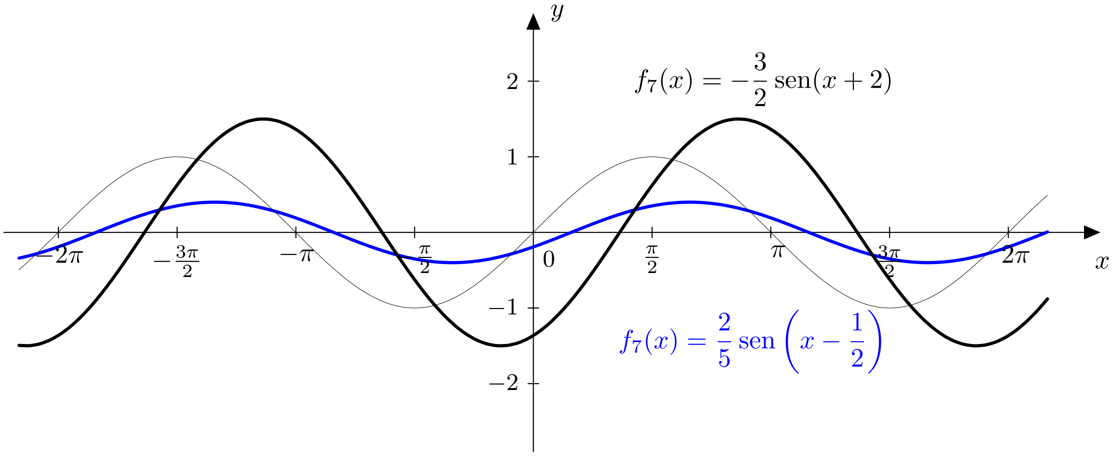
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\|a\|, \|a\|]$	$\dfrac{2\pi}{\| b \|}$	$x = \dfrac{k\pi}{b}$	$\|a\|$ Maximizantes $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a > 0$ $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$	$-\|a\|$ Minimizantes $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a > 0$ $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$	ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.7 A função $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x+c)$

Para a função $f_7(x) = a\,\mathrm{sen}\,(x+c)$, onde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, b = 1\, c \neq 0$, e $d = 0$, a alteração produz-se nos zeros, nos extremantes e no contradomínio e, por consequência nos extremos. O período de 2π mantem-se.

Vejamos os gráficos:



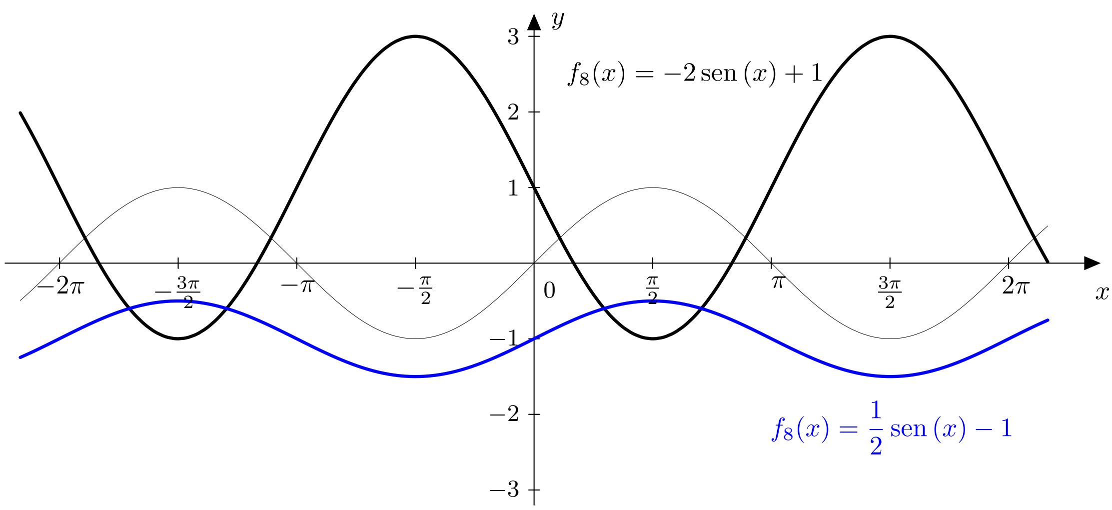
As caraterísticas desta função estão sintetizadas no quadro seguinte:

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert]$	2π	$x = -c + k\pi$	$\lvert a\rvert$ Maximizantes se $a > 0$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $a < 0$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$-\lvert a\rvert$ Minimizantes se $a > 0$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $a < 0$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	ímpar se $c \in \{k\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.8 A função $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + d$

Ao analisar a função $f_8(x) = a\,\mathrm{sen}\,(x) + d$, onde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $b = 1$ $d \neq 0$ e $c = 0$, verificamos que a alteração produz-se na paridade, nos zeros e no contradomínio e, por consequência nos extremos. Observe-se que o período não se altera.

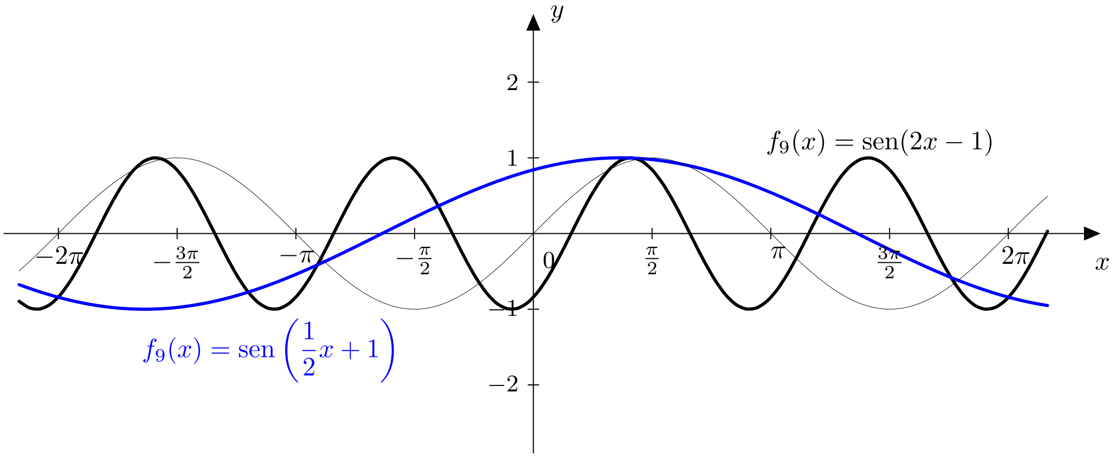


D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert + d, \lvert a\rvert + d]$	2π	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = \alpha + k\pi$, $\alpha = \mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)$ se $d = -a$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $d = a$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a > 0$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $a < 0$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a > 0$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $a < 0$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.9 A função $f(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$

No estudo da função $f_9(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$, onde $a = 1$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $c \neq 0$ e $d = 0$, a alteração produz-se no período e, por consequência nos zeros e extremantes; o contradomínio da função é o mesmo da função seno. Então,

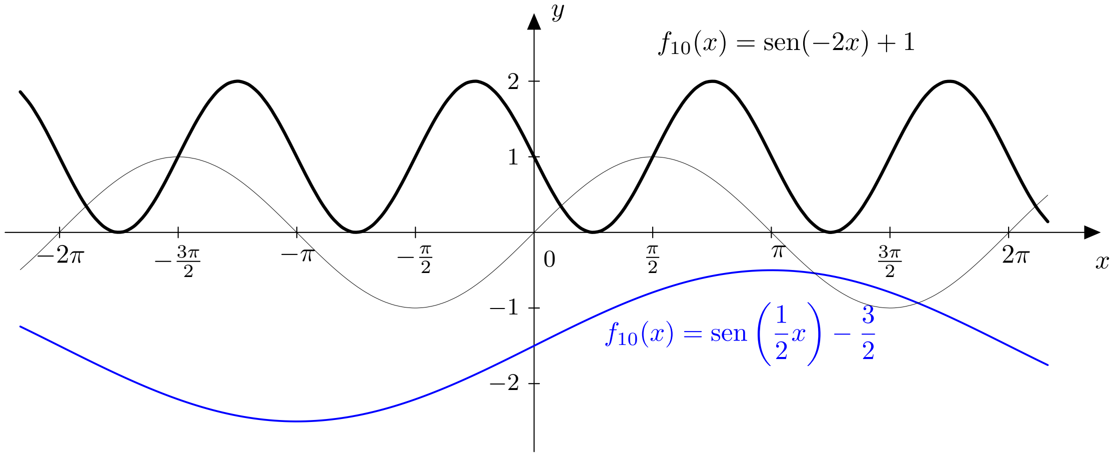


D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$x = \dfrac{-c + k\pi}{b}$	1 Maximizantes $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	-1 Minimizantes $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	ímpar se $\dfrac{c}{b} \in \{k\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.10 A função $f(x) = \operatorname{sen}(bx) + d$

A função $f_{10}(x) = \operatorname{sen}(bx) + d$, onde $a = 1$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $d \neq 0$ e $c = 0$, é uma expansão/contração da função $\operatorname{sen}(x)$ seguida de uma translação vertical. Assim, as alterações produzem-se na paridade, no período, no contradomínio e, consequentemente, nos zeros, extremantes e extremos. Vejamos os gráficos e as suas caraterísticas sintetizadas no quadro abaixo.

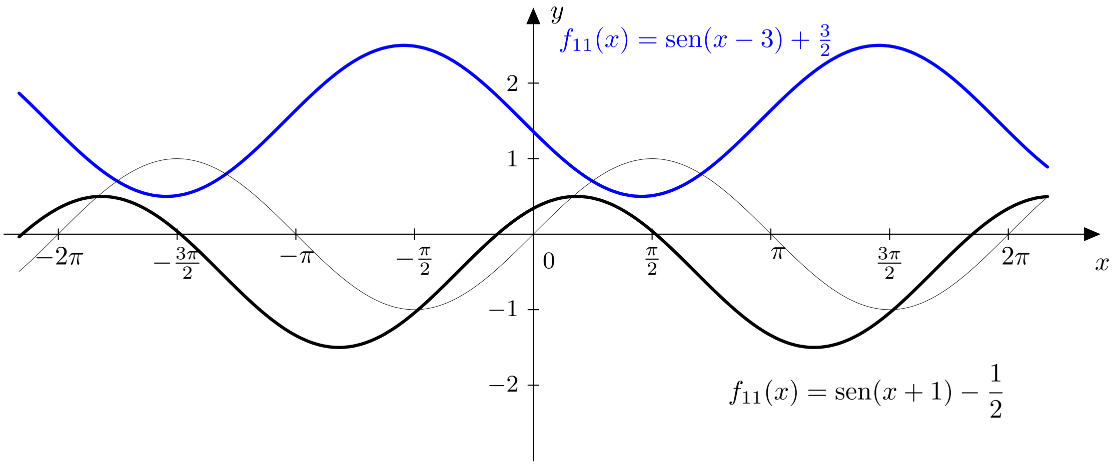


D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1+d, 1+d]$	$\dfrac{2\pi}{\mid b \mid}$	se $\lvert d\rvert > 1$ não existem se $\lvert d\rvert < 1$ $x = \dfrac{\alpha + k\pi}{b}$ com $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(-d)$ se $d = 1$ $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $d = -1$ $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$1 + d$ Maximizantes $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$-1 + d$ Minimizantes $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.11 A função $f(x) = \text{sen}(x + c) + d$

A função $f_{11}(x) = \text{sen}\,(x + c) + d$, onde $c \neq 0$, $d = 0$ e $a = b = 1$, é uma translação da função $\text{sen}\,(x)$ segundo o vetor $(-c, d)$. O período mantém-se mas altera-se o contradomínio que passa a ser $[-1 + d, 1 + d]$. Se $|d| > 1$ a função não tem zeros.

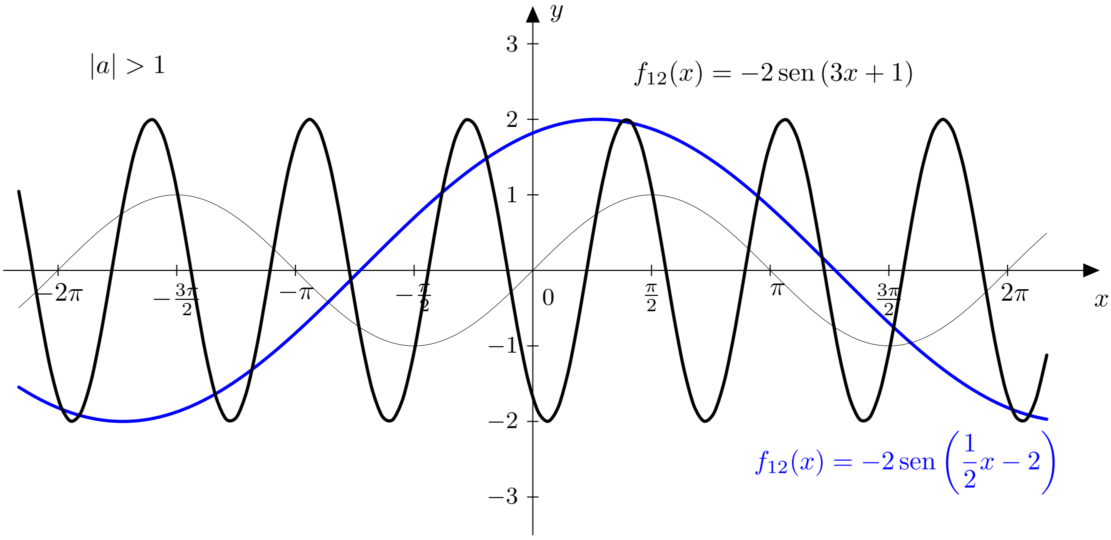


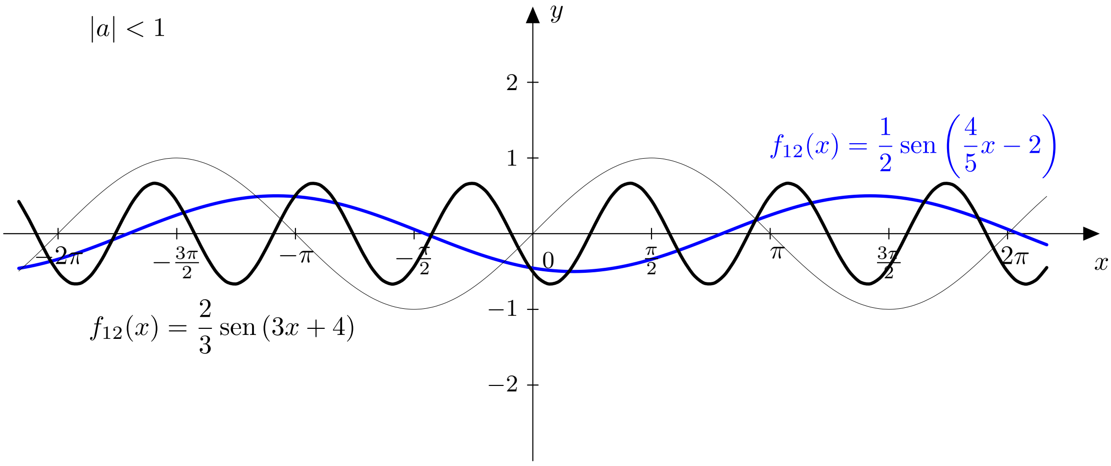
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1 + d, 1 + d]$	2π	se $\|d\| > 1$ não existem se $\|d\| < 1$ $x = -c + \alpha + k\pi$ $\alpha = \text{sen}^{-1}(-d)$ se $d = 1$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $d = -1$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$1 + d$ Maximizantes $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$-1 + d$ Minimizantes $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.12 A função $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx + c)$

No estudo da função $f_{12}(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx+c)$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $c \neq 0$ e $d = 0$, verificamos que a alteração produz-se no período e contradomínio e, por consequência nos zeros, extremantes e extremos. São apresentados dois gráficos, para os casos em que $|a| > 1$ e $|a| < 1$, para ilustrar as duas situações.



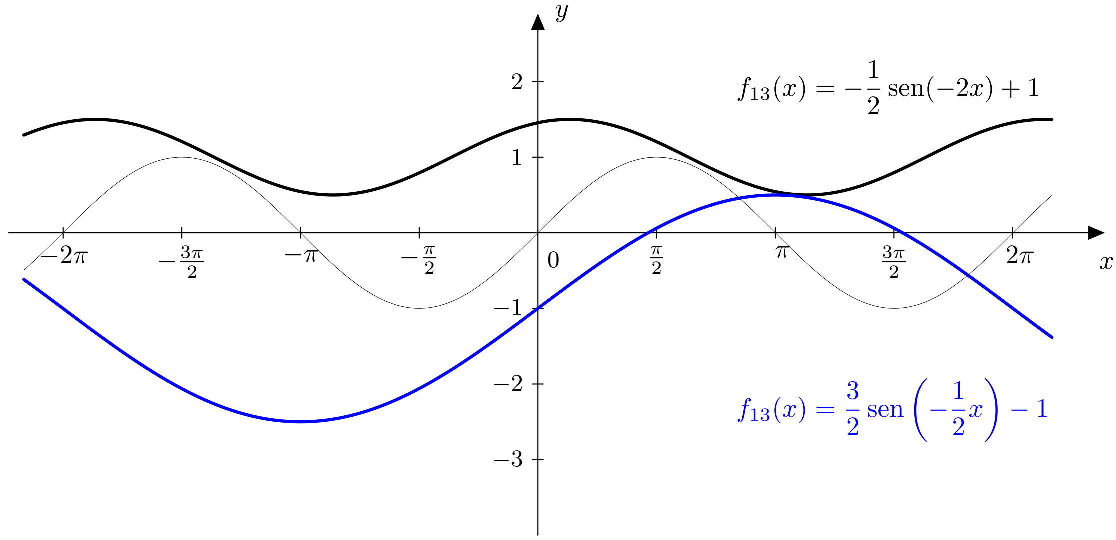


D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert]$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\, b \,\rvert}$	$x = \dfrac{-c + k\pi}{b}$	$\lvert a\rvert$ Maximizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$-\lvert a\rvert$ Minimizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	ímpar se $\frac{c}{b} \in \{k\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.13 A função $f(x) = a\,\text{sen}\,(bx) + d$

A função $f_{13}(x) = a\,\text{sen}\,(bx) + d$, onde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $d \neq 0$ e $c = 0$, tem período $\dfrac{2\pi}{|b|}$ e contradomínio $[-|a| + d, |a| + d]$. O seu gráfico apenas interseta o eixo das abcissas caso $\left|\dfrac{d}{a}\right| \leq 1$ Vejamos os gráficos e as suas caraterísticas sintetizadas no quadro seguinte:



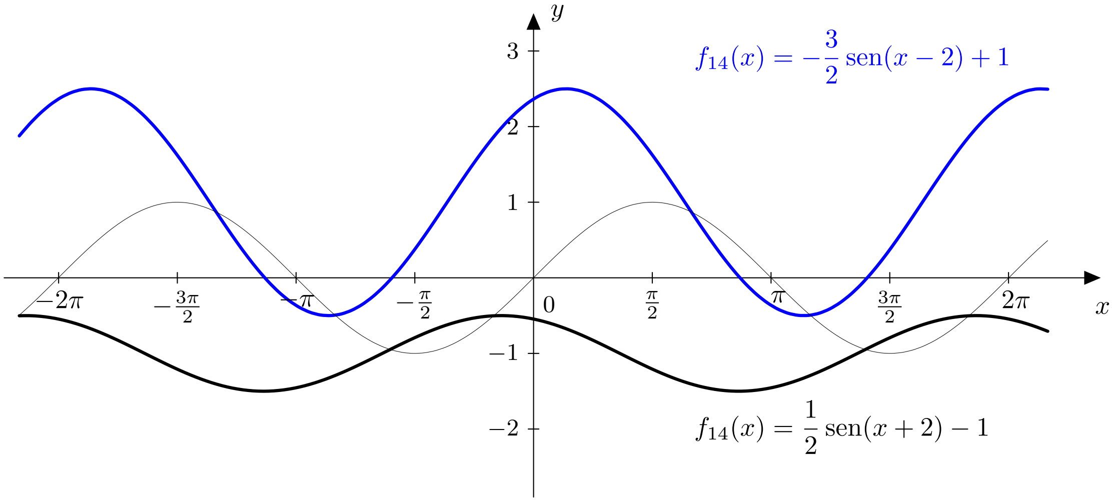
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert + d, \lvert a\rvert + d]$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\, b\,\rvert}$	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = \dfrac{\alpha + k\pi}{b}$ $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{d}{a}\right)$ se $d = -a$ $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $d = a$ $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.14 A função $f(x) = a\,\text{sen}(x + c) + d$

Da análise da função $f_{14}(x) = a\,\text{sen}\,(x + c) + d$, onde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $b = 1$, verificamos que a alteração produz-se na paridade, zeros, extremantes, contradomínio e extremos.

Vejamos exemplos do seu gráfico:



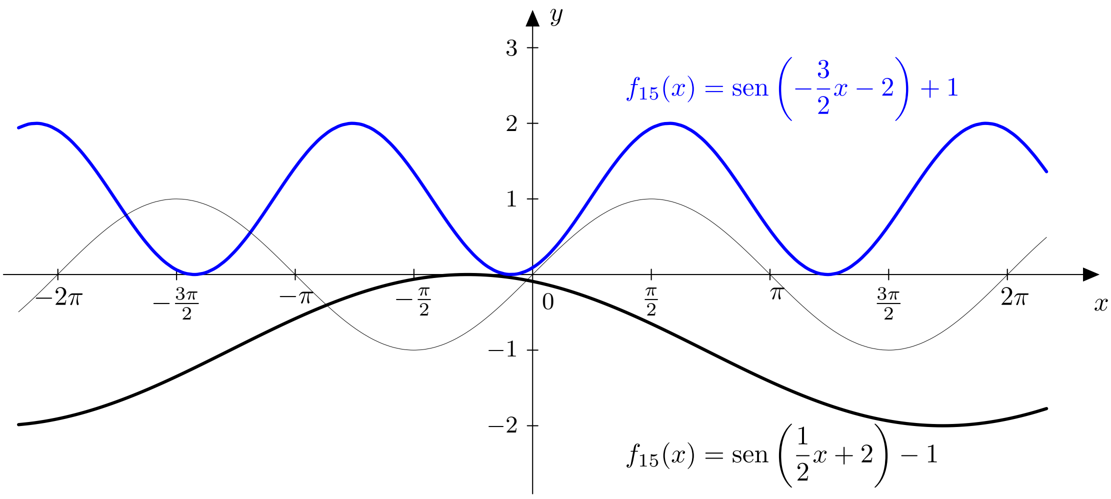
As caraterísticas fundamentais desta função são apresentadas abaixo.

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert + d, \lvert a\rvert + d]$	2π	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem, se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = -c + \alpha + k\pi$ $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)$ se $d = -a$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $d = a$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a > 0$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se $a < 0$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a > 0$ $x = -c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, se $a < 0$ $x = -c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.15 A função $f(x) = \operatorname{sen}(bx + c) + d$

Na função $f_{15}(x) = \operatorname{sen}(bx + c) + d$, onde $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $a = 1$, produzem-se alterações em todas as suas caraterísticas, desde o período ao contradomínio. Os dois exemplos que seguem ilustram essas modificações relativamente à função base.

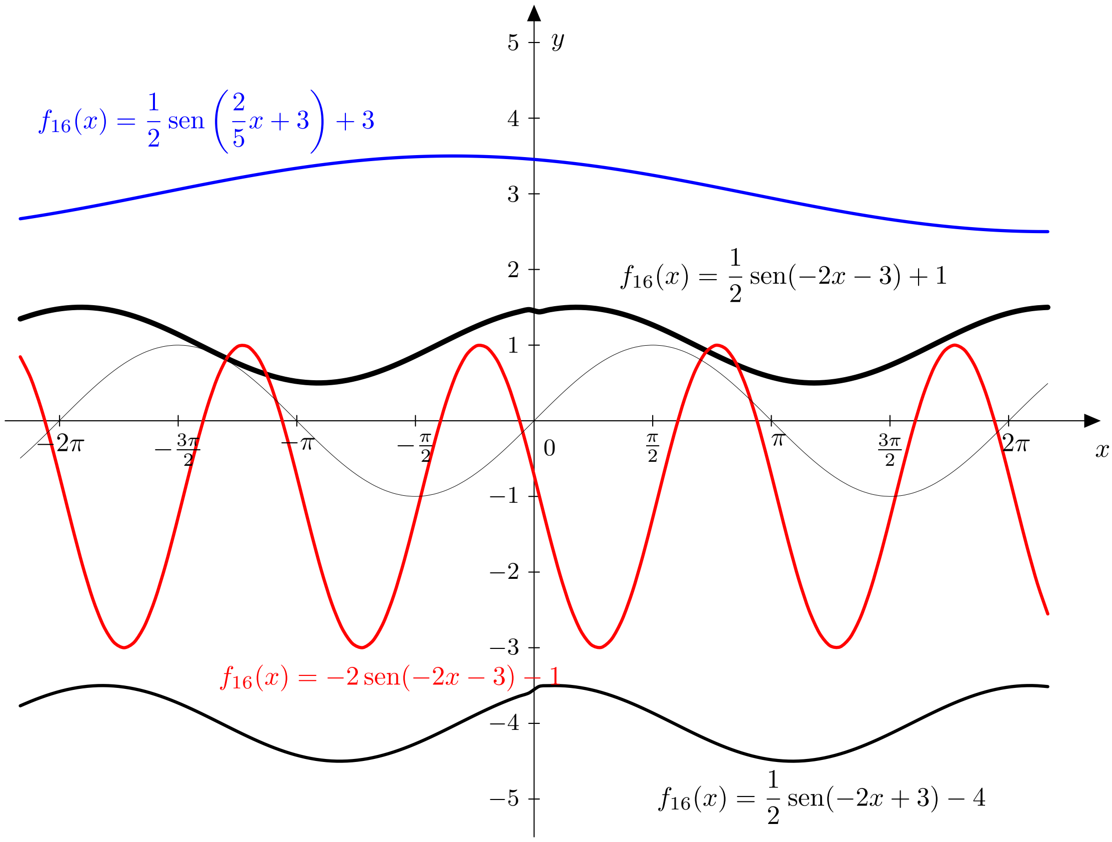


D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1+d, 1+d]$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	se $\lvert d\rvert > 1$ não existem se $\lvert d\rvert < 1$ $x = \frac{-c+\alpha+k\pi}{b}$ $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(-d)$ se $d = 1$ $x = \frac{-c-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{b}$ se $d = -1$ $x = \frac{-c+\frac{\pi}{2}+2k\pi}{b}$	$1 + d$ Maximizantes $x = \frac{-c+\frac{\pi}{2}+2k\pi}{b}$	$-1 + d$ Minimizantes $x = \frac{-c-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{b}$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.1.16 A função $f(x) = a\,\text{sen}\,(bx + c) + d$

A função $f_{16}(x) = a\,\text{sen}\,(bx + c) + d$, é a mais geral, que engloba todos os casos anteriores. Vamos aqui ilustrar alguns exemplos onde a, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$.



D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert + d, \lvert a\rvert + d]$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = \dfrac{-c + \alpha + k\pi}{b}$ $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{d}{a}\right)$ se $d = -a$ $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $d = a$ $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a > 0$ $x = \dfrac{-c - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \dfrac{-c + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{b}$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

O uso desta classe de funções permitiu-nos gerar uma grande quantidade de exercícios distintos, analisando cada um dos casos com um exemplo concreto de uma das funções f_i. Estes exemplos serão ilustrados no capítulo 3.

2.2 A função cosseno e suas generalizações

Analogamente ao que foi feito para a função seno, fazemos o estudo para a família de funções do tipo $f(x) = a\cos(bx + c) + d$.

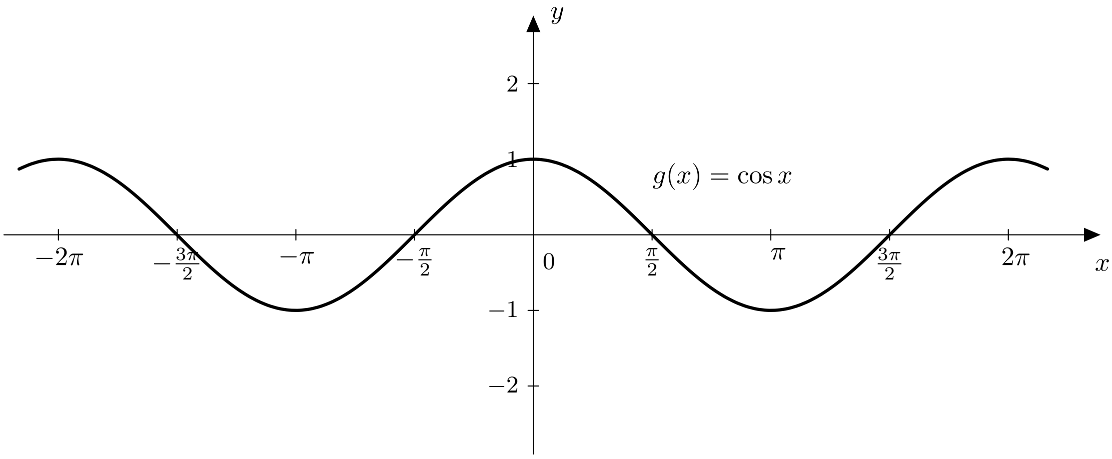
Por ser um estudo, em tudo, semelhante ao anterior vamos apenas ilustrar as propriedades de alguns casos particulares.

2.2.1 A função cosseno

No caso de $g(x) = \cos(x)$ onde $a = b = 1$ e $c = d = 0$, podemos observar que é uma função par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, ($\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$) e é uma função periódica de período 2π.

Verificamos também que os seus zeros estão espaçados de meio período e os seus extremos e extremantes de um período inteiro.

Sendo a função $\cos x$ par, observe-se que $a = 1$, $b = 1$ e $c = d = 0$ e $a = 1$, $b = -1$ e $c = d = 0$ conduzem exatamente à mesma função, $\cos(-x) = \cos x$.



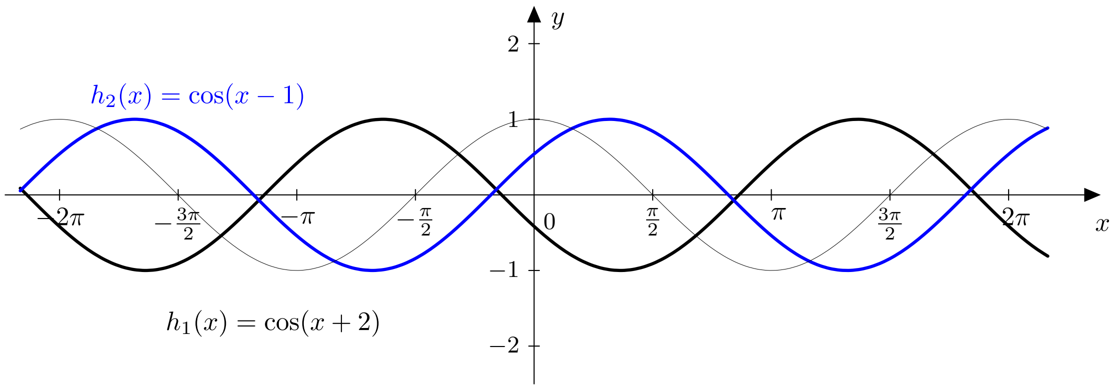
As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte.

D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	1 Maximizantes $x = 2k\pi$	-1 Minimizantes $x = \pi + 2k\pi$	par

$k \in \mathbb{Z}$

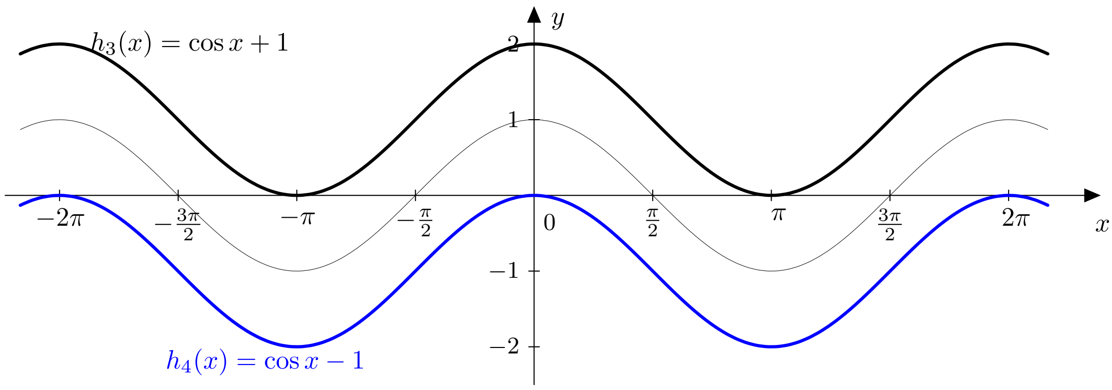
2.2.2 Translações da função cosseno segundo os eixos coordenados

A título de exemplo apresentamos o estudo de duas funções: $h(x) = \cos(x + c)$, onde $a = b = 1$, $d = 0$ e $c \neq 0$, e $g(x) = \cos x + d$, onde $a = b = 1$, $d \neq 0$ e $c = 0$. No primeiro caso, obtemos uma translação da função $\cos x$ segundo o vetor $(-c, 0)$ (as alterações vão-se sentir nos zeros e nos extremantes) e no segundo uma translação segundo o vetor $(0, d)$ (as alterações vão-se sentir nos extremos e consequentemente, no contradomínio). Vejamos os seus gráficos e as suas caraterísticas.



D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = -c + \frac{\pi}{2} + k\pi$	1 Maximizantes $x = -c + 2k\pi$	-1 Minimizantes $x = -c + \pi + 2k\pi$	par se $c \in \{k\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$



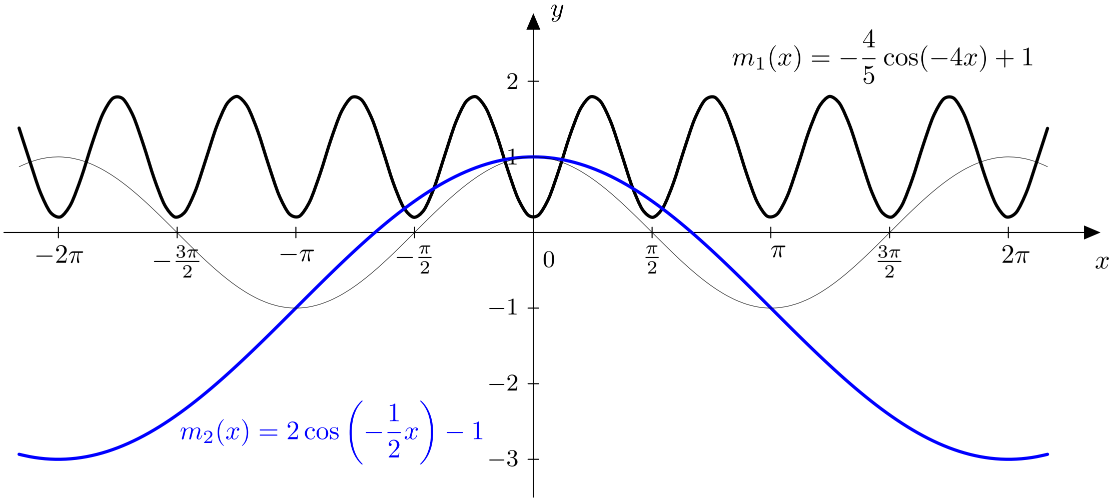
D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert d\rvert, \lvert d\rvert]$	2π	se $\lvert d\rvert > 1$ não tem se $\lvert d\rvert < 1$ $x = \cos^{-1}(d) + k\pi$ se $d = 1$ $x = \pi + 2k\pi$ se $d = 1$ $x = 2k\pi$	$\lvert d\rvert + 1$ Maximizantes $x = 2k\pi$	$\lvert d\rvert - 1$ Minimizantes $x = \pi + 2k\pi$	par

$k \in \mathbb{Z}$

2.2.3 A função $m(x) = a\cos(bx) + d$

O caso $m(x) = a\cos(bx) + d$, onde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $d \neq 0$ e $c = 0$, altera a amplitude da onda bem como a frequência, para além da translação. Esta função tem período $\frac{2\pi}{|b|}$, contradomínio $[-|a| + d, |a| + d]$ e o seu gráfico apenas interseta o eixo das abcissas caso $\left|\frac{d}{a}\right| \leq 1$.

Vejamos os gráficos e as suas caraterísticas.



D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert + d, \lvert a\rvert + d]$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = \frac{\alpha + k\pi}{b}$ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)$ se $d = -a$ $x = \frac{2k\pi}{b}$ se $d = a$ $x = \frac{(2k+1)\pi}{b}$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a > 0$ $x = \frac{2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \frac{\pi + 2k\pi}{b}$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a > 0$ $x = \frac{\pi + 2k\pi}{b}$ se $a < 0$ $x = \frac{2k\pi}{b}$	par

$k \in \mathbb{Z}$

2.2.4 A função $r(x) = a\cos(bx + c) + d$

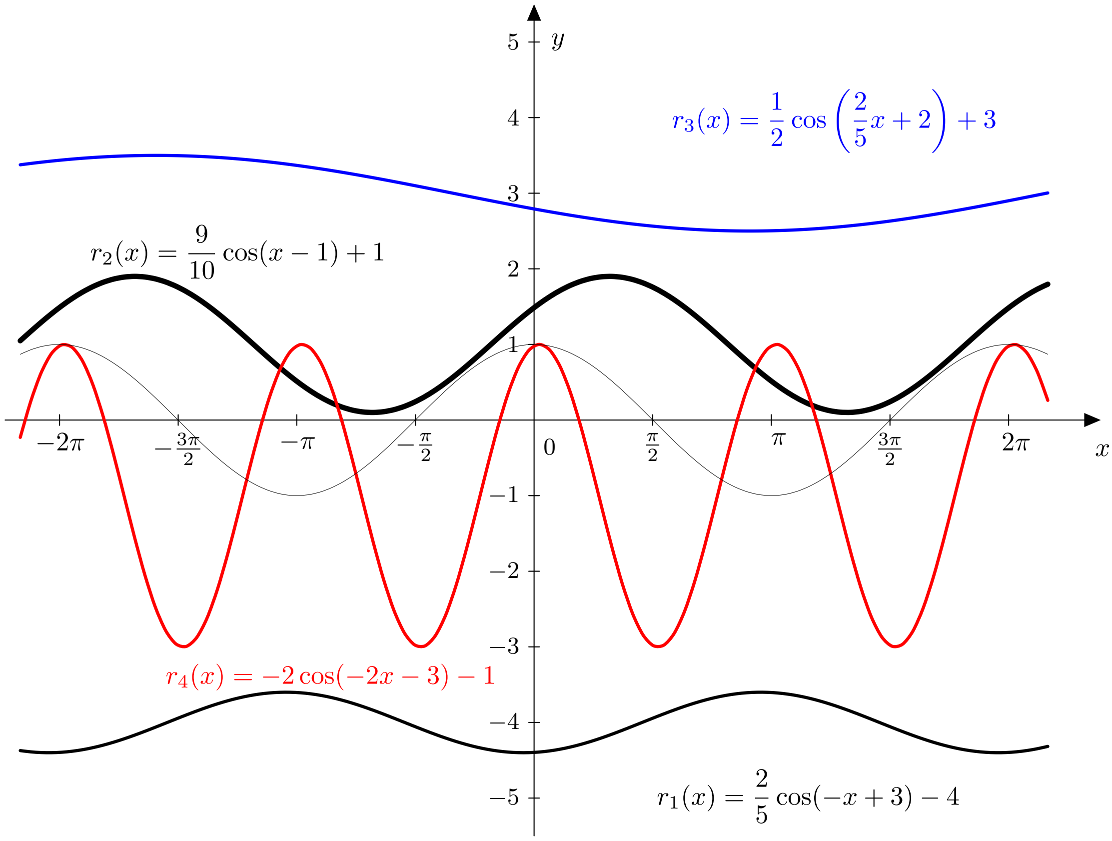
Em modo de conclusão vamos estudar a família de funções de tipo $r(x) = a\cos(bx + c) + d$, onde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$, com estes parâmetros produzem-se alterações em quase todas as suas caraterísticas, desde o período, zeros, extremantes, contradomínio e extremos.

Observemos que $-1 \leq \cos(bx + c) \leq 1$ e portanto,

$$-|a| + d \leq a\cos(bx + c) + d \leq |a| + d$$

e o contradomínio de r é $[-|a|+d, |a|+d]$, logo, o máximo de r é $|a|+d$ e o mínimo é $-|a|+d$. O máximo é atingido quando $a\cos(bx+c) = |a|$, ou seja, se $a>0$, quando $bx+c = 2k\pi$ e se $a<0$ quando $bx+c = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. De forma análoga se determinam os minimizantes.
O período da função é $\dfrac{2\pi}{|b|}$ e portanto os seus zeros, caso existam, distam de $\dfrac{\pi}{|b|}$, exceto se $\left|\dfrac{d}{a}\right| = 1$, pois os zeros coincidirão com os maximizantes ou minimizantes dependendo do sinal de $-\dfrac{d}{a}$.

Se $\left|\dfrac{d}{a}\right| > 1$ a função não tem zeros. Caso $\left|\dfrac{d}{a}\right| < 1$, os seus zeros serão dados por $\dfrac{\cos^{-1}\left(-\dfrac{d}{a}\right) + k\pi - c}{b}$, com $k \in \mathbb{Z}$.



D	CD	Período	Zeros	Máximo	Mínimo	Paridade
$\mathbb{R}$	$[-\lvert a\rvert+d, \lvert a\rvert+d]$	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	se $\lvert d\rvert > \lvert a\rvert$ não existem se $\lvert d\rvert < \lvert a\rvert$ $x = \dfrac{-c+\alpha+k\pi}{b}$ $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{d}{a}\right)$ se $d=-a$ $x = \dfrac{2k\pi - c}{b}$ se $d = a$ $x = \dfrac{(2k+1)\pi - c}{b}$	$\lvert a\rvert + d$ Maximizantes se $a>0$ $x = \dfrac{-c+2k\pi}{b}$ se $a<0$ $x = \dfrac{-c+(2k+1)\pi}{b}$	$-\lvert a\rvert + d$ Minimizantes se $a>0$ $x = \dfrac{-c+(2k+1)\pi}{b}$ se $a<0$ $x = \dfrac{-c+2k\pi}{b}$	nem par nem ímpar

$k \in \mathbb{Z}$

2.3 A função tangente e suas generalizações

Da mesma maneira que foi feito para as funções seno e cosseno, estudaremos a seguir algumas das caraterísticas da ampla família de funções $f(x) = a\tan(bx + c) + d$, onde os parâmetros podem tomar diferentes valores, consoante o grau de dificuldade e complexidade da função que se pretende estudar.

2.3.1 A função tangente

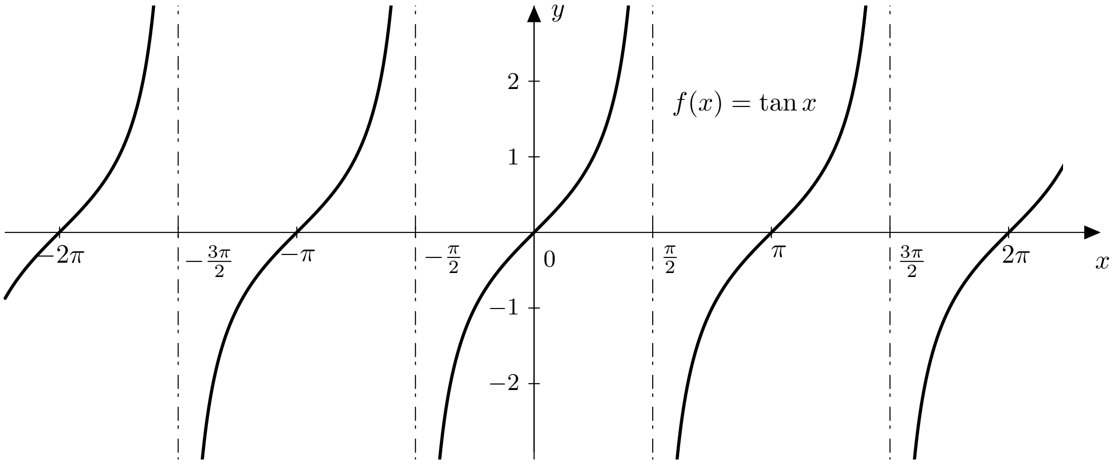
A função tangente pode ser dada como o quociente $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos x}$, mas apesar de ser uma função periódica, as suas caraterísticas são bem diferentes das outras funções trigonométricas referidas.
Ao estudar as caraterísticas da função $f(x) = \tan(x)$, observamos que diferentemente das funções seno e cosseno o domínio da função tangente não é todo o conjunto $\mathbb{R}$, mas um subconjunto estrito dele. Mais precisamente o domínio é o conjunto dos números reais que medem em radianos todos os arcos que sejam diferentes de $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Isto porque quando x se aproxima desses ângulos o valor da tangente se aproxima de $\pm\infty$. Note que as interseções da função tangente com o eixo das abcissas são as mesmas da função seno, que a função tangente não está definida nos zeros da função cosseno e o seu contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$. Enquanto que as funções seno e cosseno são funções limitadas, o mesmo não acontece com a tangente. Assim, esta função não tem máximos nem mínimos.

O gráfico desta função tem como assíntotas verticais, as retas $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, os pontos que não pertencem ao domínio.

Recordemos a definição de assíntota vertical. Uma reta vertical $x = a$ é uma assíntota do gráfico de uma função real de variável real se, sendo a um ponto de acumulação do domínio da função, pelo menos uma das seguintes condições se verifica:

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

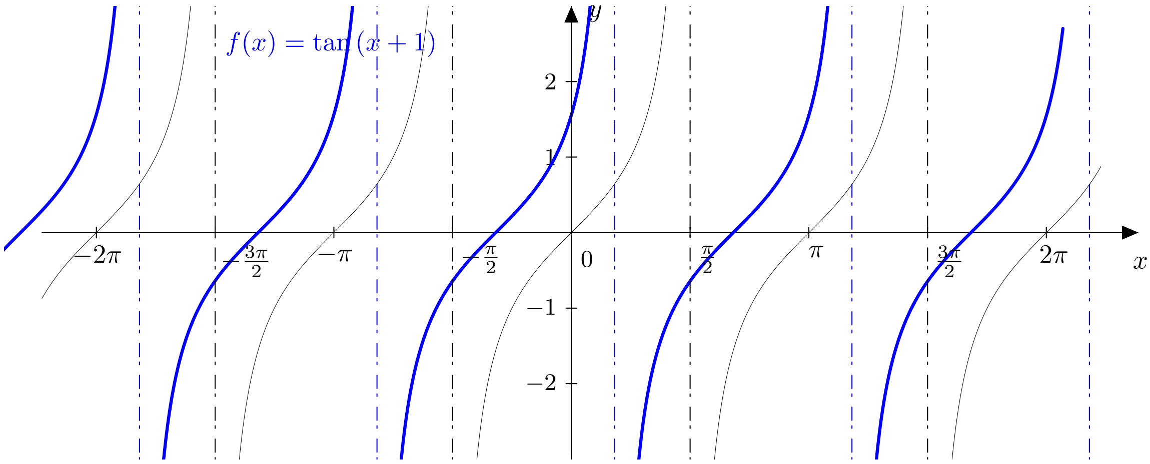
A função tangente é uma função periódica de período π e é uma função ímpar pois é o quociente de uma função ímpar e uma função par, $\tan(-x) = -\tan(x)$, qualquer que seja x pertencente ao domínio. Observemos então o seu gráfico e as suas caraterísticas.

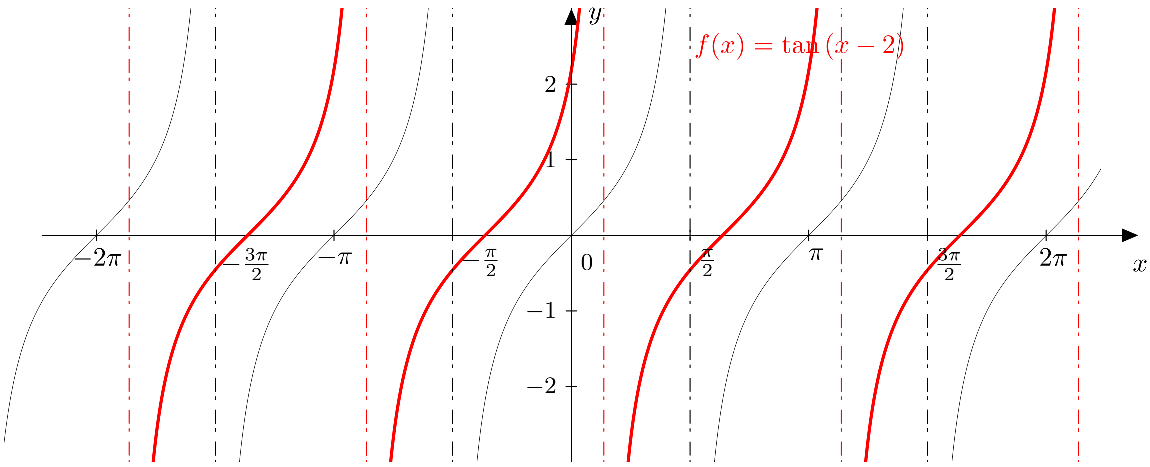


D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R}$	π	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	ímpar	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.3.2 A função $f(x) = \tan(x + c)$

Na função $f(x) = \tan(x + c)$, onde $a = b = 1$, $c \neq 0$ e $d = 0$, o gráfico de $\tan(x)$ sofrerá uma translação horizontal, isto é, se $c > 0$ o gráfico deslocar-se-á $|c|$ unidades, horizontalmente, para a esquerda e se $c < 0$, o gráfico de $\tan(x)$ deslocar-se-á $|c|$ unidades, horizontalmente, para a direita, estas alterações vão-se sentir no domínio e nos zeros. As assíntotas sofrem também um deslocamento horizontal.
Vejamos os seguintes gráficos; no primeiro o parâmetro $c > 0$ e no segundo $c < 0$.



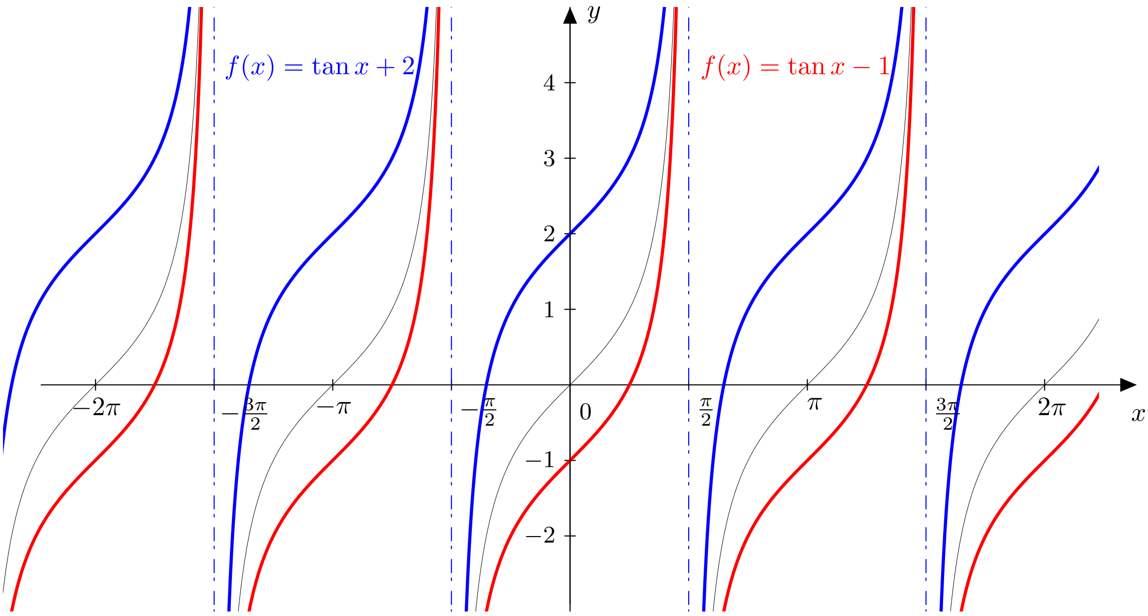


As suas caraterísticas estão sintetizadas no seguinte quadro:

D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R}\backslash\left\{-c+\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	π	$x=-c+k\pi, k\in\mathbb{Z}$	ímpar se $c\in\{k\pi\}$	$x=-c+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2.3.3 A função $f(x) = \tan(x) + d$

Na função $f(x) = \tan(x) + d$, onde $a = b = 1$, $d \neq 0$ e $c = 0$, o gráfico de $\tan(x)$ sofrerá um deslocamente vertical, isto é, se $d > 0$ o gráfico deslocar-se-á $|d|$ unidades para cima e se $d < 0$, o gráfico de $\tan(x)$ deslocar-se-á $|d|$ unidades para baixo. Estas alterações vão-se sentir apenas nos zeros, já que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = -d$. É de salientar que, embora o gráfico se desloque na vertical, não existe alteração do contradomínio, visto ser o conjunto $\mathbb{R}$.

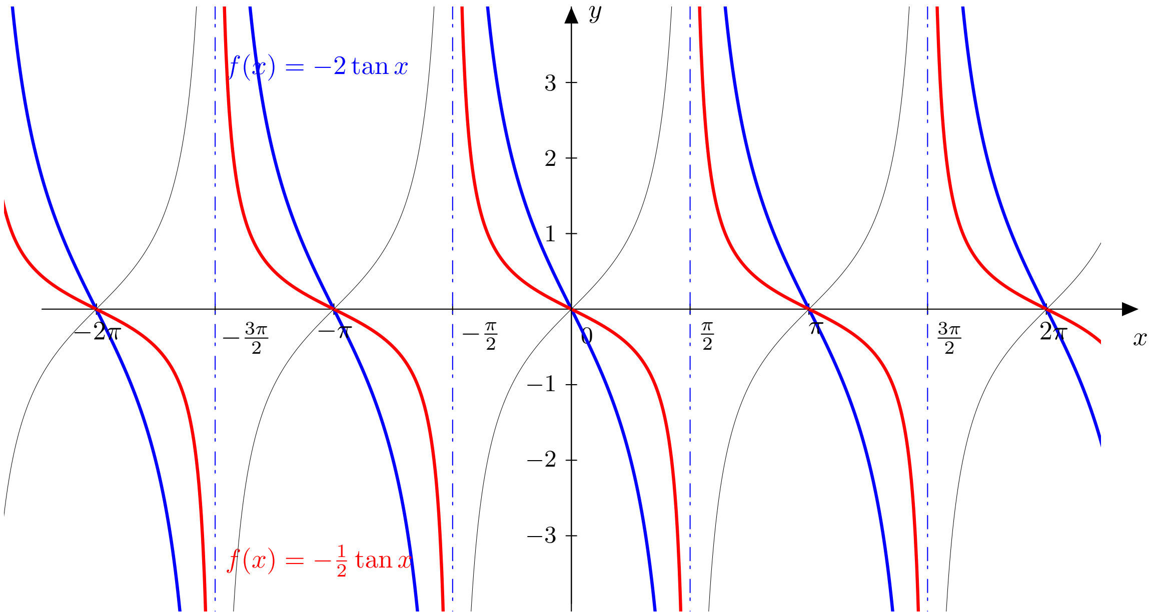


As suas caraterísticas estão sintetizadas no seguinte quadro:

D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	π	$x = \tan^{-1}(-d) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	nem par nem ímpar	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.3.4 A função $f(x) = a\tan(x)$

Ao estudar a função $f(x) = a\tan(x)$, onde $b = 1$, $a \neq 1$ e $c = d = 0$, verificamos que o gráfico de $\tan(x)$ sofrerá um alongamento ou uma compressão vertical consoante o valor do parâmetro a, ou seja, se $|a| > 1$ o gráfico alonga-se na vertical e se $|a| < 1$, o gráfico de $\tan(x)$ comprime-se na vertical, estas alterações não vão interferir com as caraterísticas da função, pois tal como no estudo anterior, embora o gráfico se alongue ou se comprima, não existe alteração do contradomínio, visto ser o conjunto $\mathbb{R}$. Verificamos ainda tratar-se de uma função cujo gráfico é simétrico em relação à origem do referencial, isto é, uma função ímpar.

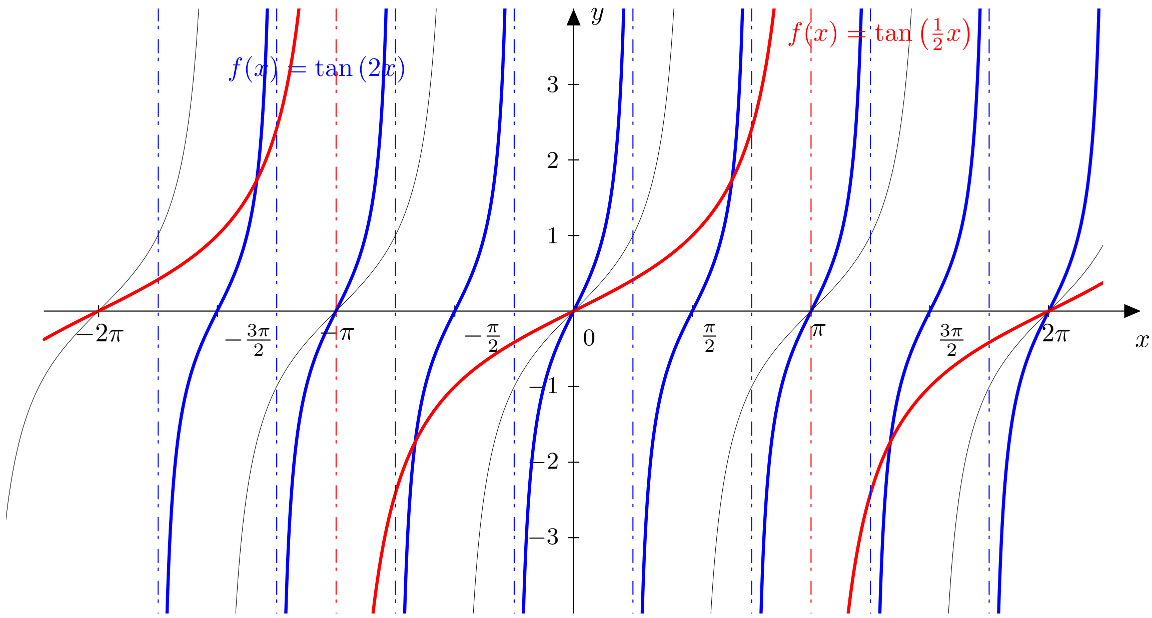


As suas caraterísticas estão sintetizadas no seguinte quadro:

D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	π	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	ímpar	$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.3.5 A função $f(x) = \tan(bx)$

Na função $f(x) = \tan(bx)$, onde $a = 1$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ e $c = d = 0$, as alterações vão-se sentir no domínio, no período e nos zeros. Verificamos que o gráfico de $\tan(x)$ sofrerá um alongamento ou uma compressão na horizontal consoante o valor do parâmetro b, ou seja, se $|b| < 1$ o gráfico alonga-se na horizontal e se $|b| > 1$, o gráfico de $\tan(x)$ comprime-se na horizontal; o período desta função é $\dfrac{\pi}{|b|}$ e as suas assíntotas ocorrem nas retas $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2b}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Verificamos ainda tratar-se de uma função ímpar.

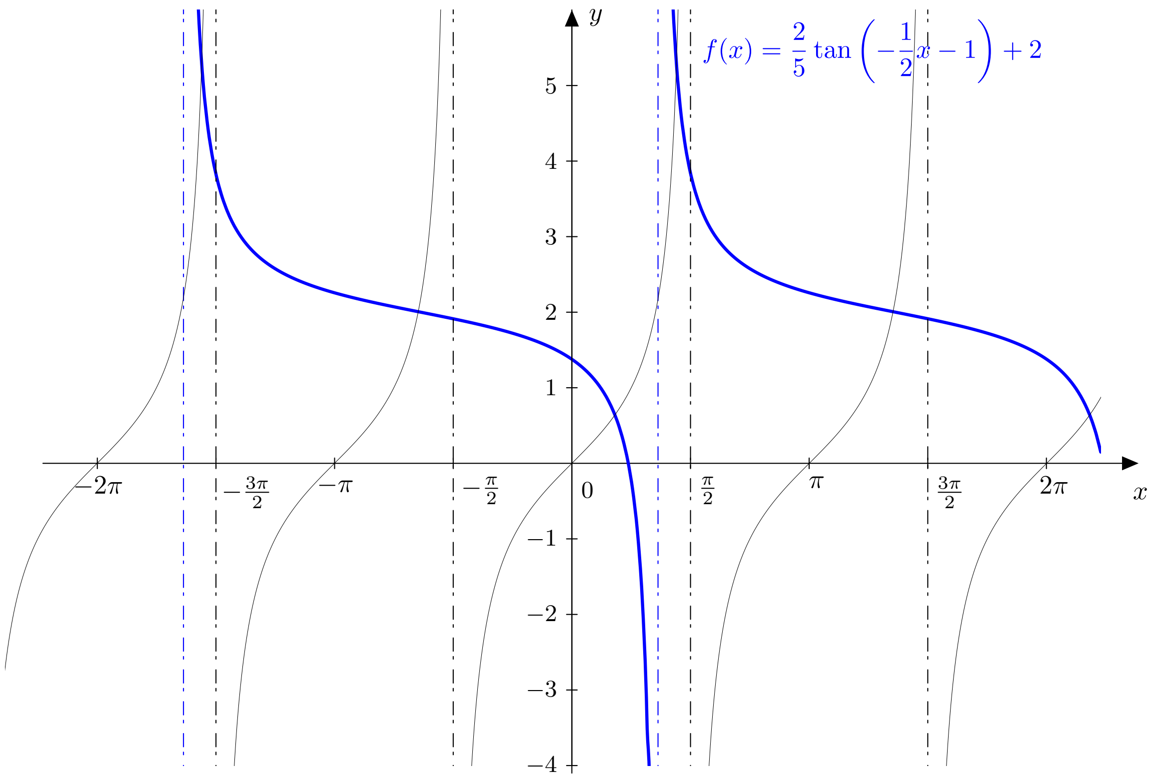


As suas caraterísticas estão sintetizadas no seguinte quadro:

D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi + 2k\pi}{2b}\right\}, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$x = \dfrac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$	ímpar	$x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2b}$, $k \in \mathbb{Z}$

2.3.6 A função $f(x) = a\tan(bx + c) + d$

Ao estudar a família de funções do tipo $f(x) = a\tan(bx + c) + d$, observamos tratar-se da composição das quatro funções anteriores. As transformações vão alterar o domínio, o período e os zeros da função. O gráfico seguinte apresenta uma destas funções com $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$ e $d = 2$:



O domínio da função é o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : bx + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2c + \pi + 2k\pi}{2b},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

O período desta função é $\frac{\pi}{|b|}$. Os seus zeros são as soluções de $\tan(bx + c) = -\frac{d}{a}$, ou seja,

$$x = \frac{\tan^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right) - c + k\pi}{b}$$

As suas caraterísticas estão sintetizadas no quadro seguinte:

D	CD	Período	Zeros	Paridade	Assíntotas verticais
$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-2c+\pi+2k\pi}{2b}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$x = \frac{-c+\alpha+k\pi}{b}$ $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{d}{a}\right)$	nem par nem ímpar	$x = \frac{-2c+\pi+2k\pi}{2b}$

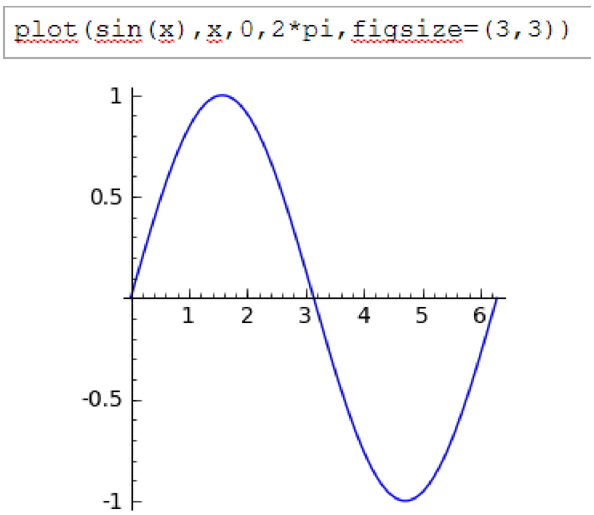
$k \in \mathbb{Z}$

Capítulo 3

Implementação em software

3.1 Sage Mathematics

O Sage Mathematics (Stein, 2012) é um software para matemática que abrange computação algébrica, numérica e tem capacidades gráficas. Este pode ser utilizado através de um navegador de internet, por exemplo em `www.sagenb.org`. Algumas das suas potencialidades passam pelo cálculo de primitivas, por exemplo, através da instrução `integrate(x,x)`, cálculo de valores exatos (por exemplo `sin(pi/4)` retornando `sqrt(2)/2`); cálculo de valores numéricos aproximados usando `sin(pi/4).n()` ou a construção de gráficos, por exemplo, recorrendo à instrução `plot(sin(x),x,0,2*pi)`



O Sage Mathematics permite aumentar as suas funcionalidades através da criação de pacotes de software (Software Package).

3.2 MEGUA

Foi criado um pacote de software para o Sage Mathematics, designado por MEGUA (Cruz, Oliveira, Seabra, (2012)) que permite a construção de exercícios parametrizados em LaTeX. Os autores esperam que este pacote seja futuramente parte dum conjunto mais vasto, atualmente disponivel em (`http://www.sagemath.org/packages/standard/`).

O pacote de software "open source" MEGUA permite a criação de arquivos de exercícios escritos na linguagem tipográfica LaTeX permitindo que o enunciado de um exercício seja parametrizado por valores ou funções. A linguagem de programação usada é o Python na qual está também programado o acesso às bibliotecas do Sage Mathematics. Esta linguagem é simples de usar, uma vez que não requer a declaração do tipo de variáveis nas rotinas.

A principal diferença e a grande mais valia do projeto MEGUA resulta do uso da ferramenta Sage Mathematics com as suas capacidades algébricas e numéricas que possibilita ao professor programar uma pergunta com várias versões e disponibilizar a resolução correspondente. Esta resolução é muitas vezes obtida por uso do Sage Mathematics.

3.2.1 Detalhe de um worksheet

Para criar um exercício usando o Sage Mathematics e o pacote MEGUA devemos criar uma "worksheet" que deverá conter as seguintes linhas conforme a listagem 3.1.

```
1 from megua.all import *
2 meg = MegBook('/home/nbuser/iola.sqlite')
3 # inicio de exercicio
4 meg.save(r'''
5 aqui o texto e a class python
6 ''')
```

Listagem 3.1: Atribuição de valores aos parâmetros usando o Python/Sage Mathematics

1. Esta instrução carrega o pacote MEGUA e as suas funções.
2. É aberta a base de dados que contém os exercícios criados pela autora em que `meg` passa a especificar essa base de dados.
3. Comentário indicando que o exercício vai começar.
4. Esta instrução grava o exercício descrito entre 3 plicas `'''` e as plicas seguintes na linha 6.
5. O texto e a classe Python tal como descritos na secção 3.2.2.

3.2.2 Como criar um exercício

Para criar um exercício parametrizado devemos seguir alguns passos ilustrados na listagem 3.2.

```
class E97F40_adicao_001(Exercise):
    def make_random(s):
        s.a1 = ZZ.random_element()
        s.b1 = ZZ.random_element()
    def solve(s):
        s.resultado = s.a1 + s.b1
```

Listagem 3.2: Atribuição de valores aos parâmetros a1 e b1 usando o Python/Sage Mathematics

- O nome da classe é o nome do exercício `E97F40_adicao_001` em que E97F40 designa o código MSC (Mathematical Subject Classification, ver bibliografia) mais apropriado para o exercício.
- a função `make_random` é usada para declarar os parâmetros que ocorrem no texto na parte do enunciado do problema.
- A função `solve` é onde os parâmetros que ocorrem na parte da resposta ("answer") tomam valores calculados com base nos parâmetros escolhidos na parte do problema.
- Neste exemplo, ocorre `ZZ.random_element` que escolhe um inteiro aleatório.
- `s.a1` e `s.b1` são chamados de parâmetros em que `a1` e `b1` ocorrem no texto.
- O `s.` designa que os parâmetros pertencem ao exercício e não são variáveis locais que iriam desaparecer.
- Pode ser útil que o nome da variável tenha um número associado para melhor identificação e diferenciação face a palavras correntes da língua portuguesa.
- O parâmetro `resultado` contém a soma que irá aparecer no texto.

Depois desta pequena introdução iremos ver um exemplo mais completo. Consideremos o texto escrito na linguagem tipográfica LaTeX:

```
%PROBLEM A função seno

Na empresa nemp o volume mensal de vendas de um produto sazonal,
em milhares de unidades, segue ao longo do primeiro ano, o seguinte
modelo matemático, $$S(t)=f1$$ em que t é o tempo em meses,
correspondendo o mês de janeiro a $t=1$.
\begin{enumerate}
\item Indique o volume de vendas no mês
```

```
      de idmes@c{"janeiro", "fevereiro", "março","abril", "maio",
      "junho", "julho","agosto", "setembro", "outubro",
       "novembro", "dezembro"}.
\item Em que mês ou meses o volume de vendas é máximo?
      Indique o volume máximo.
\item Em que mês ou meses o volume de vendas é mínimo?
      Indique o volume mínimo.
\item Indique o mês ou meses em que o volume de vendas
      atingiu as vxx mil unidades.
\end{enumerate}
```

Listagem 3.3: Texto LaTeX de um problema.

- A palavra "nemp" não é um erro ortográfico mas sim um parâmetro que irá variar de uma lista de nomes escolhida em `make_random`.
- Uma outra possibilidade para a escolha de nomes é feita assim `idmes@c{"janeiro", "fevereiro",...` O valor númerico que ocorre em "idmes" determina o mês escolhido. Se "idmes" for 0 será janeiro, e assim sucessivamente.
- em `$$S(t)=f1$$` ocorre "f1". Este parâmetro será substituído por uma função que depende de x. Tal decisão é feita no `make_random`.
- O parâmetro "vxx" será um inteiro escolhido aleatoriamente.

De seguida, a função `make_random` onde os parâmetros tomam forma:

```
def make_random(s):
        (...)
        s.nemp = listanomes[id]
        s.idmes = ZZ.random_element(12)
        s.denominadorf1 = [2, 3, 4, 6]
        s.idden = ZZ.random_element( len(s.denominadorf1) )
        s.b1 = ur.iunif(1, 35)*2
        s.k1 = ur.iunif(2,30)
        s.k2 = ur.iunif(2,30)
        s.a1 = s.b1+s.k1
        s.v1 = s.b1/2+s.a1
        s.v2 = s.b1+s.a1
        listvend = [s.v1, s.v2]
        id1 = ZZ.random_element( len(listvend) )
        s.vxx = listvend[id1]
        s.f1 = s.a1+s.b1*sin(s.x1)
```

Listagem 3.4: Atribuição de valores aos parâmetros usando o Python/Sage Mathematics

3.2.3 Exercícios criados

Nesta secção serão apresentados todos os exercícios que foram realizados, assim como, uma breve descrição de cada um deles. É de salientar que todos os exercícios têm as respetivas resoluções que posteriormente serão apresentadas em anexo.

A base de dados de exercícios, que foi criada, pretende cobrir os casos principais estudados nesta dissertação, nomeadamente:

- $a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$
- $a\cos(bx + c) + d$
- $a\tan(bx + c) + d$

Vejamos, a título de exemplo, a concretização de um exercício e a sua respetiva resolução. É de salientar que o mesmo exercício, nos permite uma panóplia de enunciados, para isso basta alterar os valores dos parâmetros.

Exercício E97I20 senofuncao 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período, a paridade, os zeros e os extremantes, num determinado intervalo, de uma função do tipo $a\,\text{sen}(bx+c)+d$.

Enunciado 1:

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\ \text{sen}\,(-3\,x-4)+1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da função.
4. Determine os zeros da função, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo, no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Neste primeiro exemplo, a função definida por $f(x) = a\,\text{sen}(bx+c)+d$ tem como parâmetros $a=-2$, $b=-3$, $c=-4$ e $d=1$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3\,x-4$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$, temos

   $$-1 \leq \text{sen}\,(-3\,x-4) \leq 1$$

   então multiplicando por -2 obtemos

   $$-2 \leq -2\ \text{sen}\,(-3\,x-4) \leq 2$$

   e somando 1 vem que

   $$-1 \leq -2\ \text{sen}\,(-3\,x-4)+1 \leq 3$$

   , ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-1, 3]$.

2. A função seno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é -3, então o período de $f(x)$ é dado por

   $$\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2}{3}\,\pi$$

3. Para estudar a paridade da função calculamos $f(-x)$, e neste caso vem que

   $$f(-x) = -2\ \text{sen}\,(3\,x-4)+1$$

calculemos ainda $-f(x)$, e obtemos $-f(x) = -(-2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)+1) = 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)-1$

Seja D_f um conjunto simétrico (isto é, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$) então temos que:

- Se $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à própria função, a função é uma função par;
- Se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função é uma função ímpar.

Neste caso como $f(-x)$ não é igual nem à função nem à sua simétrica então a função nem é uma função par nem ímpar.

4. Os zeros da função são os valores de x que são soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)+1 = 0 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(-3\,x-4) = \frac{1}{2}.$$

Sabemos que

$$\mathrm{sen}\,(x) = \mathrm{sen}\,(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e que o ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$ é o ângulo $\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)$.

Então vem que,

$$\mathrm{sen}\,(-3\,x-4) = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)$$

Logo

$$-3\,x-4 = \frac{1}{6}\,\pi + 2k\pi \quad \vee \quad -3\,x-4 = \left(\pi - \left(\frac{1}{6}\,\pi\right)\right) + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Então

$$-3\,x = \frac{1}{6}\,\pi + 2\,\pi k + 4 \quad \vee \quad -3\,x = \frac{5}{6}\,\pi + 2\,\pi k + 4$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3}.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

$$0 \le -\frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le -\frac{5}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \le 2\pi$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{18}\,\pi + \frac{4}{3} \le -\frac{2}{3}\,\pi k \le \frac{37}{18}\,\pi + \frac{4}{3} \quad \vee \quad \frac{5}{18}\,\pi + \frac{4}{3} \le -\frac{2}{3}\,\pi k \le \frac{41}{18}\,\pi + \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{37\,\pi + 24}{12\,\pi} \le k \le -\frac{\pi + 24}{12\,\pi} \quad \vee \quad -\frac{41\,\pi + 24}{12\,\pi} \le k \le -\frac{5\,\pi + 24}{12\,\pi}$$

Assim, como k é um número inteiro,

$$k \in \{-3, -2, -1\} \quad \vee \quad k \in \{-4, -3, -2\}$$

As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,

$$\left\{\frac{11}{18}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{19}{18}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{23}{18}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{31}{18}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{35}{18}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{43}{18}\,\pi - \frac{4}{3}\right\}$$

5. Como o máximo da função é 3, basta resolver a equação $f(x) = 3$ para determinar as abcissas dos pontos onde f atinge o seu máximo.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}(-3\,x - 4) + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}(-3\,x - 4) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-3\,x - 4) = -1$$

Como o ângulo cujo seno é -1 é $\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)$ resulta que,

$$\operatorname{sen}(-3\,x - 4) = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right) \Leftrightarrow -3\,x - 4 = -\frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k$$

$$\Leftrightarrow -3\,x = -\frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3}$$

Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja

$$0 \leq \frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{11\,\pi + 8}{4\,\pi} \leq k \leq \frac{\pi - 8}{4\,\pi}$$

Como k é um número inteiro,

$$k \in \{-3, -2, -1\}\,.$$

Os pontos onde a função f atinge o seu máximo em $[0, 2\pi]$ são:

$$\left\{\frac{5}{6}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{3}{2}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\,\pi - \frac{4}{3}\right\}$$

6. Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação $f(x) = -1$, ou seja,

$$-2 \operatorname{sen}(-3\,x - 4) + 1 = -1 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}(-3\,x - 4) = -2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-3\,x - 4) = 1$$

O ângulo cujo seno é 1 é $\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)$ então vem que

$$\operatorname{sen}(-3\,x - 4) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\pi\right) \Leftrightarrow -3\,x - 4 = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\,x = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3}$$

Como pretendemos os valores onde f atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$0 \leq -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{13\,\pi + 8}{4\,\pi} \leq k \leq -\frac{\pi + 8}{4\,\pi}$$

Como k é um número inteiro,

$$k \in \{-3, -2, -1\}\,.$$

O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa:

$$\left\{\frac{1}{2}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{7}{6}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{11}{6}\,\pi - \frac{4}{3}\right\}$$

Um outro enunciado do mesmo exercício, mas com parâmetros $a = 1$, $b = -3$, $c = -2$ e $d = 1$.

Enunciado 2:

Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(-3\,x - 2) + 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da função.
4. Determine os zeros da função, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo, no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Ou até mesmo, o enunciado de funções tão simples como $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, com $a = b = 1$ e $c = d = 0$.

Enunciado 3:

Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da função.
4. Determine os zeros da função, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo, no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Todos os enunciados apresentados têm uma proposta de resolução similar à apresentada para o primeiro exemplo.

Continuando com a apresentação dos exercícios, temos:

Exercício E97I20 cossenofuncao 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período, a paridade, os zeros e os extremantes de uma função do tipo $a\cos(bx+c)+d$.

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\,\cos(2\,x+1) - 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da função.
4. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Exercício E97I20 tangentefuncao 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período e os zeros de uma função tangente.

Considere a função definida por $f(x) = \tan(-x-5)+1$.

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Exercício E97I20 periodoseno 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio e o período de uma função do tipo $a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d$.

Considere a função definida por $f(x) = -\,\mathrm{sen}\,(-3x-4)+5$.

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.

Exercício E97I20 zeroseno 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período e os zeros de uma função do tipo $a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d$.

Considere a função definida por $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-2)-1$.

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Exercício E97I20 maxsen 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período, os zeros e o máximo de uma função do tipo $a\,\text{sen}(bx+c)+d$.

Considere a função definida por

$$f(x) = 2\ \text{sen}\left(-3\,x - 3\right) + 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
4. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Exercício E97I20 minsen 001: pretende-se estudar o domínio, o contradomínio, o período, os zeros e o mínimo de uma função do tipo $a\,\text{sen}(bx+c)+d$.

Considere a função definida por

$$f(x) = \text{sen}\left(-x + 1\right)$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
4. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Exercício E97I20 senocos 001: pretende-se estudar a paridade de uma função, calcular o valor numérico de uma expressão e determinar os valores, que num determinado intervalo, são soluções de uma dada equação.

Seja f a função definida por $\text{sen}^2(4x) + \cos\left(4\,x\right) + 2$.

1. Calcule $f(-x)$. O que pode concluir sobre a paridade da função f?
2. Indique, justificando, o valor exato de $f\left(\frac{1}{4}\,\pi\right) - f\left(\pi\right)$.
3. Determine os valores de x tais que: $x \in [-\pi, \pi[\quad \wedge \quad f(x) = 2 + \cos(4x)$.

Exercício E97I20 senoproblema 01: pretende-se, recorrendo a um modelo matemático, calcular o volume de vendas de uma determinada empresa, dado um determinado mês e vice-versa, indicar o mês ou os meses em que o volume de vendas é máximo e mínimo, assim como, os respetivos volumes.

Na empresa Oliveira o volume mensal de vendas de um produto sazonal, em milhares de unidades, segue ao longo do primeiro ano, o seguinte modelo matemático,

$$S(t) = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 25$$

em que t é o tempo em meses, correspondendo o mês de janeiro a $t = 1$.

1. Indique o volume de vendas no mês de maio.
2. Em que mês ou meses o volume de vendas é máximo? Indique o volume máximo.
3. Em que mês ou meses o volume de vendas é mínimo? Indique o volume mínimo.
4. Indique o mês ou meses em que o volume de vendas atingiu as 35 mil unidades.

Exercício E97I20 cossenoproblema 001: pretende-se, recorrendo a uma expressão matemática, calcular a temperatura numa determinada hora do dia e vice-versa, dada uma temperatura qualquer, saber se existe alguma hora em que essa temperatura é atingida e indicar as horas do dia em que a temperatura é máxima e mínima.

Na ilha Elxis, a temperatura verificada ao longo do primeiro dia do mês de Maio é dada, em graus Celsius, pela expressão $T(t) = 15 + 3\cos\left[\left(\frac{12-t}{8}\right)\pi\right]$, sendo t a hora do dia $(0 < t < 24)$.

1. Qual a temperatura às 12 horas?
2. A que horas do dia a temperatura foi de 15°C?
3. Existe algum instante em que a temperatura é de 19°C? Justifique a resposta.
4. A que horas se verifica a temperatura máxima? E a temperatura mínima?

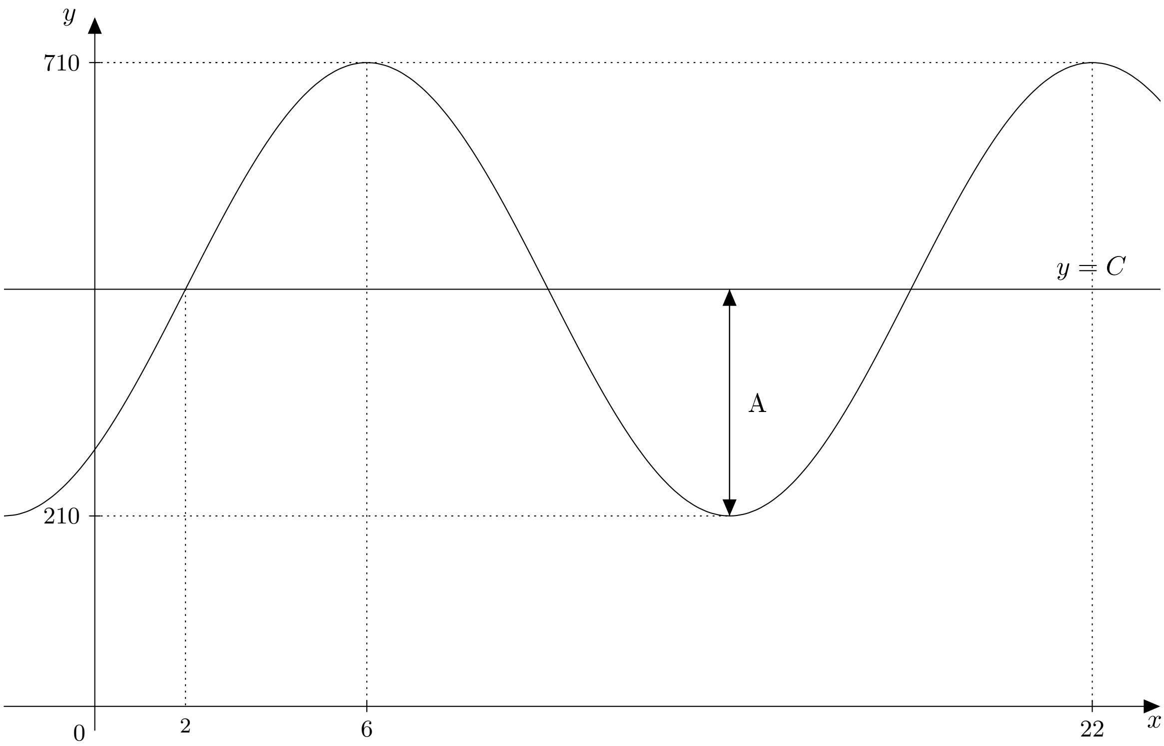
O exercício seguinte serviu de modelo aos restantes exercícios criados no âmbito desta dissertação.

Exercício E97I20 trigonometricasurf 001: pretende-se partindo de um gráfico, chegar à expressão analítica de um modelo do tipo $A\,\mathrm{sen}\,(\omega(x-\alpha))+C$.

A profundidade da água no local de surf favorito do Tiago varia de 210 a 710 cm dependendo da altura do dia.
Sabe-se que na quinta feira a maré alta ocorreu às 6 horas e a maré alta seguinte ocorreu às 22 horas.
Um modelo do tipo

$$f(x)=A\,\mathrm{sen}\,(\omega(x-\alpha))+C$$

descreve a profundidade da água como função do tempo x (em horas) na quinta feira.



1. Determine a amplitude A da onda e a ordenada da linha de base C.
2. Sabendo que a função seno é periódica de período 2π, determine o valor de ω.
3. Escreva a expressão de f utilizando os parâmetros determinados nas alíneas anteriores.
4. Indique uma hora a que tenha ocorrido maré baixa na quinta feira.
5. Indique a profundidade da água às 6 horas e 50 minutos na quinta feira. A maré estava a vazar ou a encher?

Exercício E97I20 CDcossenoquadrado 001: pretende-se calcular o contradomínio de uma função cujo cosseno está ao quadrado.

Determine o contradomínio da função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=8-\cos^2(-19\,x)$

Exercício E97I20 CDfquadrado 001: pretende-se calcular os extremos de funções trigonométricas que estejam elevadas ao quadrado.

> Determine o valor máximo e o valor mínimo de cada uma das expressões:
>
> 1. $-13\,\mathrm{sen}^2\left(-16\,x\right)-7$
> 2. $-8\cos^2\left(11x\right)$
> 3. $\dfrac{\cos^2(-5x)}{3}-19$

Exercício E97I20 Relacoestrig 001: pretende-se calcular o valor exato da tangente sabendo, o valor do cosseno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\cos a = \dfrac{5}{8}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\tan a$.

Exercício E97I20 Relacoestrig 002: pretende-se calcular o valor exato da tangente sabendo, o valor do cosseno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\cos a = \dfrac{3}{7}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determine $\tan a$.

Exercício E97I20 Relacoestrig 003: pretende-se calcular o valor exato do seno sabendo, o valor do cosseno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\cos a = -\dfrac{3}{7}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\mathrm{sen}\, a$.

Exercício E97I20 Relacoestrig 004: pretende-se calcular o valor exato do seno, sabendo o valor do cosseno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\cos a = -\dfrac{5}{9}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determine $\mathrm{sen}\, a$.

Exercício E97I20 Relacoestrig 005: pretende-se calcular o valor exato do cosseno e da tangente sabendo, o valor do seno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = -\dfrac{6}{7}$. Calcula:
>
> 1. $\cos\alpha$,
> 2. $\tan\alpha$.

Exercício E97I20 Relacoestrig 006: pretende-se calcular o valor exato do seno e da tangente sabendo, o valor do cosseno e os quadrantes em que se encontra o ângulo.

> Sabendo que $\alpha \in [0, \pi]$ e $\cos\alpha = \dfrac{2}{9}$. Calcula:
>
> 1. $\operatorname{sen}\alpha$,
> 2. $\tan\alpha$.

E97I20 ConversaoGrausRad 002: pretende-se converter a medida de ângulos em graus para radianos.

> Determina a medida do ângulo 883^o em radianos.

E97I20 ConversaoRadGraus 001: pretende-se converter a medida de ângulos em radianos para graus.

> Determina a medida do ângulo $\frac{92}{71}\pi$ em graus.

E97I20 Amplitudearco 001: pretende-se calcular a amplitude de um arco de circunferência sabendo o seu comprimento e o raio da circunferência.

> O raio de uma circunferência é igual a 4 cm. Qual é a amplitude, em radianos e em graus, de um arco da circunferência cujo comprimento é 24 cm? Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

E97I20 Comprimentoarcograu 001: pretende-se calcular o comprimento de um arco de circunferência sabendo a sua amplitude, em graus e o raio da circunferência.

> Considera uma circunferência de raio igual a 4 cm. Calcula o comprimento do arco da circunferência de amplitude 121^o. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

E97I20 Comprimentoarcorad 001: pretende-se calcular o comprimento de um arco de circunferência sabendo a sua amplitude, em radianos e o raio da circunferência.

> Considera uma circunferência de raio igual a 13 cm. Calcula o comprimento do arco da circunferência de amplitude $\frac{16}{9}\pi$. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

3.2.4 Aprendizagem e inovação

Inicialmente, tanto o LaTeX como o Python/Sage Mathematics eram linguagens totalmente desconhecidas da autora da dissertação, pelo que foi necessário fazer uma aprendizagem, quase de raiz. As dificuldades foram ultrapassadas recorrendo a manuais e também à análise de exercícios já realizados em outras áreas. Algumas das aprendizagens a registar, no que concerne à criação de exercícios com o LaTeX foram a utilização de \$...\$ sempre que era necessário escrever algo de matemática, assim como a utilização da \ sempre que antecedia um comando, por exemplo:

- `\begin{itemize}...\end{itemize}` e `\begin{enumerate}...\end{enumerate}` permite criar marcas e numeração no texto.
- `$\mathbb{R}$` escreve $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais e `\sqrt{...}` escreve a raiz quadrada de um número.
- `\frac{A}{B}` escreve a fração cujo numerador é A e o denominador é B.
- `$\le$`, `\vee`, `\in`, `\Leftrightarrow` e `\forall` escreve os símbolos $\leq$, $\vee$, $\in$, $\Leftrightarrow$ e $\forall$, respetivamente.
- `\alpha` e `\beta` letras gregras ou outros símbolos
- `\cos{...}`, `\sen{...}`, `\tan{...}` funções trigonométricas utilizadas.
- `\left\{` e `\right}` adapta à esquerda ou à direita o tamanho da {, assim como, de (e [.
- `\ifstrequal{variável}{toma o valor A}{texto P}{texto Q}` Se a variável toma o valor A escreve o texto P, senão escreve o texto Q.
- `\quad` e `\qquad`, cria um espaço pequeno ou médio entre as palavras, respetivamente.

No Python/Sage Mathematics as funções matemáticas, mais usadas foram:

- `min(A, B)` e `max(A, B)` devolve o mínimo e o máximo dos valores A e B.
- `ceil(A)`, `floor(A)`, `int(A)` e `round(A,2)` devolve os seguintes valores de A respetivamente, por excesso, por defeito, a parte inteira e um valor aproximado com 2 casas decimais.
- `sin( )`, `cos( )`, `tan( )`, `asin( )`, `acos( )` e `atan( )` calcula o valor das funções seno, cosseno e tangente, assim como, das funções inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente.

Na parte da programação apenas foram utilizados os comandos `if ... then ... else ...`.

Funções usadas do pacote MEGUA

- `ur.iunif(a, b)`: seleciona aleatoriamente um inteiro de a a b.
- `ur.iunif_nonset(a, b, [...])`: seleciona um inteiro de a a b com exceção dos valores em $[\ldots]$.
- `ur.squnif()`: seleciona aleatoriamente um racional duma lista predefinida.
- `variável@c{lista de palavras}` Se a variável for '0' devolve a primeira palavra da lista e assim sucessivamente

- substituição de expressões: por exemplo, se ocorre o valor $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$ então este é substítuido por $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

No desenvolvimento dos exercícios foi sugerido a seguinte função para o MEGUA: `s.ordered_set(lista)` que faz aparecer uma lista sob a forma de conjunto com $\{\ldots\}$ removendo as soluções em duplicado e ordenando-as.

Capítulo 4

Conclusões

O objetivo principal deste projeto foi construir recursos digitais de auxílio ao ensino das funções trigonométricas, criando materiais úteis para os professores, que desta forma poderiam partilhar conteúdos e saberes. Um exercício ao alcance de um click e já com resolução, este foi o desafio. Substituindo, desta forma os manuais entrando na era das novas tecnologias que tão benéficas se têm revelado no processo de ensino/aprendizagem, tornando-se facilitadoras da aprendizagem.

A possibilidade de uma resolução detalhada com muitos dos passos explicados e justificados, é um ótimo material de estudo para o aluno, assim como, um auxiliar precioso para o professor que pode, deste modo, obter exercícios diferentes para todos os alunos. Paralelamente, o professor deverá ter o cuidado de introduzir na resolução, alguns dos conceitos teóricos do tópico em estudo, já que os alunos não são muito entusiastas no que concerne à leitura de manuais escolares, daí que cabe ao professor ser inteligente o suficiente para contornar esta adversidade. Sabemos que os nossos alunos estão cada vez mais despertos para as novas tecnologias e disponibilizando estes recursos na internet, divulgando-os pelos alunos evitamos que eles naveguem aleatoriamente e utilizem alguma informação não adequada e frequentemente incorreta.

Maximizando o potencial desta ferramenta, será possível criar uma rede de partilha entre docentes, de todos os anos de escolaridade, podendo estes desenvolver conteúdos e colocá-los on-line numa plataforma de e-learning. Desta forma, os alunos podem ter acesso aos conteúdos de uma forma muito mais motivadora e desafiante.

Os exercícios criados, numa fase posterior estarão disponibilizados numa plataforma aberta a qualquer utilizador. A sua versatilidade permite um qualquer grau de exigência, bastando para isso uma escolha adequada dos parâmetros.

O estudo das funções parametrizadas é bastante delicado, porque valores específicos dos parâmetros conduzem a soluções diferentes, o que é visível, por exemplo na determinação dos zeros de funções que envolvem senos e cossenos. Na maior parte dos casos, os zeros repetem-se de $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{2}$ período, contudo, em casos particulares as funções apresentam um único zero num intervalo $[a, a+T]$, onde T é o período da função. Estas caraterísticas foram todas sintetizadas em quadros, para simplificar e tornar mais concisa a escrita. Num texto como este é difícil transcrever toda a complexidade do trabalho realizado.

No CD consta uma concretização completa (enunciado e resolução) de cada um dos exercícios criados.

Esta dissertação apresenta uma descrição dos procedimentos e métodos que nos levaram à construção desta base de dados de exercícios. Podendo servir de modelo para criações futuras.

No capítulo 2, sobre a descrição das funções trigonométricas foi usado o software *Geogebra*, versão 4.2, para traçar os gráficos, que foram depois exportados para LaTeX e por vezes, manipulados no próprio LaTeX. Uma das vantagens das concretizações em LaTeX é que permite a um utilizador alterar o texto, adaptando-o à sua forma de resolver o mesmo exercício sem precisar possuir conhecimentos de programação. Outra das vantagens da utilização deste software prende-se com a visualização de gráficos, também estes parametrizados. Como não se recorre a imagens, já que os gráficos são "escritos" em LaTeX os ficheiros são manipuláveis e bem suportados na internet; um ficheiro comum em LaTeX de um exercício com gráficos ocupa 40Kb no máximo e um pdf 200Kb.

Está no nosso horizonte complementar a base de dados de exercícios e criar uma *Wiki* sobre funções trigonométricas onde serão incluídos estes exercícios. Gostaríamos, futuramente de divulgar esta ferramenta junto da classe docente, para que fosse possível criar uma rede de colaboradores onde cada um contribuísse com diferentes conteúdos, para os diferentes anos letivos, para que fosse possível, desta forma cobrir todo o programa e metas curriculares do ensino da matemática.

Desenvolver este projeto foi um desafio a que me propus, e uma necessidade que senti enquanto docente para o meu enriquecimento pessoal e profissional. Esta foi a primeira vez que desenvolvi uma investigação com esta intensidade e duração. A tarefa que no início me parecia complicada e complexa, acabou por ser uma das mais interessantes e mais motivadora na minha carreira profissional.

Bibliografia

[Araújo, (2006)] Araújo, L., *Piagetrianos e vygotskianos: MITOs pedagógicos e práticas promissoras.* In N. Crato, Desastre no ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido (pp. 179-186). Lisboa: SPM/Gradiva.

[Bidarra, (2009)] Bidarra, J., *Aprendizagem Multimédia Interactiva.* In G. L. Miranda, Ensino Online e Aprendizagem Multimédia (pp. 352-353). Lisboa: Relógio D'água.

[Carvalho, (2008)] Carvalho, A., *Manual de Ferramentas da web 2.0 para professores.* Ministério da Educação.

[Coutinho & Lisbôa, (2011)] Coutinho, C., & Lisbôa, E., *Sociedade da informação, do conhecimento e da aprendizagem: desafios para educação no século XXI.* Revista de Educação Vol. XVIII, n.º 1 , 5-22.

[Coutinho, (2003)] Coutinho, M., *A Sociedade da informação e o determinismo tecnológico: notas para debate.*.

[Cruz, Oliveira, Seabra (2012)] Cruz, P., Oliveira, P., Seabra, D., *Pacote MEGUA.* `http://www.cms.ua.pt/megua`.

[DES, (1997 a)] DES., *Didática Ensino Secundário.* Lisboa: Ministério da Educação.

[DES,(1997 b)] DES., *Matemática Funções 10.º Ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação.

[DES, (1998)] DES., *Funções 11.º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação

[DES, (2001)] DES., *Matemática A 10.º ano.* Lisboa: Ministério da Educação.

[Domingos & Paula, (2011)] Domingos, A., & Paula, T., *A utilização de materiais eletrónicos e os manuais escolares.* Educação e Matemática n.º 114, 53-56.

[Duarte & Gomes, (2011)] Duarte, J., & Gomes, M., *Práticas com o Moodle em Portugal. VII Conferência internacional de TIC na Educação (pp. 871-880).* Braga: Universidade do Minho.

[Eliana, (2009)] Eliana Lisbôa, J. J., *Contributo do vídeo na Educação Online. Atas do X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia (pp. 5858-5868).* Braga: Universidade do Minho.

[Lisboa & Coutinho, (2009)] Lisboa, E., Junior, J., & Coutinho, C., *Avaliação de aprendizagens em ambientes online: o contributo das tecnologias web 2.0.*.

[Mathematical Subject Classification, (2013)] . Mathematical Subject Classification, *Mathematical Subject Classification* `http://www.ams.org/mathscinet/msc/`.

[Miranda, (2009)] . Miranda, G. L., *Ensino Online e Aprendizagem Multimédia.* Lisboa: Relógio D'água.

[Moran, (2005)] . Moran, J. M., *A Pedagogia e a Didática da Educação Online.* In R. V. Silva, & A. V. Silva, Educação, Aprendizagem e Tecnologia (pp. 69-70). Lisboa: Edições Sílabo.

[Morgado, (2005)] . Morgado, L., *Novos Papéis para o Professor/Tutor na Pedagogia Online.*

[Morgado, (2003)] . Morgado, L., *Os novos desafios do tutor a distância: O Regresso do Paradigma da sala de aula.*

[NCTM, (2007)] . NCTM., *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

[Negra & Martinho, (2011)] . Negra, C., & Martinho, E., *Matemática A 11.º ano.* Lisboa: Santillana Constância.

[Oliveira, (2004)] . Oliveira, L., *A comunicação educativa em ambientes virtuais: Um modelo de design de dispositivos para o ensino-aprendizagem na universidade.* Braga: Universidade do Minho.

[Paiva, (2011)] . Paiva, R., *Conteúdos didáticos multimédia, testes e exercícios de treino de Matemática online.*

[Atas do encontro da SPM Leiria, (2010)] . SPM, *Boletim especial da Sociedade Portuguesa de Matemática, pp. 119-123.*

[Papert, (1997)] . Papert, S., *A família em rede: ultrapassando a barreira digital entre gerações.* Lisboa: Relógio D'água.

[Ponte, (2003)] . Ponte, J., *O Ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade educativa O Ensino da Matemática Situação e Perspetivas, pp. 21-59.* Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

[Ponte, (1997)] . Ponte, J., *A família em rede: ultrapassando a barreira digital entre gerações (pp. 8-10).* Lisboa: Relógio D'água.

[Revista Discursos] . Revista Discursos, *Série Perspetivas em Educação n.º1, pp. 77-89.*

[Revista LÍBERO, Ano VI] . Revista LÍBERO, *Vol. 6 - n.º11 , pp. 83-93.*

[Richardson, (2006)] . Richardson, W., *Blogs, wikis, podcasts, and other powerful web tools for classrooms.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

[Santos, (2006)] . Sangwin, C. J., *A escola virtual na aprendizagem e no ensino da matemática: um estudo de caso no 12.º ano. Dissertação de mestrado.* Braga: Universidade do Minho.

[Educação, Aprendizagem e tecnologia] . Educação, Aprendizagem e tecnologia (pp. 98-103) Lisboa: Edições Sílabo.

[Silva, (2005)] . Silva, R. V., *Gestão da Aprendizagem e do Conhecimento.* In R. V. Silva, & A. V. Silva, Educação, Aprendizagem e Tecnologia pp. 44-45.Lisboa: Edições Sílabo.

[Souza, (2005)] . Souza, R. R., *Uma proposta Construtivista para a utilização de Tecnologias na Educação.* In R. V. Silva, & A. V. Silva, Educação, Aprendizagem e Tecnologia pp. 124-125. Lisboa: Edições Sílabo.

[Software Package] . Wikipedia: Software Package `http://en.wikipedia.org/wiki/Software_package`.

[Stein, (2012)] . Stein, William A. et al (2012) *Sage Mathematics Software (versão 5.8)* `http://www.sagemath.org`.

Anexo

Listagem dos exercícios criados

Apresentamos de seguida todos os exercícios criados com as várias componentes: sumário, enunciado do problema, resolução e a classe Python, assim como, uma concretização e respetiva resolução.

E97I20 trigonometricasurf 001

```
%SUMMARY  Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno
Traçar o gráfico e estudar a função seno aplicada a um problema de marés
E97I20 Mappings and functions. Também podia ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: função trigonométrica, seno

%PROBLEM Surf
A profundidade da água no local de surf favorito  do name1@c{"Rafael","André","Miguel",
"Paulo","Rui","Pedro","João","Tiago","Luís","Vasco","Guilherme"}
varia de $a11$ a $b1$ cm dependendo da altura do dia.

Sabe-se que week1@c{"na segunda feira","na terça feira","na quarta feira",
"na quinta feira","na sexta feira","no sábado","no domingo"} a maré alta ocorreu
j1@c{"à","às"} $h1$ j2@c{"hora","horas"} e a maré alta seguinte ocorreu às $h2$ horas.

Um modelo do tipo $$f(x)=A\sen{(\omega(x-\alpha))}+C$$
descreve a profundidade da água como função do tempo $x$ (em horas)
week1@c{"na segunda feira","na terça feira","na quarta feira","na quinta feira",
"na sexta feira","no sábado","no domingo"}.

\begin{center}
\definecolor{qqqqff}{rgb}{0,0,1}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,x=0.6cm,y=unit1@f{f}cm]
\draw[->,color=black] (abc1@f{f},0) -- (26,0); \foreach \x in {h1,h2}
\draw[shift={(\x,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {\footnotesize $\x$};
\draw[color=black] (25,-0.2) node [anchor=north west] {$ x$};
\draw[->,color=black] (0,-26.33) -- (0,b11); \foreach \y in {a11,b1}
\draw[shift={(0,\y)},color=black] (2pt,0pt) -- (-2pt,0pt) node[left]
{\footnotesize $\y$};
\draw[color=black] (-0.2,b11) node [left] {$ y$};
\draw[color=black] (0pt,-10pt) node[node0] {\footnotesize $0$};
```

```
\clip(abc1@f{f},-50) rectangle (26,b11);
\draw[smooth,samples=100,domain=abc1@f{f}:25.0]
plot(\x,{amp1*sin((w1@f{f}*((\x)-(t1@f{f})))*180/pi)+c1});
\draw[smooth,domain=abc1@f{f}:25.0] plot(\x,c1);
\draw [dotted] (t1@f{f},c1)-- (t1@f{f},0);
\draw [dotted] (h1,b1)-- (h1,0);
\draw [dotted] (0,b1)-- (h1,b1);
\draw [dotted] (h2,b1)-- (h2,0);
\draw [dotted] (0,b1)-- (h2,b1);
\draw [dotted] (0,a11)-- (hm1@f{f},a11);
\draw [->] (hm1@f{f},c1) -- (hm1@f{f},a11);
\draw [->] (hm1@f{f},a11) -- (hm1@f{f},c1);
\draw (hm1@f{f},med1@f{f}) node[anchor=north west] {$$ A $$};
\draw (23,c1) node[anchor=south west] {$ y=C $};
\begin{scriptsize}
\draw[color=black] (t1@f{f},-5) node[below] {$t1$};
\end{scriptsize}
\end{tikzpicture}
\end{center}

\begin{enumerate}
\item Determine a amplitude $A$ da onda e a ordenada da linha de base $C$.
\item Sabendo que a função seno é periódica de período $2\pi$, determine o valor de $\omega$.
\item Escreva a expressão de $f$ utilizando os parâmetros determinados nas alíneas anteriores.
\item Indique uma hora a que tenha ocorrido maré baixa week1@c{"na segunda feira","na terça feira",
"na quarta feira","na quinta feira","na sexta feira","no sábado","no domingo"}.
\item Indique a profundidade da água às $x1h$ horas e $x1m$ minutos
week1@c{"na segunda feira","na terça feira","na quarta feira","na quinta feira",
"na sexta feira","no sábado","no domingo"}. A maré estava a vazar ou a encher?
\end{enumerate}

%ANSWER
A função apresentada é uma sinusóide com máximo em $b1$ e mínimo em $a11$.
\begin{enumerate}

\item A amplitude $A$ da onda é dada por $\dfrac{b1-a11}{2}=amp1$
e a ordenada da linha de base $C$ é dada pela semisoma das ordenadas máxima e mínima,
C=\dfrac{a11+b1}{2}=c1$.
```

```
\item Sendo a função seno  periódica de período $2\pi$, observe-se que entre $h1$
e $h2$ decorreu precisamente um período da função $f$, ou seja
$$\omega(h1-\alpha)+2\pi=\omega(h2-\alpha)$$
Resolvendo esta equação em ordem a $\omega$ obtém-se $\displaystyle \omega=w1$.

\item Para determinar a expressão de $f$ falta ainda $\alpha$.
Observe-se que $f(\alpha)=c1$,
ou seja, $\alpha$ corresponde a um zero da função seno
e portanto, $\displaystyle \alpha=t1$. Pode agora escrever-se a expressão de $f$:
    $$f(x)=amp1 \sen{\left(w1\left(x-t1@()\right)\right)}+c1=f1$$

\item Facilmente se observa do gráfico que week1@c{"na segunda feira","na terça feira",
"na quarta feira","na quinta feira","na sexta feira","no sábado","no domingo"}
às $h121$ horas e $h122$ minutos estava  maré baixa.

\item Convertendo a hora dada a horas, temos  que $x1h$ horas e $x1m$ minutos
corresponde a $\displaystyle x11$ horas e basta calcular $\displaystyle
f\left(x11\right)$. Substituindo $x$ por $\displaystyle x11$ na expressão de $f$
obtém-se $$f\left(x11\right)=f11\approx f12 \mbox{ cm}$$
Às $x1h$ horas e $x1m$ minutos a maré estava tide1@c{"a vazar","a encher","vazia"}.
\end{enumerate}


class E97I20_trigonometricasurf_001(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
        t=var('t')

        s.name1=ur.iunif(0,10)
        s.week1=ur.iunif(0,6)
        s.j1=ur.iunif(0,1)
        s.j2=ur.iunif(0,1)
        s.tide1=ur.iunif(0,2)
        #a11 minimum height
        s.a1=ur.iunif(5,25)
```

```
    s.a11=s.a1*10
    s.i1=ur.iunif(2,5)
    s.i11=s.i1*100
    #b1 maximum height
    s.b1=s.a11+s.i11
    #amp1 wave amplitude
    s.amp1=s.i11/2
    #base line
    s.c1=(s.a11+s.b1)/2
    #time parameters
    s.h1=ur.iunif(1,8)
    s.s1=ur.iunif(12,16)
    s.h2=s.h1+s.s1
    s.t1=s.h1-s.s1/4
    s.abc11=s.t1-1
    #minimum x
    s.abc1=min(-2,s.abc11)

def solve(s):
    s.w1=2*pi/s.s1
    s.t1=s.h1-s.s1/4
    #in accordance to hours
    if s.h1==1:
        s.j1=0
        s.j2=0
    else:
        s.j1=1
        s.j2=1
    #graphics parameters
    #maximum height
    s.b11=s.b1+50
    s.hm1=(s.h1+s.h2)/2
    s.med1=(s.a11+s.c1)/2+20
    #y unit
    s.unit1=300/(s.amp1*100)
    #f
    s.f1=s.amp1*sin(s.w1*(x-s.t1))+s.c1
    #tide
```

```
s.h10=s.h1-s.s1
s.h11=s.h1-s.s1/2
s.h12=s.h1+s.s1/2
s.h121=int(s.h12)
s.h122=(s.h12-s.h121)*60
s.h13=s.h1+3*s.s1/2
s.h14=s.h1+2*s.s1
s.x1h=ur.iunif(1,23)
s.x1m1=ur.iunif(1,5)
s.x1m=s.x1m1*10
s.x11=s.x1h+s.x1m/60
s.f11=s.f1(x=s.x11)
s.f12=round(s.f11,2)
#high water/low water
if s.h10<s.x11<s.h11:
    s.tide1=0
elif s.x11==s.h11:
    s.tide1=2
elif s.h11<s.x11<s.h1:
    s.tide1=1
elif s.h1<s.x11<s.h12:
    s.tide1=0
elif s.x11==s.h12:
    s.tide1=2
elif s.h12<s.x11<s.h2:
    s.tide1=1
elif s.h12<s.x11<s.h13:
    s.tide1=0
elif s.x11==s.h12:
    s.tide1=2
elif s.h13<s.x11<s.h14:
    s.tide1=1
if s.t1<0:
    s.node0='right'
else:
    s.node0='left'
```

Enunciado:

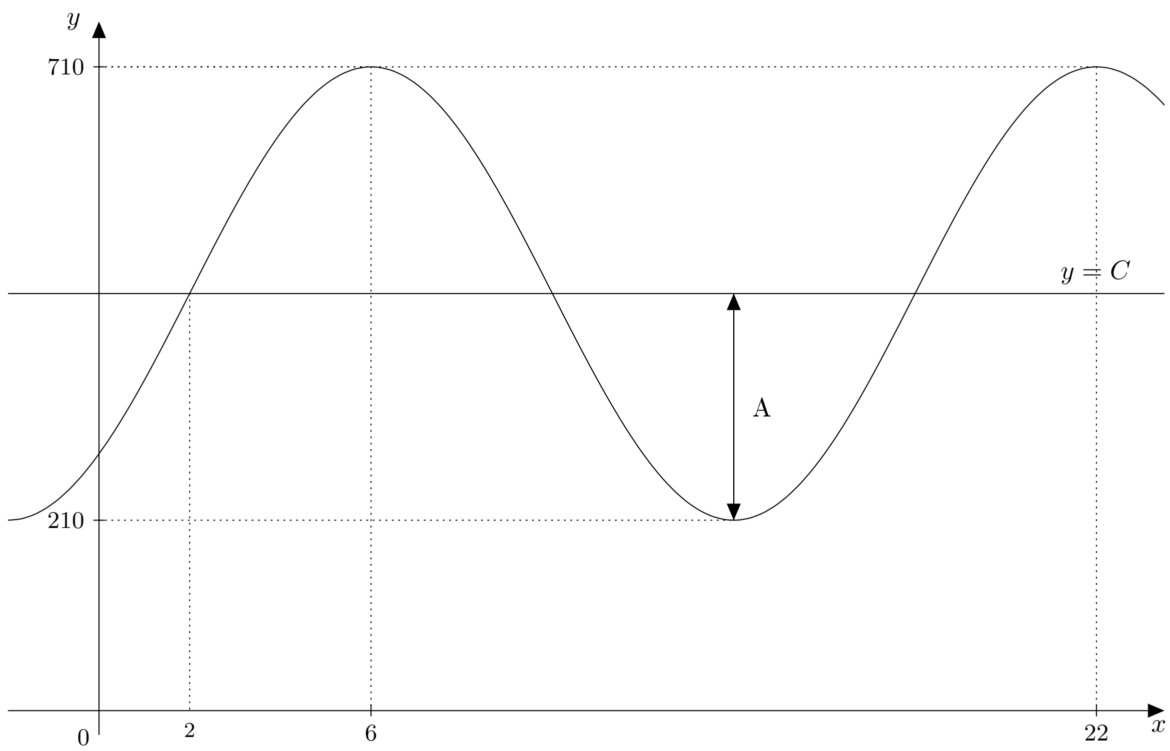
A profundidade da água no local de surf favorito do Tiago varia de 210 a 710 cm dependendo da altura do dia.

Sabe-se que na quinta feira a maré alta ocorreu às 6 horas e a maré alta seguinte ocorreu às 22 horas.

Um modelo do tipo

$$f(x) = A \operatorname{sen}(\omega(x-\alpha)) + C$$

descreve a profundidade da água como função do tempo x (em horas) na quinta feira.



1. Determine a amplitude A da onda e a ordenada da linha de base C.
2. Sabendo que a função seno é periódica de período 2π, determine o valor de ω.
3. Escreva a expressão de f utilizando os parâmetros determinados nas alíneas anteriores.
4. Indique uma hora a que tenha ocorrido maré baixa na quinta feira.
5. Indique a profundidade da água às 6 horas e 50 minutos na quinta feira. A maré estava a vazar ou a encher?

Proposta de resolução:

A função apresentada é uma sinusóide com máximo em 710 e mínimo em 210.

1. A amplitude A da onda é dada por $\dfrac{710-210}{2} = 250$ e a ordenada da linha de base C é dada pela

semisoma das ordenadas máxima e mínima, $C = \dfrac{210+710}{2} = 460.$

2. Sendo a função seno periódica de período 2π, observe-se que entre 6 e 22 decorreu precisamente um período da função f, ou seja
$$\omega(6-\alpha)+2\pi = \omega(22-\alpha)$$
Resolvendo esta equação em ordem a ω obtém-se $\omega = \dfrac{1}{8}\,\pi.$

3. Para determinar a expressão de f falta ainda α. Observe-se que $f(\alpha) = 460$, ou seja, α corresponde a um zero da função seno e portanto, $\alpha = 2$. Pode agora escrever-se a expressão de f:
$$f(x) = 250\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{8}\,\pi\,(x-2)\right) + 460 = 250\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{8}\,(x-2)\pi\right) + 460$$

4. Facilmente se observa do gráfico que na quinta feira és 14 horas e 0 minutos estava maré baixa.

5. Convertendo a hora dada a horas, temos que 6 horas e 50 minutos corresponde a $\dfrac{41}{6}$ horas e basta calcular $f\left(\dfrac{41}{6}\right)$. Substituindo x por $\dfrac{41}{6}$ na expressão de f obtém-se
$$f\left(\frac{41}{6}\right) = 250\ \mathrm{sen}\left(\frac{29}{48}\,\pi\right) + 460 \approx 696.73\ \mathrm{cm}$$
às 6 horas e 50 minutos a maré estava a vazar.

E97I20 cossenoproblema1 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno
Estudo da função cosseno
Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions

%PROBLEM
A função cosseno
Na ilha nilha, a temperatura verificada ao longo do primeiro dia do mês de Maio é dada,
em graus Celsius, pela expressão
$T(t)=a1+b1 \cos{\left[
\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]},$
sendo $t$ a hora do dia $(0< t <24)$.
\begin{enumerate}
\item Qual a temperatura às d1 horas?
```

```
\item A que horas do dia a temperatura foi de a1ºC?
\item Existe algum instante em que a temperatura é de exe1ºC? Justifique a resposta.
\item A que horas se verifica a temperatura máxima? E a temperatura mínima?
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item Para descobrir a temperatura às d1 horas, substituimos $t$ por d1, e vem
$$T(d1)=a1+b1 \times
\cos{\left[\left(
\displaystyle \frac{12-d1}{c1}\right) \pi \right]}=a1+b1 \times \cos{\left(\displaystyle z2
\pi\right)}=z1.$$
Às d1 horas a temperatura foi de z1ºC.

\item Comecemos por igualar a função a a1, isto é,
$$a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=a1
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=0.$$
O ângulo cujo cosseno é 0 é $\displaystyle \frac{\pi}{2}$, então vem que
$$\cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=
\cos \displaystyle \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$ $$\left(
\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi = \displaystyle \frac{\pi}{2}+k \pi
\Leftrightarrow \displaystyle \frac{12-t}{c1}= \displaystyle \frac{1}{2}+ k
\Leftrightarrow 12-t= c1 \times \left(\displaystyle \frac{1}{2}+ k \right)
\Leftrightarrow t= resol1 $$. Como $0 < t <24$, temos que
$$0 \leq \displaystyle resol1 <24$$
$$\displaystyle resol2 < \displaystyle resol4 k < \displaystyle resol3$$
$$\displaystyle mink1 < \displaystyle k < \displaystyle maxk1$$
Como $k$ é um número inteiro resulta que $k \in listk1$. Então a temperatura de a1ºC
foi atingida às $listt0$ horas.

\item Tal como foi feito no exercício 2, igualamos a função a exe1 e obtemos que
$$a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=exe1
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi
\right]}=\displaystyle \frac {exe1-a1}{b1} \Leftrightarrow \cos{\left[\left(
\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}= exe4.$$
Ora como a função cosseno é uma função que varia entre $-1$ e 1, e como o valor
 $\displaystyle exe4 >1$ concluímos assim, que não existiu nenhum instante em que
 a temperatura atingiu os exe1ºC.
```

```
\item Para determinar a temperatura máxima ou mínima temos que, calcular
o seu contradomínio da função. Consideremos a função $f(t)=\left(\displaystyle
 \frac{12-t}{c1}\right) \pi$. Como o $D_f=\mathbb{R}$ e o contradomínio da
função cosseno é $[-1,1]$, resulta que
$$-1 \le \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}\le 1$$
$$-b1 \le b1\cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}\le b1$$
$$a1-b1 \le a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi
\right]}\le a1+b1$$
então temos que $$min1 \le a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle
\frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]} \le ee1.$$
Ou seja, o contradomínio da função $T$ é o conjunto $CD=[min1,ee1]$,
o que nos leva a concluir que a temperatura máxima é de ee1ºC e a mínima de min1ºC.

Para saber a que horas se verificou a temperatura máxima, igualamos a função a ee1
e resolvemos.
$$a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=ee1
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=
\displaystyle \frac{ee1-a1}{b1}
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=1.$$
O ângulo cujo cosseno é 1 é $0$, então
$$\cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=\cos 0
\Leftrightarrow$$ $$\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi = 0+2k \pi
\Leftrightarrow \displaystyle \frac{12-t}{c1}= 2k \Leftrightarrow 12-t= c1 \times 2k
\Leftrightarrow -t = solu1 \Leftrightarrow t = solu2$$

Como $0 < t <24$, temos que $$0 < \displaystyle solu2 <24$$
$$\displaystyle -12 < \displaystyle solu3 < \displaystyle 12$$
$$\displaystyle mink4 < k < maxk4$$
Como $k$ é um número inteiro resulta que $k \in listk2$. Então a temperatura da
máxima, isto é, ee1ºC foi atingida às $listt1$ horas.
De modo análogo para saber a que horas se verificou a temperatura mínima,
igualamos a função a min1 e resolvemos.
$$a1+b1 \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=min1
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=
\displaystyle \frac{min1-a1}{b1}
\Leftrightarrow \cos{\left[\left(
\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=-1.$$
```

```
O ângulo cujo cosseno é $-1$ é $\pi$, então
$$\cos{\left[\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi \right]}=\cos \pi
\Leftrightarrow$$ $$\left(\displaystyle \frac{12-t}{c1}\right) \pi = \pi+2k \pi
\Leftrightarrow \displaystyle \frac{12-t}{c1}= 1+2k \Leftrightarrow 12-t= c1 \times (1+2k)
\Leftrightarrow -t = solu4 \Leftrightarrow t = solu5$$
Como $0 < t <24$, temos que $$0 < solu5 <24$$
$$ solu7 < solu3 < solu8$$ $$ mink6 < k < maxk6$$

Como $k$ é um número inteiro resulta que $k \in listk3$. Então a temperatura da mínima,
isto é, min1°C foi atingida às $listt2$ horas.
\end{enumerate}



class E97I20_cossenoproblema1_001(Exercise):

        def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ],
         ',')+ r'\right\}'

    def adjust_limits(s,minlim,maxlim):
        mink = ceil(minlim)
        if mink==minlim:
            mink=minlim+1
        maxk = floor(maxlim)
        if maxk==maxlim:
            maxk=maxlim-1
        #print mink,maxk
        return mink,maxk



    def make_random(s):

        t = var('t')
        k = var('k')

        listanomes = [u'Cleópatra', u'Vénus', u'Félix', 'Afrodite', 'Elxis',
        'Mat', 'Sol', 'Luna',
        'Ceuta', 'Canon', 'Xerox', 'Rodry']
```

```
    id = ZZ.random_element( len(listanomes) )

    s.nilha = listanomes[id]

    s.a1 = ur.iunif(8, 20)
    s.b1 = ur.iunif(2, 10)
    s.d1 = ur.iunif(1,23)
    s.c1 = ur.iunif_nonset(-7, 5, [0, -3])*2
    s.ee1 = s.b1+s.a1
    s.ee2 = 2*s.b1+s.a1
    s.exe1 = ur.iunif(s.ee1, s.ee2)

def solve(s):
    s.ee1 = s.b1+s.a1
    s.ee2 = 2*s.b1+s.a1
    s.x1 = (12-t)*pi/s.c1
    s.f1 = s.a1+s.b1*cos(s.x1)
    s.z0 = s.a1+s.b1*cos((12-s.d1)*pi/s.c1)
    s.z1 = round(s.z0,1)
    s.z2 = (12-s.d1)/s.c1
    s.resol0 = s.c1/2+s.c1*k
    s.resol1 = 12-s.resol0
    s.resol2 = -(12-s.c1/2)
    s.resol3 = (24+s.resol2)
    s.resol4 = -s.c1
    s.mink0 = s.resol2/s.resol4
    s.maxk0 = s.resol3/s.resol4
    s.mink1 = min(s.mink0, s.maxk0)
    s.maxk1 = max(s.mink0, s.maxk0)
    s.exe3 = s.exe1-s.a1
    s.exe4 = s.exe3/s.b1
    s.min1 = -s.b1+s.a1

    a,b = s.adjust_limits(s.mink1,s.maxk1)
    s.listk1 = s.ordered_set ( range(a,b+1) )
    s.listt0 = s.ordered_set ( [s.resol1(k=i) for i in range(a,b+1)] )
```

```
        s.solu1 = -12+s.c1*2*k
        s.solu2 = -s.solu1
        s.solu3 = s.solu2-12
        s.mink3 = -12/(-2*s.c1)
        s.maxk3 = -s.mink3
        s.mink4 = min(s.mink3, s.maxk3)
        s.maxk4 = max(s.mink3, s.maxk3)

        a,b = s.adjust_limits(s.mink4, s.maxk4)
        s.listk2 = s.ordered_set ( range(a, b+1 ) )#+1 por causa do range
        s.listt1 = s.ordered_set ([s.solu2(k=i) for i in range(a, b)])

        s.solu4 = -12+s.c1+s.c1*2*k
        s.solu5 = -s.solu4
        s.solu6 = 24-s.c1
        s.solu7 = (s.c1-12)
        s.solu8 = 24+s.solu7
        s.solu9 = -s.solu7/(2*s.c1)
        s.solu10 = -s.solu8/(2*s.c1)
        s.mink6 = min(s.solu9, s.solu10)
        s.maxk6 = max(s.solu9, s.solu10)
        s.mink7 = ceil(s.mink6)
        s.maxk7 = floor(s.maxk6)

        s.listk3 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.mink7, s.maxk7+1)])
        s.listt2 = s.ordered_set ([s.solu5(k=i) for i in xrange(s.mink7, s.maxk7+1)])



    def rewrite(self,text):
        """
        Derive this function and implement rewritting rules to change latex
        expressions for example.
        """
        #1/2 * sqrt(2)
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text
```

Enunciado:

Na ilha Rodry, a temperatura verificada ao longo do primeiro dia do mês de Maio é dada, em graus Celsius, pela expressão $T(t) = 15 + 5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right]$, sendo t a hora do dia $(0 < t < 24)$.

1. Qual a temperatura às 12 horas?
2. A que horas do dia a temperatura foi de 15°C?
3. Existe algum instante em que a temperatura é de 24°C? Justifique a resposta.
4. A que horas se verifica a temperatura máxima? E a temperatura mínima?

Proposta de resolução:

1. Para descobrir a temperatura às 12 horas, substituimos t por 12, e vem

$$T(12) = 15 + 5 \times \cos\left[\left(\frac{12-12}{-8}\right)\pi\right] = 15 + 5 \times \cos(0\pi) = 20.0.$$

   às 12 horas a temperatura foi de 20.0°C.

2. Comecemos por igualar a função a 15, isto é,

$$15 + 5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 15 \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 0.$$

   O ângulo cujo cosseno é 0 é $\frac{\pi}{2}$, então vem que

$$\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{12-t}{-8} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow 12 - t = -8 \times \left(\frac{1}{2} + k\right) \Leftrightarrow t = 8\,k + 16$$

   Como $0 < t < 24$, temos que

$$0 \leq 8\,k + 16 < 24$$

$$-16 < 8k < 8$$

$$-2 < k < 1$$

   Como k é um número inteiro resulta que $k \in \{-1, 0\}$. Então a temperatura de 15°C foi atingida és $\{8, 16\}$ horas.

3. Tal como foi feito no exercício 2, igualamos a função a 24 e obtemos que

$$15 + 5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 24 \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \frac{24-15}{5} \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \frac{9}{5}.$$

   Ora como a função cosseno é uma função que varia entre -1 e 1, e como o valor $\frac{9}{5} > 1$ concluímos assim, que não existiu nenhum instante em que a temperatura atingiu os 24°C.

4. Para determinar a temperatura máxima ou mínima temos que, calcular o seu contradomínio da função. Consideremos a função $f(t) = \left(\dfrac{12-t}{-8}\right)\pi$. Como o $D_f = \mathbb{R}$ e o contradomínio da função cosseno é $[-1,1]$, resulta que

$$-1 \leq \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] \leq 1$$

$$-5 \leq 5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] \leq 5$$

$$15-5 \leq 15+5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] \leq 15+5$$

então temos que

$$10 \leq 15+5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] \leq 20.$$

Ou seja, o contradomínio da função T é o conjunto $CD = [10,20]$, o que nos leva a concluir que a temperatura máxima é de 20ºC e a mínima de 10ºC.

Para saber a que horas se verificou a temperatura máxima, igualamos a função a 20 e resolvemos.

$$15+5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 20 \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \frac{20-15}{5} \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 1.$$

O ângulo cujo cosseno é 1 é 0, então

$$\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \cos 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi = 0+2k\pi \Leftrightarrow \frac{12-t}{-8} = 2k \Leftrightarrow 12-t = -8\times 2k \Leftrightarrow -t = -16\,k-12 \Leftrightarrow t = 16\,k+12$$

Como $0 < t < 24$, temos que

$$0 < 16\,k+12 < 24$$

$$-12 < 16\,k < 12$$

$$-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$$

Como k é um número inteiro resulta que $k \in \{0\}$. Então a temperatura de máxima, isto é, 20ºC foi atingida às $\{\}$ horas.

De modo análogo para saber a que horas se verificou a temperatura mínima, igualamos a função a 10 e resolvemos.

$$15+5\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = 10 \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \frac{10-15}{5} \Leftrightarrow \cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = -1.$$

O ângulo cujo cosseno é -1 é π, então

$$\cos\left[\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi\right] = \cos\pi \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{12-t}{-8}\right)\pi = \pi+2k\pi \Leftrightarrow \frac{12-t}{-8} = 1+2k \Leftrightarrow 12-t = -8\times(1+2k) \Leftrightarrow -t = -16\,k-20 \Leftrightarrow t = 16\,k+20$$

Como $0 < t < 24$, temos que

$$0 < 16\,k+20 < 24$$

$$-20 < 16\,k < 4$$

$$-\frac{5}{4} < k < \frac{1}{4}$$

Como k é um número inteiro resulta que $k \in \{-1, 0\}$. Então a temperatura de mínima, isto é, 10ºC foi atingida às $\{4, 20\}$ horas.

E97I20 senoproblema1 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno


97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função seno
Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

%PROBLEM A função seno
Na empresa nemp o volume mensal de vendas de um produto sazonal, em milhares de unidades,
segue ao longo do primeiro ano, o seguinte modelo matemático, $$S(t)=f1$$
em que t é o tempo em meses, correspondendo o mês de janeiro a $t=1$.
\begin{enumerate}
\item Indique o volume de vendas no mês de idmes@c{"janeiro", "fevereiro", "março","abril",
 "maio", "junho", "julho","agosto", "setembro", "outubro", "novembro", "dezembro"}.
\item Em que mês ou meses o volume de vendas é máximo? Indique o volume máximo.
\item Em que mês ou meses o volume de vendas é mínimo? Indique o volume mínimo.
\item Indique o mês ou meses em que o volume de vendas atingiu as vxx mil unidades.
\end{enumerate}



%ANSWER
\begin{enumerate}
\item Como o mês de vmes corresponde ao mês $t= nummes$, substituímos o valor de t por
nummes e obtemos $$S(nummes)=b1\sen\left(\frac {numerad1}{c1}\right)+a1 = b1\sen\left(f2\right)+a1
= b1\times f5+a1 = f4$$
No mês de vmes o volume de vendas foi de f4 milhares, ou seja, f6 unidades de produto.

\item Comecemos por descobrir qual é o contradomínio da função. O seno tem por contradomínio
$[-1,1]$, logo temos que $$-1 \le \sen{\left(x1\right)}\le 1,$$
```

```
multiplicando por $b1$ e juntando $a1$ temos que $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $S$ é o conjunto $CD_S=\left[min2,max2\right]$.\\
Para calcular o(s) mês(es) em que o volume de vendas foi máximo, igualamos a função ao
seu valor máximo, isto é, $$S(t)=max2 \Leftrightarrow f1=max2 \Leftrightarrow
b1\sen{\left(x1\right)}=max2-a1 \Leftrightarrow \sen\left(x1\right)=\frac{max3}{b1}
\Leftrightarrow \sen{\left(x1\right)}=1$$
O ângulo cujo seno é 1 é $ \displaystyle \frac{\pi}{2}$ então vem que
$$  \sen{\left(x1\right)}=\sen {\left( \frac{\pi}{2}\right)}
\Leftrightarrow x1=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \pi t=\frac{c1 \times \pi}{2}+c1
\times 2k\pi \Leftrightarrow t=resol1+resol2 k$$
\ifstrequal{resol1}{1}{
Este modelo aplica-se ao primeiro ano de vendas e neste caso os valores que $k$ pode
tomar são $\{0, 1,2\}$, então temos que o volume máximo de vendas de produto foi de
max4 unidades e ocorreu nos meses de janeiro, maio e setembro.
}{}
\ifstrequal{resol1}{2}{
Este modelo aplica-se ao primeiro ano de vendas e neste caso os valores que $k$ pode
tomar são $\{0, 1\}$, então temos que o volume máximo de vendas de produto foi de max4
unidades e ocorreu nos meses de fevereiro e outubro.
}{}
\ifstrequal{resol1}{3}{
Este modelo aplica-se ao primeiro ano de vendas e neste caso o valor que $k$ pode tomar
é apenas $\{0\}$, então temos que o volume máximo de vendas de produto foi de max4 unidades
e ocorreu no mês de março.
}{}
\ifstrequal{resol1}{\frac {3}{2}}{
Este modelo aplica-se ao primeiro ano de vendas e neste caso os valores que $k$ pode tomar
são $\{0, 1\}$, então temos que o volume máximo de vendas de produto foi de max4 unidades
e ocorreu em meados dos meses de fevereiro e agosto.
}{}

\item De modo análogo, igualamos a função ao seu mínimo e obtemos, $$S(t)=min2
\Leftrightarrow f1=min2 \Leftrightarrow b1\sen{\left(x1\right)}=min2-a1 \Leftrightarrow
\sen{\left(x1\right)}=\frac{min3}{b1}\Leftrightarrow \sen{\left(x1\right)}=-1$$
O ângulo cujo seno é $-1$ é $ \displaystyle \frac{3\pi}{2}$ então vem que
$$  \sen{\left(x1\right)}=\sen {\left( \frac{3\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow
x1=\frac{3\pi}{2}+2k\pi
\Leftrightarrow \pi t=\frac{c1 \times 3\pi}{2}+c1 \times 2k\pi \Leftrightarrow
```

```
t=resol3+resol2 k$$
\ifstrequal{resol3}{3}{
Ao longo do primeiro ano de vendas, os valores que $k$ pode tomar são $\{0, 1,2\}$,
então temos que o volume mínimo de vendas de produto foi de min4 unidades e ocorreu
nos meses de março, julho e novembro.
}{}
\ifstrequal{resol3}{6}{
Ao longo do primeiro ano de vendas, o valor que $k$ pode tomar é apenas $\{0\}$, então
temos que o volume mínimo de vendas de produto foi de min4 unidades e ocorreu no mês de junho.
}{}
\ifstrequal{resol3}{\frac {9}{2}}{
Ao longo do primeiro ano de vendas, os valores que $k$ pode tomar são $\{0, 1\}$,
então temos que o volume mínimo de vendas de produto foi de min4 unidades e ocorreu
em meados dos meses de maio e novembro.
}{}
\ifstrequal{resol3}{9}{
Ao longo do primeiro ano de vendas, o valor que $k$ pode tomar é apenas $\{0\}$, então
temos que o volume mínimo de vendas de produto foi de min4 unidades e ocorreu em meados
do mês de abril.
}{}

\item Comecemos por igualar a função a vxx, resolvendo vem que,
$$S(t)=vxx \Leftrightarrow f1 = vxx \Leftrightarrow b1\sen{\left(x1\right)}=vxx-a1
\Leftrightarrow \sen{\left(x1\right)}=\displaystyle \frac{z2}{b1}\Leftrightarrow
\sen{\left(x1\right)}=z3$$
\ifstrequal{z3}{1}{
Se repararmos, ao longo do primeiro ano, o volume de vendas de produto atingiu as vxx
mil unidades
\ifstrequal{resol1}{1}{nos meses de janeiro, maio e setembro,}{}
\ifstrequal{resol1}{2}{nos meses de fevereiro e outubro,}{}
\ifstrequal{resol1}{3}{no mês de março,}{}
\ifstrequal{resol1}{\frac {3}{2}}{em meados dos meses de fevereiro e agosto,}{}de acordo
como o exercício 2.}{}
\ifstrequal{z3}{\frac{1}{2}}{
O ângulo cujo seno é $\displaystyle \frac{1}{2}$ é $\displaystyle \frac{\pi}{6}$ então
temos que,
$$\sen{\left(x1\right)}=\sen {\left( \frac{\pi}{6}\right)}\Leftrightarrow $$
$$\Leftrightarrow x1=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad
```

```
x1=\left( \pi - \frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi t=\frac{c1\times\pi}{6}+c1\times 2k\pi \quad \vee \quad
\pi t=\frac{c1\times 5\pi}{6}+c1\times 2k\pi \Leftrightarrow$$
$$ t=resol4+resol2 k \quad \vee \quad t=resol5+resol2 k$$
\ifstrequal{resol2}{4}{
Atribuindo valores ao $k$, tendo em conta apenas o primeiro ano de vendas,
concluímos que volume de vendas do produto atingiu as vxx mil unidades em meados dos
meses de janeiro, fevereiro, maio, junho, setembro e outubro.
}{}
\ifstrequal{resol2}{6}{
Atribuindo valores ao $k$, tendo em conta apenas o primeiro ano de vendas, concluímos
que volume de vendas do produto atingiu as vxx mil unidades em meados dos meses de janeiro,
 março, julho e setembro.
}{}
\ifstrequal{resol2}{8}{
Atribuindo valores ao $k$, tendo em conta apenas o primeiro ano de vendas, concluímos que
volume de vendas do produto atingiu as vxx mil unidades em meados dos meses de janeiro,
abril, setembro e dezembro.
}{}
\ifstrequal{resol2}{12}{
Atribuindo valores ao $k$, tendo em conta apenas o primeiro ano de vendas, concluímos
que volume de vendas do produto atingiu as vxx mil unidades em meados dos meses
de janeiro e maio.}{}
}{}
\end{enumerate}


class E97I20_senoproblema1_001(Exercise):

    def make_random(s):

        t = var('t')
        s.listames1=['janeiro', 'fevereiro', 'março', 'abril', 'maio', 'junho', 'julho',
                     'agosto', 'setembro', 'outubro', 'novembro', 'dezembro']

        listanomes = ['Kais', 'Oliveira', 'Mendes', u'Félix', 'Campos', 'Vieira',
        u'Gonçalves', 'Teles', 'Meireles', 'Oliveirinha', 'Costa', 'Pacheco', 'Sousa',
        'Marques', 'Freitas', 'Rocha']
```

```
    id = ZZ.random_element( len(listanomes) )

    s.nemp = listanomes[id]
    s.idmes = ZZ.random_element(12)
    s.denominadorf1 = [2, 3, 4, 6]
    s.idden = ZZ.random_element( len(s.denominadorf1) )

    s.b1 = ur.iunif(1, 35)*2
    s.k1 = ur.iunif(2,30)
    s.k2 = ur.iunif(2,30)
    s.a1 = s.b1+s.k1
    s.v1 = s.b1/2+s.a1
    s.v2 = s.b1+s.a1
    listvend = [s.v1, s.v2]
    id1 = ZZ.random_element( len(listvend) )
    s.vxx = listvend[id1]


def solve(s):
    s.vmes = s.listames1[s.idmes]
    s.c1 = s.denominadorf1[s.idden]
    s.x1 = t*pi/s.c1
    s.f1 = s.a1+s.b1*sin(s.x1)
    s.z2 = s.vxx-s.a1
    s.z3 = s.z2/s.b1
    s.nummes = s.idmes + 1
    s.f2 = s.nummes*pi/s.c1
    s.f3 = s.a1+s.b1*sin(s.f2)
    s.f4 = round(s.f3,3)
    s.f5 = sin(s.f2)
    s.f6 = int(s.f4*1000)
    s.numerad1 = s.nummes*pi
    s.min1 = -s.b1
    s.max1 = s.b1
    s.min2 = s.min1+s.a1
    s.max2 = s.max1+s.a1
    s.max3 = s.max2-s.a1
```

```
        s.resol1 = s.c1/2
        s.resol2 = 2*s.c1
        s.max4 = s.max2 * 1000
        s.min3 = s.min2-s.a1
        s.resol3 = 3*s.c1/2
        s.min4 = s.min2 * 1000
        s.resol4 = s.c1/6
        s.resol5 = s.c1*5/6

    def rewrite(self,text):
        """
        Derive this function and implement rewritting rules to change latex expressions
        for example.
        """
        #1/2 * sqrt(2)
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text
```

Enunciado:

Na empresa Oliveira o volume mensal de vendas de um produto sazonal, em milhares de unidades, segue ao longo do primeiro ano, o seguinte modelo matemático,

$$S(t) = 10 \text{ sen}\left(\frac{1}{6}\,\pi t\right) + 25$$

em que t é o tempo em meses, correspondendo o mês de janeiro a $t = 1$.

1. Indique o volume de vendas no mês de maio.
2. Em que mês ou meses o volume de vendas é máximo? Indique o volume máximo.
3. Em que mês ou meses o volume de vendas é mínimo? Indique o volume mínimo.
4. Indique o mês ou meses em que o volume de vendas atingiu as 35 mil unidades.

Proposta de resolução:

1. Como o mês de maio corresponde ao mês $t = 5$, substituímos o valor de t por 5 e obtemos

$$S(5) = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{5\,\pi}{6}\right) + 25 = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) + 25 = 10 \times \frac{1}{2} + 25 = 30.0$$

   No mês de maio o volume de vendas foi de 30.0 milhares, ou seja, 30000 unidades de produto.

2. Comecemos por descobrir qual é o contradomínio da função. O seno tem por contradomínio $[-1, 1]$, logo temos que
$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) \leq 1,$$
multiplicando por 10 e juntando 25 temos que
$$15 \leq 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 25 \leq 35$$
Ou seja, o contradomínio da função S é o conjunto $CD_S = [15, 35]$.

   Para calcular o(s) mês(es) em que o volume de vendas foi máximo, igualamos a função ao seu valor máximo, isto é,
$$S(t) = 35 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 25 = 35 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 35 - 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 1$$
O ângulo cujo seno é 1 é $\frac{\pi}{2}$ então vem que
$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{6}\pi t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \pi t = \frac{6 \times \pi}{2} + 6 \times 2k\pi \Leftrightarrow t = 3 + 12k$$
Este modelo aplica-se ao primeiro ano de vendas e neste caso o valor que k pode tomar é apenas $\{0\}$, então temos que o volume máximo de vendas de produto foi de 35000 unidades e ocorreu no mês de março.

3. De modo análogo, igualamos a função ao seu mínimo e obtemos,
$$S(t) = 15 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 25 = 15 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 15 - 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = \frac{-10}{10} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = -1$$
O ângulo cujo seno é -1 é $\frac{3\pi}{2}$ então vem que
$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{6}\pi t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \pi t = \frac{6 \times 3\pi}{2} + 6 \times 2k\pi \Leftrightarrow t = 9 + 12k$$
Ao longo do primeiro ano de vendas, o valor que k pode tomar é apenas $\{0\}$, então temos que o volume mínimo de vendas de produto foi de 15000 unidades e ocorreu em meados do mês de abril.

4. Comecemos por igualar a função a 35, resolvendo vem que,
$$S(t) = 35 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 25 = 35 \Leftrightarrow 10 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 35 - 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 1$$
Se repararmos, ao longo do primeiro ano, o volume de vendas de produto atingiu as 35 mil unidades no mês de março, de acordo como o exercício 2.

E97I20 CDcossenoquadrado 001

%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

estudo da função cosseno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno

%PROBLEM A função cosseno

Determine o contradomínio da funçãof definida em $\mathbb{R}$ por

$f(x)= a1-\cos^{2}{(b1x)}$

%ANSWER

Como $(b1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$. Sabemos que o contradomínio da função

cosseno é $[-1,1]$, mas atenção pois neste caso a função cosseno está ao quadrado então,

vem que

$$0 \le \cos^{2}{(b1x)} \le 1$$

$$-1 \le -\cos^{2}{(b1x)} \le 0$$

$$minf \le a1-\cos^{2}{(b1x)} \le maxf$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f=[minf, maxf]$

```
class E97I20_CDcossenoquadrado_001(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x

    def solve(s):

        s.min0 = s.a1-1
```

```
s.minf = min(s.min0, s.a1)
s.maxf = max(s.min0, s.a1)
```

Enunciado:

Determine o contradomínio da funçãof definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 8 - \cos^2(-19\,x)$

Proposta de resolução:

Como $(-19\,x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$. Sabemos que o contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$, mas atenção pois neste caso a função cosseno está ao quadrado então, vem que

$$0 \leq \cos^2(-19\,x) \leq 1$$

$$-1 \leq -\cos^2(-19\,x) \leq 0$$

$$7 \leq 8 - \cos^2(-19\,x) \leq 8$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [7, 8]$.

E97I20 CDfquadrado 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno; Função seno


97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Extremos das funções cosseno e seno
Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno

%PROBLEM A função cosseno e seno

Determine o valor máximo e o valor mínimo de cada uma das expressões:
\begin{enumerate}
\item $h1\sen^{2}{(a1x)}-b1$
\item $c1 \cos^{2}{(d1x)}$
\item $\displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1}-g1$
\end{enumerate}

%ANSWER
\center{Sabemos que, tanto o contradomínio da função seno como o da função cosseno
```

```
é $[-1, 1]$.}
\begin{enumerate}
\item $h1\sen^{2}{(a1x)}-b1$ \\
Vejamos que, a função seno está ao quadrado e $(a1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$,
então
$$0 \le \sen^{2}{(a1x)} \le 1$$
$$aux1 \le h1\sen^{2}{(a1x)} \le aux2$$
$$minf1 \le h1\sen^{2}{(a1x)}-b1 \le maxf1$$
Logo $minf1$ é o valor mínimo e $maxf1$ o valor máximo da função.

\item $c1 \cos^{2}{(d1x)}$ \\
Tal como no exercício anterior, temos que
$$0 \le \cos^{2}{(d1x)} \le 1$$
$$minf2 \le c1\cos^{2}{(d1x)} \le maxf2$$
Então $minf2$ e $maxf2$ são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente da função.

\item $\displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1}-g1$ \\
De modo análogo, vem que
$$0 \le \cos^{2}{(e1 x)} \le 1$$
$$0 \le \displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1} \le aux3$$
$$minf3 \le \displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1}-g1 \le maxf3$$
O valor $\displaystyle minf3$ é o valor mínimo e o valor $\displaystyle maxf3$ é o
valor máximo
\end{enumerate}

class E97I20_CDfquadrado_001(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif(1, 20)
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0, 1])
        s.d1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.e1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.f1 = ur.iunif(2, 9)
        s.g1 = ur.iunif(1, 20)
        s.h1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0, 1])
```

```
    s.a1x=s.a1*x

def solve(s):

    s.aux1 = min (s.h1, 0)
    s.aux2 = max (s.h1, 0)
    s.minf1 = s.aux1-s.b1
    s.maxf1 = s.aux2-s.b1
    s.minf2 = min (s.c1, 0)
    s.maxf2 = max (s.c1, 0)
    s.aux3 = 1/s.f1
    s.minf3 = min (s.aux3-s.g1, 0)
    s.maxf3 = max (s.aux3-s.g1, 0)
```

Enunciado:

Determine o valor máximo e o valor mínimo de cada uma das expressões:

1. $-13\,\text{sen}^2\,(-16\,x) - 7$
2. $-8\cos^2\,(11x)$
3. $\dfrac{\cos^2(-5x)}{3} - 19$

Proposta de resolução:

Sabemos que, tanto o contradomínio da função seno como o da função cosseno é $[-1, 1]$.

1. $-13\,\text{sen}^2\,(-16\,x) - 7$

   Vejamos que, a função seno está ao quadrado e $(-16\,x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, então

   $$0 \leq \text{sen}^2\,(-16\,x) \leq 1$$

   $$-13 \leq -13\,\text{sen}^2\,(-16\,x) \leq 0$$

   $$-20 \leq -13\,\text{sen}^2\,(-16\,x) - 7 \leq -7$$

   Logo -20 é o valor mínimo e -7 o valor máximo da função.

2. $-8\cos^2\,(11x)$

   Tal como no exercício anterior, temos que

   $$0 \leq \cos^2\,(11x) \leq 1$$

$$-8 \leq -8\cos^2(11x) \leq 0$$

Então -8 e 0 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente da função.

3. $\dfrac{\cos^2(-5x)}{3} - 19$

De modo análogo, vem que

$$0 \leq \cos^2(-5x) \leq 1$$
$$0 \leq \frac{\cos^2(-5x)}{3} \leq \frac{1}{3}$$
$$-\frac{56}{3} \leq \frac{\cos^2(-5x)}{3} - 19 \leq 0$$

O valor $-\dfrac{56}{3}$ é o valor mínimo e o valor 0 é o valor máximo.

E97I20 senocos 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno;Função seno


97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Funções cosseno e seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno


%PROBLEM A função cosseno e seno


Seja $f$ a função definida por $\sen^{2}(a1x)+f1.$

\begin{enumerate}

\item Calcule $f(-x)$. O que pode concluir sobre a paridade da função $f$?

\item Indique, justificando, o valor exato de $f \left( \displaystyle aux1 \right)

- f \left( \displaystyle aux2\right).$

\item Determine os valores de $x$ tais que: $x \in [- \pi, \pi[ \quad \wedge \quad

f(x)= c1+\cos(b1x)$.

\end{enumerate}


%ANSWER


\begin{enumerate}

\item Calculemos $f(-x)$, isto é $f(-x)= \sen^{2}(-a1x)+f2$\\

E como $\cos(-x)=\cos(x)$, pois a função cosseno é uma função par, resulta que \\

$$f(-x)=(-\sen (a1x))^{2}+f1 = \sen^{2}(a1x)+f1 = f(x)$$
```

```
Logo, a função$f$ é uma função par.

\item Comecemos por substituir $x$ por $\displaystyle aux1$ e obtemos \\
\ifstrequal{c2}{0}{
$$f\left( \displaystyle aux1\right)=\sen^{2}\left(a1 \times \displaystyle  aux1\right)+
 \cos\left(b1 \times \displaystyle  aux1\right)-c3 = \sen^{2}\left(\displaystyle
 aux3\right)+ \cos\left(\displaystyle  aux4\right)-c3 = \displaystyle aux5 $$
}{}
\ifstrequal{c2}{1}{
$$f\left( \displaystyle aux1\right)=\sen^{2}\left(a1 \times \displaystyle
aux1\right)+ \cos\left(b1 \times \displaystyle  aux1\right)+c3 =
\sen^{2}\left(\displaystyle  aux3\right)+ \cos\left(\displaystyle  aux4\right)+c3 =
\displaystyle aux5 $$
}{}
De igual modo, substituimos $x$ por $\displaystyle aux2$ \\
\ifstrequal{c2}{0}{
$$f\left( \displaystyle aux2\right)=\sen^{2}\left(a1 \times \displaystyle  aux2\right)+
 \cos\left(b1 \times \displaystyle  aux2\right)-c3 = \sen^{2}\left(\displaystyle
 aux6\right)+ \cos\left(\displaystyle  aux7\right)-c3 = \displaystyle aux8 $$
}{}
\ifstrequal{c2}{1}{
$$f\left( \displaystyle aux2\right)=\sen^{2}\left(a1 \times \displaystyle  aux2\right)+
 \cos\left(b1 \times \displaystyle  aux2\right)+c3 = \sen^{2}\left(\displaystyle
 aux6\right)+ \cos\left(\displaystyle  aux7\right)+c3 = \displaystyle aux8 $$
}{}
Em suma $f \left( \displaystyle aux1 \right) - f \left( \displaystyle aux2 \right)=$  \\
$\left(\displaystyle aux5 \right)-\left(\displaystyle aux8 \right)=
\displaystyle
aux9$

\item Resolvamos a equação $f(x)= c1+\cos(b1x)$.
$$\sen^{2}(a1x)+f1=c1+\cos(b1x) \Leftrightarrow \sen^{2}(a1x)=0 \Leftrightarrow
\sen(a1x)=0$$
O ângulo cujo seno é 0 é 0, então
$$\sen(a1x)=\sen 0 \Leftrightarrow a1x = 0+ k \pi \Leftrightarrow
x = \displaystyle \frac {k \pi}{a1}$$
Como $x \in [- \pi, \pi[$, vem que
$$ -\pi \le \displaystyle \frac {k \pi}{a1} < \pi$$ $$ -a1 \le k < a1.$$
```

```
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listk$$.
Os valores de $x$ são atingidos em $$list1$$.

class E97I20_senocos_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
        r'\right\}'

    def make_random(s):
        x = var('x')
        k = var('k')

        s.c1 = ur.iunif_nonset(-10, 10, [0])
        s.e1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
        s.k1 = ur.iunif(1, 2)
        s.k2 = ur.iunif(1, 2)
        s.d1 = ur.iunif(2, 4)
        s.a1 = s.k1*s.d1
        s.b1 = s.k2*s.d1
        s.z1 = lcm(s.a1, s.b1)



    def solve(s):

        s.aux1 = pi/s.z1
        s.aux2 = s.e1*pi/s.z1
        s.f1 = cos(s.b1*x)+s.c1
        s.f2 = cos(-s.b1*x)+s.c1
        if s.c1> 0:
            s.c2 = 1
        else:
            s.c2 = 0
        s.c3 = abs(s.c1)
        s.aux3 = s.a1*s.aux1
        s.aux4 = s.b1*s.aux1
        s.aux5 = (sin(s.aux3))**2+cos(s.aux4)+s.c1
        s.aux6 = s.a1*s.aux2
```

```
        s.aux7 = s.b1*s.aux2
        s.aux8 = (sin(s.aux6))**2+cos(s.aux7)+s.c1
        s.aux9 = s.aux5-s.aux8
        s.aux0 = k*pi/s.a1

        s.listk = s.ordered_set ([i for i in xrange (-s.a1, s.a1)])
        s.list1 =  s.ordered_set ( [s.aux0(i) for i in xrange (-s.a1, s.a1)])

    def rewrite(self,text):
        """
        Derive this function and implement rewritting rules to change latex
        expressions for example.
        """

        #1/2 * sqrt(2)
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text
```

Enunciado:

Seja f a função definida por $\operatorname{sen}^2(4x) + \cos(4\,x) + 2$.

1. Calcule $f(-x)$. O que pode concluir sobre a paridade da função f?
2. Indique, justificando, o valor exato de $f\left(\frac{1}{4}\,\pi\right) - f\,(\pi)$.
3. Determine os valores de x tais que: $x \in [-\pi, \pi[\quad \wedge \quad f(x) = 2 + \cos(4x)$.

Proposta de resolução:

1. Calculemos $f(-x)$, isto é $f(-x) = \operatorname{sen}^2(-4x) + \cos(-4\,x) + 2$

   E como $\cos(-x) = \cos(x)$, pois a função cosseno é uma função par, resulta que

   $$f(-x) = (-\operatorname{sen}(4x))^2 + \cos(4\,x) + 2 = \operatorname{sen}^2(4x) + \cos(4\,x) + 2 = f(x)$$

   Logo, a função f é uma função par.

2. Comecemos por substituir x por $\frac{1}{4}\,\pi$ e obtemos

   $$f\left(\frac{1}{4}\,\pi\right) = \operatorname{sen}^2\left(4 \times \frac{1}{4}\,\pi\right) + \cos\left(4 \times \frac{1}{4}\,\pi\right) + 2 = \operatorname{sen}^2(\pi) + \cos(\pi) + 2 = 1$$

De igual modo, substituimos x por π

$$f\left(\pi\right) = \operatorname{sen}^2\left(4 \times \pi\right) + \cos\left(4 \times \pi\right) + 2 = \operatorname{sen}^2\left(4\,\pi\right) + \cos\left(4\,\pi\right) + 2 = 3$$

Em suma $f\left(\frac{1}{4}\,\pi\right) - f\left(\pi\right) = (1) - (3) = -2$

3. Resolvamos a equação $f(x) = 2 + \cos(4x)$.

$$\operatorname{sen}^2(4x) + \cos\left(4\,x\right) + 2 = 2 + \cos(4x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(4x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(4x) = 0$$

O ângulo cujo seno é 0 é 0, então

$$\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow 4x = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

Como $x \in [-\pi, \pi[$, vem que

$$-\pi \leq \frac{k\pi}{4} < \pi$$

$$-4 \leq k < 4.$$

Como k é um número inteiro,

$$k \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Os valores de x são atingidos em

$$\left\{-\pi, -\frac{3}{4}\,\pi, -\frac{1}{2}\,\pi, -\frac{1}{4}\,\pi, 0, \frac{1}{4}\,\pi, \frac{1}{2}\,\pi, \frac{3}{4}\,\pi\right\}$$

E97I20 cossenofuncao 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função cosseno
Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno

%PROBLEM A função cosseno
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
```

```
\item Indique o seu período.
\item Estude a paridade da função.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função cosseno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio
da função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função cosseno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \cos{(x1)}\le 1$$
então multiplicando por $a1,$ obtemos $$min1 \le f2 \le max1$$
e juntando $d1,$ vem que $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função cosseno é uma função periódica de período $2\pi$. O coeficiente
de $x$ é $b1$, então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle
\frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Para estudar a paridade da função calculamos $f(-x)$, e neste caso vem que
 $$f(-x)= f1paridade$$\\
calculemos ainda $-f(x)$, e obtemos $-f(x)=-(f1)=f2paridade$\\
Agora temos as seguintes possibilidades:\\
- Se $f(-x)=f(x), \forall x\in D_f$, isto é, igual à própria função, a função
é uma função par;\\
- Se $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função
é uma função ímpar.\\
Neste caso como $f(-x)$ duvid1@c{"é","é","não é"} igual duvid1@c{"à própria função",
"ao simétrico da função","nem à função nem à sua simétrica"} então a função
duvid1@c{"é uma função par","é uma função ímpar","nem é uma função par nem ímpar"}.\\

\item Os zeros da função são os valores de $x$ que são soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \cos{(x1)}=e1.$$
Sabemos que $$\cos{(x)} = \cos{(\alpha)}$$
$$x=\alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x=-\alpha + 2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$
e que o ângulo cujo cosseno é $e1$ é o ângulo $(\left x2\right)$. Então vem que
```

```
$$\cos{(x1)}=\cos {\left(x2\right)}$$
Logo $$x1=x2+2k\pi \quad \vee \quad x1=x3+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=contas1\quad \vee \quad b2=contas2\Leftrightarrow $$
$$\Leftrightarrow x=x8\quad \vee \quad x=x9.$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad \vee \quad zero2 \le x6 \le
zero3 \Leftrightarrow$$ $$ \Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad \vee \quad zero22
\le k \le zero33 \Leftrightarrow$$ Assim, como $k$ é um número inteiro,
$$k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são,
 portanto, $$listz$$

\item Como o máximo da função é $max2$, basta resolver a equação $f(x)=max2$
para determinar as abcissas dos pontos onde $f$ atinge o seu máximo.
$$ f(x)=max2 \Leftrightarrow f1=max2 \Leftrightarrow f2=maxf \Leftrightarrow
\cos{(x1)}=maxff \Leftrightarrow $$
$$ \cos{(x1)}= \cos {(maxixiz0)} \Leftrightarrow x1=maximiz0 \Leftrightarrow
b2=maximiz1 \Leftrightarrow x=maximiz2 $$
Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$,
ou seja, $$ 0 \le maximiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow maxx0 \le k \le maxx1$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkk.$$
Os pontos onde a função $f$ atinge o seu máximo em $[0,2\pi]$ são: $$listmaxx$$

\item Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a
equação $$f(x)=min2$$ ou seja, $$f1=min2 \Leftrightarrow f2=minf \Leftrightarrow
\cos{(x1)}=minff \Leftrightarrow $$
$$ \cos{(x1)}= \cos {(minixiz0)} \Leftrightarrow x1=minimiz0 \Leftrightarrow
b2=minimiz1 \Leftrightarrow x=minimiz2 $$
Como pretendemos os valores onde $f$ atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$,
$$ 0 \le minimiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow minx0 \le k \le minx1$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkkk.$$
O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa: $$listminx$$
\end{enumerate}

class E97I20_cossenofuncao_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
```

```
     return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
     r'\right\}'

def make_random(s):
    x=var('x')
    k=var('k')

    lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)),
    (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)), (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)),
    (-2, -sqrt(2))]
    id=ZZ.random_element(len(lista1))

    s.a1, s.d1 = lista1[id]
    s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
    s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
    s.x1 = s.b1*x+s.c1
    s.f1 = s.a1*cos(s.x1)+s.d1
    s.f1paridade = s.a1*cos(s.b1*(-x)+s.c1)+s.d1
    s.f2paridade = -(s.a1*cos(s.x1)+s.d1)

def solve(s):
    s.per1 = abs(s.b1)
    s.per2 = 2*pi/s.per1

    if s.f1paridade == s.f1:
        s.duvid1 = 0
    elif s.f2paridade == s.f1paridade:
        s.duvid1 = 1
    else:
        s.duvid1 = 2

    s.max1 = abs(s.a1)
    s.min1 = -s.max1
    s.max2 = s.max1+s.d1
    s.min2 = s.min1+s.d1
    s.f2 = s.a1*cos(s.x1)
    s.e1 = -s.d1/s.a1
    s.x2 = acos (s.e1)
```

```
s.d2 = -s.d1
s.x3 = -s.x2
s.c11 = -s.c1
s.b2 = s.b1*x
s.contas1 = s.x2+s.c11+2*k*pi
s.contas2 = s.x3+s.c11+2*k*pi
s.x4 = s.x2/s.b1
s.x5 = s.c11/s.b1
s.x6 = 2*k*pi/s.b1
s.x7 = s.x3/s.b1
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
s.zero2 = -s.x7-s.x5
s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
if s.zero11<0:
    s.zero12 = int(s.zero11)-1
else:
    s.zero12 = int(s.zero11)
if s.zero22>0:
    s.zero21 = int(s.zero22)+1
else:
    s.zero21 = int(s.zero22)
if s.zero33<0:
    s.zero34 = int(s.zero33)-1
```

```
else:
    s.zero34 = int(s.zero33)

s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(k=i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)]
 + [s.x9(k=i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )

s.maxf = s.max2+s.d2
s.maxff = s.maxf/s.a1
s.maxixiz0 = acos(s.maxff)
s.maximiz0 = acos(s.maxff)+2*k*pi
s.maximiz1 = s.maximiz0+s.c11
s.maximiz2 = s.maximiz1/s.b1
s.maximiz00 = ((-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
s.maximiz01 = (-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1
s.maximiz11 = (2*pi+s.maximiz01)/(2*pi/s.b1)
s.maxx0 = min(s.maximiz00, s.maximiz11)
s.maxx1 = max(s.maximiz00, s.maximiz11)
if s.maxx0>0:
    s.maxxleft = int(s.maxx0)+1
else:
    s.maxxleft = int(s.maxx0)
if s.maxx1<0:
    s.maxxright = int(s.maxx1)-1
else:
    s.maxxright = int(s.maxx1)
s.listkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.maxxleft, s.maxxright+1)])
s.listmaxx =  s.ordered_set ( [s.maximiz2(i) for i in xrange (s.maxxleft,
s.maxxright+1)])
s.minf = s.min2+s.d2
s.minff = s.minf/s.a1
s.minixiz0 = acos(s.minff)
s.minimiz0 = s.minixiz0 +2*k*pi
s.minimiz1 = s.minimiz0+s.c11
s.minimiz2 = s.minimiz1/s.b1
s.minimiz00 = ((-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
s.minimiz01 = (-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1
```

```
s.minimiz11 = (2*pi+s.minimiz01)/(2*pi/s.b1)
s.minx0 = min(s.minimiz00, s.minimiz11)
s.minx1 = max(s.minimiz00, s.minimiz11)
if s.minx0>0:
    s.minxleft = int(s.minx0)+1
else:
    s.minxleft = int(s.minx0)
if s.minx1<0:
    s.minxright = int(s.minx1)-1
else:
    s.minxright = int(s.minx1)
s.listkkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.minxleft, s.minxright+1)])
s.listminx =  s.ordered_set ( [s.minimiz2(i) for i in xrange (s.minxleft,
s.minxright+1)])
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\,\cos{(2\,x+1)} - 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da funçã.
4. Determine os zeros da funçã pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função cosseno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = 2\,x+1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

   $$-1 \leq \cos{(2\,x+1)} \leq 1$$

   então multiplicando por -2, obtemos

   $$-2 \leq -2\,\cos{(2\,x+1)} \leq 2$$

e juntando -1, vem que

$$-3 \leq -2\cos(2x+1) - 1 \leq 1$$

Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-3, 1]$.

2. A função cosseno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é 2, então o período de $f(x)$ é dado por

$$\frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

3. Para estudar a paridade da função calculamos $f(-x)$, e neste caso vem que

$$f(-x) = -2\cos(-2x+1) - 1$$

calculemos ainda $-f(x)$, e obtemos $-f(x) = -(-2\cos(2x+1) - 1) = 2\cos(2x+1) + 1$
Agora temos as seguintes possibilidades:
- Se $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à própria função, a função é uma função par;
- Se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função é uma função ímpar.

Neste caso como $f(-x)$ não é igual nem à função nem à sua simétrica então a função nem é uma função par nem ímpar.

4. Os zeros da função são os valores de x que são soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos(2x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos(2x+1) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x+1) = -\frac{1}{2}.$$

Sabemos que

$$\cos(x) = \cos(\alpha)$$

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e que o ângulo cujo cosseno é $-\frac{1}{2}$ é o ângulo $\left(\frac{2}{3}\pi\right)$. Então vem que

$$\cos(2x+1) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

Logo

$$2x + 1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x + 1 = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Então

$$2x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k - 1 \quad \vee \quad 2x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi + \pi k - \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}\pi + \pi k - \frac{1}{2}.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

$$0 \leq \frac{1}{3}\pi + \pi k - \frac{1}{2} \leq 2\pi \quad \vee \quad 0 \leq -\frac{1}{3}\pi + \pi k - \frac{1}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2} \leq \pi k \leq \frac{5}{3}\pi + \frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2} \leq \pi k \leq \frac{7}{3}\pi + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi - 3}{6\pi} \leq k \leq \frac{10\pi + 3}{6\pi} \quad \vee \quad \frac{2\pi + 3}{6\pi} \leq k \leq \frac{14\pi + 3}{6\pi} \Leftrightarrow$$

Assim, como k é um número inteiro,

$$k \in \{0, 1\} \quad \vee \quad k \in \{1, 2\}$$

As soluçõess da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,

$$\left\{\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}, \frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2}\right\}$$

5. Como o máximo da função é 1, basta resolver a equação $f(x) = 1$ para determinar as abcissas dos pontos onde f atinge o seu máximo.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow -2\cos(2x + 1) - 1 = 1 \Leftrightarrow -2\cos(2x + 1) = 2 \Leftrightarrow \cos(2x + 1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(2x + 1) = \cos(\pi) \Leftrightarrow 2x + 1 = \pi + 2\pi k \Leftrightarrow 2x = \pi + 2\pi k - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + \pi k - \frac{1}{2}$$

Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja

$$0 \leq \frac{1}{2}\pi + \pi k - \frac{1}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi - 1}{2\pi} \leq k \leq \frac{3\pi + 1}{2\pi}$$

Como k é um número inteiro,

$$k \in \{0, 1\}.$$

Os pontos onde a função f atinge o seu máximo em $[0, 2\pi]$ são:

$$\left\{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\right\}$$

6. Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação

$$f(x) = -3$$

ou seja,

$$-2\cos(2x + 1) - 1 = -3 \Leftrightarrow -2\cos(2x + 1) = -2 \Leftrightarrow \cos(2x + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(2x + 1) = \cos(0) \Leftrightarrow 2x + 1 = 2\pi k \Leftrightarrow 2x = 2\pi k - 1 \Leftrightarrow x = \pi k - \frac{1}{2}$$

Como pretendemos os valores onde f atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$0 \leq \pi k - \frac{1}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \leq k \leq \frac{4\pi + 1}{2\pi}$$

Como k é um número inteiro,

$$k \in \{1, 2\}.$$

O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa:

$$\left\{\pi - \frac{1}{2}, 2\pi - \frac{1}{2}\right\}$$

E97I20 tangentefuncao 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função tangente
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função tangente

Palavras chave: Funções trigonométricas; tangente

%PROBLEM A função tangente
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função tangente é $\mathbb{R}\textbackslash
\displaystyle \left\{\frac {\pi}{2}+k\pi:\,k \in \mathbb{Z}\right\}$ e
como o domínio da função $g(x)=x1$ é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é
$\mathbb{R}\textbackslash \displaystyle \left\{\frac {\pi}{2}+k\pi:\,k
\in \mathbb{Z}\right\}$.
O contradomínio da função tangente é $\mathbb{R}$ e como o $D_g=\mathbb{R}$,
então o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=\mathbb{R}$.

\item A função tangente é uma função periódica de período $\pi$. O coeficiente
de $x$ é $b1$, então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle
 \frac {\pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Os zeros da função são os valores de $x$ que são soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0  \Leftrightarrow \tan{(x1)}=e1.$$
Sabemos que $$\tan{(x)} = \tan{(\alpha)} \Leftrightarrow x=\alpha + k\pi,$$
com $k \in \mathbb{Z}$  e que o ângulo cujo tangente é $e1$ é o ângulo
$(\left x2\right)$. Então vem que $$\tan{(x1)}=\tan {\left(x2\right)}\Leftrightarrow
```

```
x1=x2+k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=contas1\Leftrightarrow x=x8.$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \Leftrightarrow
zero00 \le k \le zero11.$$
Assim, como $k$ é um número inteiro, $k \in listk1$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são
portanto, $$listz$$
\end{enumerate}

class E97I20_tangentefuncao_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
         r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        lista1=[(1, 0), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (1, 1), (3, sqrt(3)), (-3, -sqrt(3)),
        (-3, sqrt(3)), (3, -sqrt(3)), (1, -sqrt(3)), (1, sqrt(3)), (-1, sqrt(3)),
        (1, -sqrt(3)), (-1, -sqrt(3))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))
        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0, 1])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*tan(s.x1)+s.d1

    def solve(s):
        s.per1 = abs(s.b1)
        s.per2 = pi/s.per1
        s.f2 = s.a1*tan(s.x1)
        s.e1 = -s.d1/s.a1
        s.x2 = atan (s.e1)
        s.d2 = -s.d1
```

```
s.c11 = -s.c1
s.b2 = s.b1*x
s.contas1 = s.x2+s.c11+k*pi
s.x4 = s.x2/s.b1
s.x5 = s.c11/s.b1
s.x6 = k*pi/s.b1
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = pi-s.x4-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/pi
s.zero5 = s.zero1*s.b1/pi
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
if s.zero11<0:
    s.zero12 = int(s.zero11)-1
else:
    s.zero12 = int(s.zero11)
s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(k=i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)] )
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = \tan(-x-5) + 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função tangente é $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ e como o domínio da função $g(x) = -x-5$ é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

O contradomínio da função tangente é $\mathbb{R}$ e como o $D_g = \mathbb{R}$, então o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = \mathbb{R}$.

2. A função tangente é uma função periódica de período π. O coeficiente de x é -1, então o período de $f(x)$ é dado por

$$\frac{\pi}{|-1|} = \pi$$

3. Os zeros da função são os valores de x que são soluões da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(-x-5) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan(-x-5) = -1.$$

Sabemos que

$$\tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e que o ângulo cujo tangente é -1 é o ângulo $\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$. Então vem que

$$\tan(-x-5) = \tan\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \Leftrightarrow -x-5 = -\frac{1}{4}\pi + k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Então

$$-x = -\frac{1}{4}\pi + \pi k + 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi - \pi k - 5.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

$$0 \leq \frac{1}{4}\pi - \pi k - 5 \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\pi + 5 \leq -\pi k \leq \frac{3}{4}\pi + 5 \Leftrightarrow -\frac{3\,\pi + 20}{4\,\pi} \leq k \leq \frac{\pi - 20}{4\,\pi}.$$

Assim, como k é um número inteiro,

$$k \in \{-2\}$$

As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,

$$\left\{\frac{9}{4}\pi - 5\right\}$$

E97I20 dominiocontradominioseno 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

%PROBLEM A função seno
Considere a função definida por
```

```
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da
função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$, então $$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$.
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

class E97I20_dominiocontradominioseno_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+ r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        s.a1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0,1])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.sinal1=ur.iunif(0,1)
        s.x1=s.b1*x+s.c1
        s.f1=s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f2=s.a1*sin(s.x1)

    def solve(s):
        s.impi1=round(s.f1(x=2*pi),2)
        s.max1=abs(s.a1)
        s.min1=-s.max1
        s.max2=s.max1+s.d1
        s.min2=s.min1+s.d1
```

```
        if s.a1<0:
            s.sinal1=1
        else:
            s.sinal1=0
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = -\operatorname{sen}(-3\,x-5)+4$$

Indique o seu domínio e contradomínio.

Proposta de resolução:

O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3\,x - 5$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \operatorname{sen}(-3\,x-5) \leq 1$$

então

$$-1 \leq -\operatorname{sen}(-3\,x-5) \leq 1$$

e tem-se

$$3 \leq -\operatorname{sen}(-3\,x-5)+4 \leq 5$$

Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [3, 5]$.

E97I20 periodoseno 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno


97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions


Também pode ser 26A09 Elementary functions

estudo da função seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno


%PROBLEM A função seno

Considere a função definida por $$f(x)=f1$$
```

```
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da
função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$ então $$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função seno é periódica e $2\pi$ é o seu período. Então o período de $f(x)$
é dado por $$\displaystyle \frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$


class E97I20_periodoseno_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
        r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        s.a1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0,1])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])

        s.sinal1=ur.iunif(0,1)
        s.x1=s.b1*x+s.c1
        s.f1=s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f2=s.a1*sin(s.x1)
```

```
def solve(s):
    s.impi1=round(s.f1(x=2*pi),2)
    s.per1=abs(s.b1)
    s.per2=2*pi/s.per1
    s.max1=abs(s.a1)
    s.min1=-s.max1
    s.max2=s.max1+s.d1
    s.min2=s.min1+s.d1
    if s.a1<0:
        s.sinal1=1
    else:
        s.sinal1=0
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = -\operatorname{sen}(-3\,x - 4) + 5$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3\,x - 4$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

   $$-1 \leq \operatorname{sen}(-3\,x - 4) \leq 1$$

   então

   $$-1 \leq -\operatorname{sen}(-3\,x - 4) \leq 1$$

   e tem-se

   $$4 \leq -\operatorname{sen}(-3\,x - 4) + 5 \leq 6$$

   Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [4, 6]$.

2. A função seno é periódica e 2π é o seu período. Então o período de $f(x)$ é dado por

   $$\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2}{3}\,\pi$$

E97I20 zeroseno

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função seno
Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

%PROBLEM A função seno
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da
função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$, então $$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função seno é uma função periódica de período $2\pi$. O coeficiente de $x$
é $b1$, então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle
\frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Os zeros da função são os valores de $x$ soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sen{(x1)}=e1.$$
Temos que $$\sen{(x1)}=\sen {(x2)}\Leftrightarrow x1=x2+2k\pi \quad \vee \quad
 x1=x3+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=x2+c11+2k\pi\quad \vee \quad b2=x3+c11+2k\pi \Leftrightarrow $$ $$\Leftrightarrow
x=x8\quad \vee \quad x=x9$$
```

```
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad \vee \quad zero2 \le x6 \le zero3
\Leftrightarrow$$
$$ \Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad \vee \quad zero22 \le k \le zero33
\Leftrightarrow$$
Assim, como $k$ é um número inteiro,
$$k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são, portanto, $$listz$$
\end{enumerate}

class E97I20_zeroseno(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
         return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
         r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1),
        (-1, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)), (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)),
        (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)), (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))

        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.sinal1 = ur.iunif(0,1)
        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1

    def solve(s):
        s.per1 = abs(s.b1)
        s.per2 = 2*pi/s.per1
        s.max1 = abs(s.a1)
```

```
s.min1 = -s.max1
s.max2 = s.max1+s.d1
s.min2 = s.min1+s.d1
if s.a1<0:
    s.sinal1=1
else:
    s.sinal1=0

s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
s.e1 = -s.d1/s.a1
s.x2 = asin (s.e1)
s.d2 = -s.d1
s.x3 = pi-s.x2
s.c11 = -s.c1
s.b2 = s.b1*x
s.x4 = s.x2/s.b1
s.x5 = s.c11/s.b1
s.x6 = 2*k*pi/s.b1
s.x7 = s.x3/s.b1
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
s.zero2 = -s.x7-s.x5
s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
if s.zero11<0:
```

```
        s.zero12 = int(s.zero11)-1
    else:
        s.zero12 = int(s.zero11)

    if s.zero22>0:
        s.zero21 = int(s.zero22)+1
    else:
        s.zero21 = int(s.zero22)
    if s.zero33<0:
        s.zero34 = int(s.zero33)-1
    else:
        s.zero34 = int(s.zero33)

    s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
    s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
    s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)]
    + [s.x9(i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) - 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3\,x - 2$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

   $$-1 \leq \mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) \leq 1$$

   então

   $$-2 \leq 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) \leq 2$$

   e tem-se

   $$-3 \leq 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) - 1 \leq 1$$

   Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-3, 1]$.

2. A função seno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é -3, então o período de $f(x)$ é dado por
$$\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2}{3}\,\pi$$

3. Os zeros da função são os valores de x soluções da equação $f(x) = 0$.
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) = \frac{1}{2}.$$
Temos que
$$\mathrm{sen}\,(-3\,x - 2) = \mathrm{sen}\,(\frac{1}{6}\,\pi) \Leftrightarrow -3\,x - 2 = \frac{1}{6}\,\pi + 2k\pi \quad \vee \quad -3\,x - 2 = \frac{5}{6}\,\pi + 2k\pi,$$
com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$\begin{aligned} -3\,x = \frac{1}{6}\,\pi + 2 + 2k\pi \quad &\vee \quad -3\,x = \frac{5}{6}\,\pi + 2 + 2k\pi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -\frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{2}{3} \quad &\vee \quad x = -\frac{5}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{2}{3} \end{aligned}$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,
$$\begin{aligned} 0 \le -\frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{2}{3} \le 2\pi \quad &\vee \quad 0 \le -\frac{5}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{2}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{18}\,\pi + \frac{2}{3} \le -\frac{2}{3}\,\pi k \le \frac{37}{18}\,\pi + \frac{2}{3} \quad &\vee \quad \frac{5}{18}\,\pi + \frac{2}{3} \le -\frac{2}{3}\,\pi k \le \frac{41}{18}\,\pi + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{37\,\pi + 12}{12\,\pi} \le k \le -\frac{\pi + 12}{12\,\pi} \quad &\vee \quad -\frac{41\,\pi + 12}{12\,\pi} \le k \le -\frac{5\,\pi + 12}{12\,\pi} \Leftrightarrow \end{aligned}$$
Assim, como k é um número inteiro,
$$k \in \{-3, -2, -1\} \quad \vee \quad k \in \{-3, -2, -1\}$$
As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,
$$\left\{\frac{7}{18}\,\pi - \frac{2}{3}, \frac{11}{18}\,\pi - \frac{2}{3}, \frac{19}{18}\,\pi - \frac{2}{3}, \frac{23}{18}\,\pi - \frac{2}{3}, \frac{31}{18}\,\pi - \frac{2}{3}, \frac{35}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\right\}$$

E97I20 maxsen 001

`%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno`

```
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função seno
Palavras chave: Funções trigonométricas; seno
```

`%PROBLEM A função seno`

```
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da
função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$, então $$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função seno é uma função periódica de período $2\pi$. O coeficiente de $x$ é
$b1$, então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle
\frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Os zeros da função são os valores de $x$ soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sen{(x1)}=e1.$$
Temos que $\sen{(x1)}=\sen {(x2)}$ e resolvendo a equação vem que
$$x1=x2+2k\pi \quad \vee \quad x1=x3+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=x2+c11+2k\pi\quad \vee \quad b2=x3+c11+2k\pi \Leftrightarrow $$
$$\Leftrightarrow x=x8\quad \vee \quad x=x9.$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad \vee \quad zero2 \le x6 \le zero3
\Leftrightarrow$$
$$ \Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad \vee \quad zero22 \le k \le zero33
\Leftrightarrow$$
com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, como $k$ é um número inteiro,
$$k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são portanto, $$listz$$
```

```
\item Como o máximo da função é $max2$, basta resolver a equação $f(x)=max2$ para
 determinar as abcissas dos pontos onde $f$ atinge o seu máximo.
$$ f(x)=max2 \Leftrightarrow f1=max2 \Leftrightarrow f2=maxf \Leftrightarrow
\sen{(x1)}=maxff \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow x1=maximiz0 \Leftrightarrow b2=maximiz1 \Leftrightarrow x=maximiz2 $$
Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$, ou seja
$$ 0 \le maximiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow maxx0 \le k \le maxx1,$$
com $k \in \mathbb{Z}$. Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkk.$$
Os pontos onde a função $f$ atinge o seu máximo em $[0,2\pi]$ são: $$listmaxx$$
\end{enumerate}
```

```
class E97I20_maxsen(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
        r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1),
        (-1, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)), (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)),
        (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)), (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))

        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])

        s.sinal1 = ur.iunif(0,1)

        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1
```

```
def solve(s):

    s.per1 = abs(s.b1)
    s.per2 = 2*pi/s.per1
    s.max1 = abs(s.a1)
    s.min1 = -s.max1
    s.max2 = s.max1+s.d1
    s.min2 = s.min1+s.d1
    if s.a1<0:
        s.sinal1=1
    else:
        s.sinal1=0

    s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
    s.e1 = -s.d1/s.a1
    s.x2 = asin (s.e1)
    s.d2 = -s.d1
    s.x3 = pi-s.x2
    s.c11 = -s.c1
    s.b2 = s.b1*x
    s.x4 = s.x2/s.b1
    s.x5 = s.c11/s.b1
    s.x6 = 2*k*pi/s.b1
    s.x7 = s.x3/s.b1
    s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
    s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
    s.zero0 = -s.x4-s.x5
    s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
    s.zero2 = -s.x7-s.x5
    s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
    s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
    s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
    s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
    s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
    s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
    s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
    s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
    s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
```

```
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
if s.zero11<0:
    s.zero12 = int(s.zero11)-1
else:
    s.zero12 = int(s.zero11)

if s.zero22>0:
    s.zero21 = int(s.zero22)+1
else:
    s.zero21 = int(s.zero22)
if s.zero33<0:
    s.zero34 = int(s.zero33)-1
else:
    s.zero34 = int(s.zero33)

s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)] +
[s.x9(i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )

s.maxf = s.max2+s.d2
s.maxff = s.maxf/s.a1
if s.maxff>0:
    s.maximiz0 = pi/2+2*k*pi
else:
    s.maximiz0 = -pi/2+2*k*pi

s.maximiz1 = s.maximiz0+s.c11
s.maximiz2 = s.maximiz1/s.b1
s.maximiz00 = ((-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
s.maximiz01 = (-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1
s.maximiz11 = (2*pi+s.maximiz01)/(2*pi/s.b1)
s.maxx0 = min(s.maximiz00, s.maximiz11)
s.maxx1 = max(s.maximiz00, s.maximiz11)
if s.maxx0>0:
```

```
        s.maxxleft = int(s.maxx0)+1
    else:
        s.maxxleft = int(s.maxx0)
    if s.maxx1<0:
        s.maxxright = int(s.maxx1)-1
    else:
        s.maxxright = int(s.maxx1)

    s.listkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.maxxleft, s.maxxright+1)])
    s.listmaxx =  s.ordered_set ( [s.maximiz2(i) for i in xrange (s.maxxleft,
    s.maxxright+1)])
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-3)+1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
4. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3x - 3$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

   $$-1 \leq \mathrm{sen}\,(-3x-3) \leq 1$$

   então

   $$-2 \leq 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-3) \leq 2$$

   e tem-se

   $$-1 \leq 2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-3)+1 \leq 3$$

   Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-1, 3]$.

2. A função seno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é -3, então o período de $f(x)$ é dado por

$$\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2}{3}\,\pi$$

3. Os zeros da função são os valores de x soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,\operatorname{sen}(-3\,x - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,\operatorname{sen}(-3\,x - 3) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-3\,x - 3) = -\frac{1}{2}.$$

Temos que $\operatorname{sen}(-3\,x - 3) = \operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\,\pi)$ e resolvendo a equação vem que

$$-3\,x - 3 = -\frac{1}{6}\,\pi + 2k\pi \quad \vee \quad -3\,x - 3 = \frac{7}{6}\,\pi + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Então

$$-3\,x = -\frac{1}{6}\,\pi + 3 + 2k\pi \quad \vee \quad -3\,x = \frac{7}{6}\,\pi + 3 + 2k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1 \quad \vee \quad x = -\frac{7}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

$$0 \leq \frac{1}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1 \leq 2\pi \quad \vee \quad 0 \leq -\frac{7}{18}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1 \leq 2\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{18}\,\pi + 1 \leq -\frac{2}{3}\,\pi k \leq \frac{35}{18}\,\pi + 1 \quad \vee \quad \frac{7}{18}\,\pi + 1 \leq -\frac{2}{3}\,\pi k \leq \frac{43}{18}\,\pi + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{35\,\pi + 18}{12\,\pi} \leq k \leq \frac{\pi - 18}{12\,\pi} \quad \vee \quad -\frac{43\,\pi + 18}{12\,\pi} \leq k \leq -\frac{7\,\pi + 18}{12\,\pi} \Leftrightarrow$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, como k é um número inteiro,

$$k \in \{-3, -2, -1\} \quad \vee \quad k \in \{-4, -3, -2\}$$

As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são portanto,

$$\left\{\frac{13}{18}\,\pi - 1, \frac{17}{18}\,\pi - 1, \frac{25}{18}\,\pi - 1, \frac{29}{18}\,\pi - 1, \frac{37}{18}\,\pi - 1, \frac{41}{18}\,\pi - 1\right\}$$

4. Como o máximo da função é 3, basta resolver a equação $f(x) = 3$ para determinar as abcissas dos pontos onde f atinge o seu máximo.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\,\operatorname{sen}(-3\,x - 3) + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\,\operatorname{sen}(-3\,x - 3) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-3\,x - 3) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3\,x - 3 = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k \Leftrightarrow -3\,x = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1$$

Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja

$$0 \leq -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - 1 \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{13\,\pi + 6}{4\,\pi} \leq k \leq -\frac{\pi + 6}{4\,\pi},$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Como k é um número inteiro,

$$k \in \{-3, -2, -1\}\,.$$

Os pontos onde a função f atinge o seu máximo em $[0, 2\pi]$ são:

$$\left\{\frac{1}{2}\,\pi - 1, \frac{7}{6}\,\pi - 1, \frac{11}{6}\,\pi - 1\right\}$$

E97I20 senofuncao 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
estudo da função seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

%PROBLEM A função seno
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
\begin{enumerate}
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\item Estude a paridade da função.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função
$g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$, temos
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$
então multiplicando por $a1$ obtemos $$min1 \le f2 \le max1$$
e juntando $d1$ vem que $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função seno é uma função periódica de período $2\pi$. O coeficiente de $x$ é $b1$,
então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle \frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Para estudar a paridade da função calculamos $f(-x)$, e neste caso vem que
$$f(-x)= f1paridade$$\\
calculemos ainda $-f(x)$, e obtemos $-f(x)=-(f1)=f2paridade$\\
```

```
Seja $D_f$ um conjunto simétrico (isto é, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$) então
temos que:\\
- Se $f(-x)=f(x), \forall x\in D_f$, isto é, igual à própria função, a função é uma
função par;\\
- Se $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função é uma
função ímpar.\\
Neste caso como $f(-x)$ duvid1@c{"é","é","não é"} igual duvid1@c{"à própria função",
"ao simétrico da função","nem à função nem à sua simétrica"} então a função
duvid1@c{"é uma função par","é uma função ímpar","nem é uma função par nem ímpar"}.\\

\item Os zeros da função são os valores de $x$ que são soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sen{(x1)}=e1.$$
Sabemos que $$\sen{(x)} = \sen{(\alpha)} \Leftrightarrow x=\alpha + 2k\pi \quad \vee
\quad x=(\pi -\alpha)+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$  e que o ângulo cujo seno é $e1$
é o ângulo $\left( x2\right)$. Então vem que $$\sen{(x1)}=\sen {\left(x2\right)}$$
Logo $$x1=x2+2k\pi \quad \vee \quad x1=\left(\pi - \left(x2\right)\right) +2k\pi,$$
com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=contas1\quad \vee \quad b2=contas2\Leftrightarrow $$
$$\Leftrightarrow x=x8\quad \vee \quad x=x9.$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad \vee \quad zero2 \le x6 \le zero3
\Leftrightarrow$$
$$ \Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad \vee \quad zero22 \le k \le zero33$$
Assim, como $k$ é um número inteiro,
$$k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são, portanto,
$$listz$$

\item Como o máximo da função é $max2$, basta resolver a equação $f(x)=max2$ para
determinar as abcissas dos pontos onde $f$ atinge o seu máximo.
$$f(x)=max2 \Leftrightarrow f1=max2 \Leftrightarrow f2=maxf \Leftrightarrow
\sen{(x1)} = maxff$$
Como o ângulo cujo seno é $maxff$ é $\left( maxixiz0\right)$ resulta que
$$\sen{(x1)}= \sen{\left( maxixiz0\right)} \Leftrightarrow x1=maximiz0
\Leftrightarrow b2=maximiz1 \Leftrightarrow x=maximiz2 $$
Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$,
ou seja $$ 0 \le maximiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow maxx0 \le k \le maxx1$$
```

```
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkk.$$
Os pontos onde a função $f$ atinge o seu máximo em $[0,2\pi]$ são: $$listmaxx$$
\item Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação
$$f(x)=min2$$ ou seja, $$f1=min2 \Leftrightarrow f2=minf \Leftrightarrow \sen{(x1)}=minff$$
O ângulo cujo seno é $minff$ é $\left( minixiz0\right)$ então vem que
$$  \sen{(x1)}=\sen {\left (minixiz0\right)} \Leftrightarrow x1=minimiz0 \Leftrightarrow
 b2=minimiz1 \Leftrightarrow x=minimiz2 $$
Como pretendemos os valores onde $f$ atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$,
$$ 0 \le minimiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow minx0 \le k \le minx1$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkkk.$$
O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa: $$listminx$$
\end{enumerate}

class E97I20_senofuncao_001(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{'+ join([ latex(i) for i in sorted( num_list )], ',')+ r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')
        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)),
        (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)), (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)),
        (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))

        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f1paridade = s.a1*sin(s.b1*(-x)+s.c1)+s.d1
        s.f2paridade = -(s.a1*sin(s.x1)+s.d1)

    def solve(s):
        s.per1 = abs(s.b1)
        s.per2 = 2*pi/s.per1
```

```
if s.f1paridade == s.f1:
    s.duvid1 = 0
elif s.f2paridade == s.f1paridade:
    s.duvid1 = 1
else:
    s.duvid1 = 2
s.max1 = abs(s.a1)
s.min1 = -s.max1
s.max2 = s.max1+s.d1
s.min2 = s.min1+s.d1
s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
s.e1 = -s.d1/s.a1
s.x2 = asin(s.e1).simplify()
s.d2 = -s.d1
s.x3 = pi-s.x2
s.c11 = -s.c1
s.b2 = s.b1*x
s.contas1 = s.x2+s.c11+2*k*pi
s.contas2 = s.x3+s.c11+2*k*pi
s.x4 = s.x2/s.b1
s.x5 = s.c11/s.b1
s.x6 = 2*k*pi/s.b1
s.x7 = s.x3/s.b1
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
s.zero2 = -s.x7-s.x5
s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
if s.zero00>0:
```

```
        s.zero01 = int(s.zero00)+1
    else:
        s.zero01 = int(s.zero00)
    if s.zero11<0:
        s.zero12 = int(s.zero11)-1
    else:
        s.zero12 = int(s.zero11)

    if s.zero22>0:
        s.zero21 = int(s.zero22)+1
    else:
        s.zero21 = int(s.zero22)
    if s.zero33<0:
        s.zero34 = int(s.zero33)-1
    else:
        s.zero34 = int(s.zero33)

    s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
    s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
    s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(k=i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)]
     + [s.x9(k=i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )

    s.maxf = s.max2+s.d2
    s.maxff = s.maxf/s.a1
    s.maxixiz0 = asin(s.maxff)
    s.maximiz0 = asin(s.maxff)+2*k*pi
    s.maximiz1 = s.maximiz0+s.c11
    s.maximiz2 = s.maximiz1/s.b1
    s.maximiz00 = ((-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
    s.maximiz01 = (-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1
    s.maximiz11 = (2*pi+s.maximiz01)/(2*pi/s.b1)
    s.maxx0 = min(s.maximiz00, s.maximiz11)
    s.maxx1 = max(s.maximiz00, s.maximiz11)
    if s.maxx0>0:
        s.maxxleft = int(s.maxx0)+1
    else:
        s.maxxleft = int(s.maxx0)
    if s.maxx1<0:
```

```
            s.maxxright = int(s.maxx1)-1
        else:
            s.maxxright = int(s.maxx1)

        s.listkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.maxxleft, s.maxxright+1)])
        s.listmaxx =  s.ordered_set ( [s.maximiz2(i) for i in xrange (s.maxxleft,
        s.maxxright+1)])
        s.minf = s.min2+s.d2
        s.minff = s.minf/s.a1
        s.minixiz0 = asin(s.minff)
        s.minimiz0 = s.minixiz0 +2*k*pi
        s.minimiz1 = s.minimiz0+s.c11
        s.minimiz2 = s.minimiz1/s.b1
        s.minimiz00 = ((-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
        s.minimiz01 = (-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1
        s.minimiz11 = (2*pi+s.minimiz01)/(2*pi/s.b1)
        s.minx0 = min(s.minimiz00, s.minimiz11)
        s.minx1 = max(s.minimiz00, s.minimiz11)
        if s.minx0>0:
            s.minxleft = int(s.minx0)+1
        else:
            s.minxleft = int(s.minx0)
        if s.minx1<0:
            s.minxright = int(s.minx1)-1
        else:
            s.minxright = int(s.minx1)
        s.listkkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.minxleft, s.minxright+1)])
        s.listminx =  s.ordered_set ( [s.minimiz2(i) for i in xrange (s.minxleft,
        s.minxright+1)])

    def rewrite(self,text):
        """
        Derive this function and implement rewritting rules to change latex expressions
        for example.
        """
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\ \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) + 1$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.
2. Indique o seu período.
3. Estude a paridade da função.
4. Determine os zeros da função, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.
5. Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo, no intervalo $[0, 2\pi]$.
6. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -3\,x - 4$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$, temos

$$-1 \leq \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) \leq 1$$

então multiplicando por -2 obtemos

$$-2 \leq -2\ \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) \leq 2$$

e juntando 1 vem que

$$-1 \leq -2\ \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) + 1 \leq 3$$

Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-1, 3]$.

2. A função seno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é -3, então o período de $f(x)$ é dado por

$$\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2}{3}\,\pi$$

3. Para estudar a paridade da função calculamos $f(-x)$, e neste caso vem que

$$f(-x) = -2\ \mathrm{sen}\,(3\,x - 4) + 1$$

calculemos ainda $-f(x)$, e obtemos $-f(x) = -(-2\ \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) + 1) = 2\ \mathrm{sen}\,(-3\,x - 4) - 1$

Seja D_f um conjunto simétrico (isto é, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$) então temos que:

- Se $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à própria função, a função é uma função par;

- Se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função é uma função ímpar.

Neste caso como $f(-x)$ não é igual nem à função nem à sua simétrica então a função nem é uma função par nem ímpar.

4. Os zeros da função são os valores de x que são soluções da equação $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)+1=0 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=-1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=\frac{1}{2}.$$

Sabemos que

$$\mathrm{sen}\,(x)=\mathrm{sen}\,(\alpha) \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \quad \vee \quad x=(\pi-\alpha)+2k\pi,$$

com $k\in\mathbb{Z}$ e que o ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$ é o ângulo $\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)$. Então vem que

$$\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)$$

Logo

$$-3\,x-4=\frac{1}{6}\,\pi+2k\pi \quad \vee \quad -3\,x-4=\left(\pi-\left(\frac{1}{6}\,\pi\right)\right)+2k\pi,$$

com $k\in\mathbb{Z}$. Então

$$-3\,x=\frac{1}{6}\,\pi+2\,\pi k+4 \quad \vee \quad -3\,x=\frac{5}{6}\,\pi+2\,\pi k+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{18}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi k-\frac{4}{3} \quad \vee \quad x=-\frac{5}{18}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi k-\frac{4}{3}.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,

$$0\le -\frac{1}{18}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi k-\frac{4}{3}\le 2\pi \quad \vee \quad 0\le -\frac{5}{18}\,\pi-\frac{2}{3}\,\pi k-\frac{4}{3}\le 2\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{18}\,\pi+\frac{4}{3}\le -\frac{2}{3}\,\pi k\le \frac{37}{18}\,\pi+\frac{4}{3} \quad \vee \quad \frac{5}{18}\,\pi+\frac{4}{3}\le -\frac{2}{3}\,\pi k\le \frac{41}{18}\,\pi+\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{37\,\pi+24}{12\,\pi}\le k\le -\frac{\pi+24}{12\,\pi} \quad \vee \quad -\frac{41\,\pi+24}{12\,\pi}\le k\le -\frac{5\,\pi+24}{12\,\pi} \Leftrightarrow$$

Assim, como k é um número inteiro,

$$k\in\{-3,-2,-1\} \quad \vee \quad k\in\{-4,-3,-2\}$$

As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são, portanto,

$$\left\{\frac{11}{18}\,\pi-\frac{4}{3},\frac{19}{18}\,\pi-\frac{4}{3},\frac{23}{18}\,\pi-\frac{4}{3},\frac{31}{18}\,\pi-\frac{4}{3},\frac{35}{18}\,\pi-\frac{4}{3},\frac{43}{18}\,\pi-\frac{4}{3}\right\}$$

5. Como o máximo da função é 3, basta resolver a equação $f(x)=3$ para determinar as abcissas dos pontos onde f atinge o seu máximo.

$$f(x)=3 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)+1=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=2 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=-1$$

Como o ângulo cujo seno é -1 é $\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right)$ resulta que,

$$\mathrm{sen}\,(-3\,x-4)=\mathrm{sen}\left(-\frac{1}{2}\,\pi\right) \Leftrightarrow -3\,x-4=-\frac{1}{2}\,\pi+2\,\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\,x = -\frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3}$$

Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja

$$0 \le \frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{11\,\pi + 8}{4\,\pi} \le k \le \frac{\pi - 8}{4\,\pi}$$

Como k é um número inteiro, $k \in \{-3, -2, -1\}$.

Os pontos onde a função f atinge o seu máximo em $[0, 2\pi]$ são:

$$\left\{\frac{5}{6}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{3}{2}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\,\pi - \frac{4}{3}\right\}$$

6. Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação $f(x) = -1$, ou seja,

$$-2\,\text{sen}\,(-3\,x - 4) + 1 = -1 \Leftrightarrow -2\,\text{sen}\,(-3\,x - 4) = -2 \Leftrightarrow \text{sen}\,(-3\,x - 4) = 1$$

O ângulo cujo seno é 1 é $\left(\frac{1}{2}\,\pi\right)$ então vem que

$$\text{sen}\,(-3\,x - 4) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\,\pi\right) \Leftrightarrow -3\,x - 4 = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\,x = \frac{1}{2}\,\pi + 2\,\pi k + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3}$$

Como pretendemos os valores onde f atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$0 \le -\frac{1}{6}\,\pi - \frac{2}{3}\,\pi k - \frac{4}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{13\,\pi + 8}{4\,\pi} \le k \le -\frac{\pi + 8}{4\,\pi}$$

Como k é um número inteiro, $k \in \{-3, -2, -1\}$.

O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa:

$$\left\{\frac{1}{2}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{7}{6}\,\pi - \frac{4}{3}, \frac{11}{6}\,\pi - \frac{4}{3}\right\}$$

E97I20 minsen 001

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

estudo da função seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno


%PROBLEM A função seno

Considere a função definida por $f(x)=f1$

\begin{enumerate}
```

```
\item Indique o seu domínio e contradomínio.
\item Indique o seu período.
\item Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$.
\item Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$.
\end{enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função
$g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.
O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g=\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sen{(x1)}\le 1$$, então $$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

\item A função seno é uma função periódica de período $2\pi$. O coeficiente de $x$ é $b1$,
então o período de $f(x)$ é dado por $$\displaystyle \frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

\item Os zeros da função são os valores de $x$ soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sen{(x1)}=e1.$$
Temos que $$\sen{(x1)}=\sen {(x2)}\Leftrightarrow x1=x2+2k\pi \quad \vee \quad
x1=x3+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então
$$b2=x2+c11+2k\pi\quad \vee \quad b2=x3+c11+2k\pi \Leftrightarrow $$
$$\Leftrightarrow x=x8\quad \vee \quad x=x9.$$
Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad \vee \quad zero2 \le x6 \le zero3
\Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad \vee \quad zero22 \le k \le zero33$$
Assim, como $k$ é um número inteiro, $k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são, portanto,
$$listz$$

\item Como o máximo da função é $max2$, basta resolver a equação $f(x)=max2$ para
determinar as abcissas dos pontos onde $f$ atinge o seu máximo.
$$ f(x)=max2 \Leftrightarrow f1=max2 \Leftrightarrow f2=maxf \Leftrightarrow
 \sen{(x1)}=maxff \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow x1=maximiz0 \Leftrightarrow b2=maximiz1 \Leftrightarrow x=maximiz2 $$
```

```
Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0,2\pi]$, ou seja
$$ 0 \le maximiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow maxx0 \le k \le maxx1$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkk.$$
Os pontos onde a função $f$ atinge o seu máximo em $[0,2\pi]$ são: $$listmaxx$$

\item Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação
$$f(x)=min2$$ ou seja, $$f1=min2 \Leftrightarrow f2=minf \Leftrightarrow \sen{(x1)}=minff
\Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow x1=minimiz0 \Leftrightarrow b2=minimiz1 \Leftrightarrow x=minimiz2 $$
Como pretendemos os valores onde $f$ atinge o seu mínimo no intervalo $[0,2\pi]$,
$$ 0 \le minimiz2 \le 2\pi \Leftrightarrow minx0 \le k \le minx1$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listkkk.$$
O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa: $$listminx$$
\end{enumerate}

class E97I20_minsen(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i) for i in sorted( num_list ) ], ',')+
        r'\right\}'

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')
        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1),
        (-1, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)), (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)),
        (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)), (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))
        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.sinal1 = ur.iunif(0,1)
        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1

    def solve(s):
        s.per1 = abs(s.b1)
```

```
s.per2 = 2*pi/s.per1
s.max1 = abs(s.a1)
s.min1 = -s.max1
s.max2 = s.max1+s.d1
s.min2 = s.min1+s.d1
if s.a1<0:
    s.sinal1=1
else:
    s.sinal1=0
s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
s.e1 = -s.d1/s.a1
s.x2 = asin (s.e1)
s.d2 = -s.d1
s.x3 = pi-s.x2
s.c11 = -s.c1
s.b2 = s.b1*x
s.x4 = s.x2/s.b1
s.x5 = s.c11/s.b1
s.x6 = 2*k*pi/s.b1
s.x7 = s.x3/s.b1
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
s.zero2 = -s.x7-s.x5
s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
```

```
if s.zero11<0:
    s.zero12 = int(s.zero11)-1
else:
    s.zero12 = int(s.zero11)
if s.zero22>0:
    s.zero21 = int(s.zero22)+1
else:
    s.zero21 = int(s.zero22)
if s.zero33<0:
    s.zero34 = int(s.zero33)-1
else:
    s.zero34 = int(s.zero33)
s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(i) for i in xrange(s.zero01, s.zero12+1)] +
[s.x9(i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )
s.maxf = s.max2+s.d2
s.maxff = s.maxf/s.a1
if s.maxff>0:
    s.maximiz0 = pi/2+2*k*pi
else:
    s.maximiz0 = -pi/2+2*k*pi
s.maximiz1 = s.maximiz0+s.c11
s.maximiz2 = s.maximiz1/s.b1
s.maximiz00 = ((-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
s.maximiz01 = (-s.maximiz1+2*k*pi)/s.b1
s.maximiz11 = (2*pi+s.maximiz01)/(2*pi/s.b1)
s.maxx0 = min(s.maximiz00, s.maximiz11)
s.maxx1 = max(s.maximiz00, s.maximiz11)
if s.maxx0>0:
    s.maxxleft = int(s.maxx0)+1
else:
    s.maxxleft = int(s.maxx0)
if s.maxx1<0:
    s.maxxright = int(s.maxx1)-1
else:
    s.maxxright = int(s.maxx1)
s.listkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.maxxleft, s.maxxright+1)])
```

```
s.listmaxx =  s.ordered_set ( [s.maximiz2(i) for i in xrange (s.maxxleft,
s.maxxright+1)])
s.minf = s.min2+s.d2
s.minff = s.minf/s.a1
if s.minff>0:
    s.minimiz0 = pi/2+2*k*pi
else:
    s.minimiz0 = -pi/2+2*k*pi
s.minimiz1 = s.minimiz0+s.c11
s.minimiz2 = s.minimiz1/s.b1
s.minimiz00 = ((-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1)/(2*pi/s.b1)
s.minimiz01 = (-s.minimiz1+2*k*pi)/s.b1
s.minimiz11 = (2*pi+s.minimiz01)/(2*pi/s.b1)
s.minx0 = min(s.minimiz00, s.minimiz11)
s.minx1 = max(s.minimiz00, s.minimiz11)
if s.minx0>0:
    s.minxleft = int(s.minx0)+1
else:
    s.minxleft = int(s.minx0)
if s.minx1<0:
    s.minxright = int(s.minx1)-1
else:
    s.minxright = int(s.minx1)
s.listkkk = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.minxleft, s.minxright+1)])
s.listminx =  s.ordered_set ( [s.minimiz2(i) for i in xrange (s.minxleft,
 s.minxright+1)])
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(-x+1)$$

1. Indique o seu domínio e contradomínio.

2. Indique o seu período.

3. Determine os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$.

4. Determine os pontos onde a função atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Proposta de resolução:

1. O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -x+1$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

   O contradomínio da função seno é $[-1,1]$. Assim, como $D_g = \mathbb{R}$,

   $$-1 \leq \operatorname{sen}(-x+1) \leq 1$$

   então

   $$-1 \leq \operatorname{sen}(-x+1) \leq 1$$

   e tem-se

   $$-1 \leq \operatorname{sen}(-x+1) \leq 1$$

   Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-1,1]$.

2. A função seno é uma função periódica de período 2π. O coeficiente de x é -1, então o período de $f(x)$ é dado por

   $$\frac{2\pi}{|-1|} = 2\,\pi$$

3. Os zeros da função são os valores de x soluções da equação $f(x) = 0$.

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 0.$$

   Temos que

   $$\operatorname{sen}(-x+1) = \operatorname{sen}(0) \Leftrightarrow -x+1 = 0 + 2k\pi \quad \vee \quad -x+1 = \pi + 2k\pi,$$

   com $k \in \mathbb{Z}$. então

   $$-x = 0 + -1 + 2k\pi \quad \vee \quad -x = \pi + -1 + 2k\pi \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow x = -2\,\pi k + 1 \quad \vee \quad x = -\pi - 2\,\pi k + 1.$$

   Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

   $$0 \leq -2\,\pi k + 1 \leq 2\pi \quad \vee \quad 0 \leq -\pi - 2\,\pi k + 1 \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -1 \leq -2\,\pi k \leq 2\,\pi - 1 \quad \vee \quad \pi - 1 \leq -2\,\pi k \leq 3\,\pi - 1 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -\frac{2\,\pi - 1}{2\,\pi} \leq k \leq \frac{1}{2\,\pi} \quad \vee \quad -\frac{3\,\pi - 1}{2\,\pi} \leq k \leq -\frac{\pi - 1}{2\,\pi} \Leftrightarrow$$

   Assim, como k é um número inteiro,

   $$k \in \{0\} \quad \vee \quad k \in \{-1\}$$

   As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,

   $$\{1, \pi + 1\}$$

4. Como o máximo da função é 1, basta resolver a equação $f(x) = 1$ para determinar as abcissas dos pontos onde f atinge o seu máximo.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(-x+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+1 = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k \Leftrightarrow -x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\pi - 2\pi k + 1$$

Pretende-se os valores onde a função atinge o seu máximo no intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja

$$0 \leq -\frac{1}{2}\pi - 2\pi k + 1 \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi - 2}{4\pi} \leq k \leq -\frac{\pi - 2}{4\pi}$$

Como k é um número inteiro, $k \in \{-1\}$.

Os pontos onde a função f atinge o seu máximo em $[0, 2\pi]$ são:

$$\left\{\frac{3}{2}\pi + 1\right\}$$

5. Para determinar os pontos onde a função atinge o seu mínimo resolvemos a equação

$$f(x) = -1$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(-x+1) = -1 \Leftrightarrow -x+1 = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k \Leftrightarrow -x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi - 2\pi k + 1$$

Como pretendemos os valores onde f atinge o seu mínimo no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$0 \leq \frac{1}{2}\pi - 2\pi k + 1 \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi - 2}{4\pi} \leq k \leq \frac{\pi + 2}{4\pi}$$

Como k é um número inteiro, $k \in \{0\}$.

O mínimo da função é atingido nos pontos de abcissa:

$$\left\{\frac{1}{2}\pi + 1\right\}$$

E97I20 Realcoestrig 001

```
%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Dado o cosseno de x determinar a sua tangente

Palavras chave: Funções trigonométricas; tangente; cosseno

%PROBLEM Cosseno e tangente
```

```
Sabendo que $\displaystyle \cos{a}=ina1$  e que $a \in \left[0,\pi\right]$,
determine $\tan{a}$.

%ANSWER
Das relações trigonométricas recorde-se a que relaciona a função tangente
com a função cosseno:
$$1+\tan^2{x}=\frac{1}{\cos^2{x}}$$ e  que permite escrever
$$\tan{x}=\pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2{x}}-1}$$
Como $\cos{a}$ é sgn1@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $a$ é
um ângulo do quadrante1@c{"primeiro","segundo"} quadrante. Neste caso a função
tangente é tang1@c{"positiva","negativa"}, logo,
\[
\tan{a}=sgn2 \sqrt{\frac{1}{\left(ina1\right)^2}-1}
\]
Efetuando os cálculos, vem $$\tan{a}= sgn3 onc1$$
```

```
class E97I20_Relacoestrig_001(Exercise):
    def make_random(s):
        s.ina1=ur.squnif()

    def solve(s):
        s.ona1=numerator(s.ina1)
        s.ona2=denominator(s.ina1)
        s.onb1=1/s.ina1**2-1
        s.onc1=sqrt(s.onb1)
        if s.ina1>0:
            s.sgn1=0
            s.quadrante1=0
            s.tang1=0
            s.sgn2='+'
            s.sgn3=''
        else:
            s.sgn1=1
            s.quadrante1=1
            s.tang1=1
            s.sgn2='-'
            s.sgn3='-'
```

Enunciado:

Sabendo que $\cos a = \dfrac{5}{8}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\tan a$.

Proposta de resolução:

Das relações trigonométricas recorde-se a que relaciona a função tangente com a função cosseno:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e que permite escrever

$$\tan x = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

Como $\cos a$ é positivo, pode afirmar-se que a é um ângulo do primeiro quadrante. Neste caso a função tangente é positiva, logo,

$$\tan a = +\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{5}{8}\right)^2} - 1}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\tan a = \frac{1}{5}\sqrt{39}$$

E97I20 Relacoestrig 002

```
%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Dado o cosseno de x determinar a sua tangente

Palavras chave: Funções trigonométricas; tangente;

%PROBLEM Cosseno e tangente
Sabendo que $\displaystyle \cos{a}=ina1$  e que $a \in \left[\pi, 2\pi\right]$,
 determine $\tan{a}$.

%ANSWER
Das relações trigonométricas recorde-se a que relaciona a função tangente com a
função cosseno:
$$1+\tan^2{x}=\frac{1}{\cos^2{x}}$$
e que permite escrever
$$\tan{x}=\pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2{x}}-1}$$
```

```
Como $\cos{a}$ é sgn1@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $a$ é um
ângulo do quadrante1@c{"terceiro","quarto"} quadrante. Neste caso a função tangente é
 tang1@c{"positiva","negativa"}, logo,
\[
\tan{a}=sgn2 \sqrt{\frac{1}{\left(ina1\right)^2}-1}
\]
Efetuando os cálculos, vem $$\tan{a}= sgn3 onc1$$

class E97I20_Relacoestrig_002(Exercise):
    def make_random(s):
        s.ina1=ur.squnif()

    def solve(s):
        s.onb1=1/s.ina1**2-1
        s.onc1=sqrt(s.onb1)
        if s.ina1>0:
            s.sgn1=0
            s.quadrante1=1
            s.tang1=0
            s.sgn2='+'
            s.sgn3=''
        else:
            s.sgn1=1
            s.quadrante1=0
            s.tang1=1
            s.sgn2='-'
            s.sgn3='-'
```

Enunciado:

Sabendo que $\cos a = \dfrac{3}{7}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determine $\tan a$.

Proposta de resolução:

Das relações trigonométricas recorde-se a que relaciona a função tangente com a função cosseno:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e que permite escrever

$$\tan x = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

Como $\cos a$ é positivo, pode afirmar-se que a é um ângulo do quarto quadrante. Neste caso a função tangente é positiva, logo,

$$\tan a = +\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} - 1}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\tan a = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

Sabendo que $\cos a = \dfrac{5}{8}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\tan a$.

E97I20 Relacoestrig 003

```
%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Dado o cosseno de x determinar o seu seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno; coseno

%PROBLEM Cosseno e seno
Sabendo que $\displaystyle \cos{a}=ina1$  e que $a \in \left[0,\pi\right]$,
determine $\sen{a}$.

%ANSWER
Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria,
pois é fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:
$$\sen^2{x}+\cos^2{x}=1$$
e que permite escrever
$$\sen{(x)}=\pm \sqrt{1-\cos^2{x}}$$
Como $\cos{a}$ é sgn1@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $a$ é um ângulo do
quadrante1@c{"primeiro","segundo"} quadrante. Neste caso a função seno é sin1@c{"positiva"},
 logo,
\[
\sen{a}=sgn2 \sqrt{1-\left(ina1\right)^2}
\]
Efetuando os cálculos, vem $$\sen{a}= sgn3 onc1$$
```

```
class E97I20_Relacoestrig_003(Exercise):
    def make_random(s):
        s.ina1=ur.squnif()

    def solve(s):
        s.onb1=1-s.ina1**2
        s.onc1=sqrt(s.onb1)
        if s.ina1>0:
            s.sgn1=0
            s.quadrante1=0
            s.sin1=0
            s.sgn2='+'
            s.sgn3=''
        else:
            s.sgn1=1
            s.quadrante1=1
            s.sin1=0
            s.sgn2='+'
            s.sgn3=''
```

Enunciado:

Sabendo que $\cos a = -\dfrac{3}{7}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\operatorname{sen} a$.

Proposta de resolução:

Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria, pois é a fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e que permite escrever

$$\operatorname{sen}(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Como $\cos a$ é negativo, pode afirmar-se que a é um ângulo do segundo quadrante. Neste caso a função seno é positiva, logo,

$$\operatorname{sen} a = +\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\operatorname{sen} a = \frac{2}{7}\sqrt{10}$$

Sabendo que $\cos a = \dfrac{3}{7}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determine $\tan a$.

E97I20 Relacoestrig 004

```
%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Dado o cosseno de x determinar o seu seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno; coseno

%PROBLEM Cosseno e seno
Sabendo que $\displaystyle \cos{a}=ina1$  e que $a \in \left[\pi, 2\pi\right]$,
determine $\sen{a}$.

%ANSWER
Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria,
pois é fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:
$$\sen^2{x}+\cos^2{x}=1$$
e que permite escrever $$\sen{(x)}=\pm \sqrt{1-\cos^2{x}}$$
Como $\cos{a}$ é sgn1@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $a$ é um ângulo do
quadrante1@c{"terceiro","quarto"} quadrante. Neste caso a função seno é sin1@c{"negativa"},
 logo,
\[
\sen{a}=sgn2 \sqrt{1-\left(ina1\right)^2}
\]
Efetuando os cálculos, vem $$\sen{a}= sgn3 onc1$$

class E97I20_Relacoestrig_004(Exercise):
    def make_random(s):
        s.ina1=ur.squnif()

    def solve(s):
        s.onb1=1-s.ina1**2
```

```
s.onc1=sqrt(s.onb1)
if s.ina1>0:
    s.sgn1=0
    s.quadrante1=1
    s.sin1=0
    s.sgn2='-'
    s.sgn3='-'
else:
    s.sgn1=1
    s.quadrante1=0
    s.sin1=0
    s.sgn2='-'
    s.sgn3='-'
```

Enunciado:

Sabendo que $\cos a = -\dfrac{5}{9}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determine $\operatorname{sen} a$.

Proposta de resolução:

Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria, pois é a fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e que permite escrever

$$\operatorname{sen}(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Como $\cos a$ é negativo, pode afirmar-se que a é um ângulo do terceiro quadrante. Neste caso a função seno é negativa, logo,

$$\operatorname{sen} a = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)^2}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\operatorname{sen} a = -\frac{2}{9}\sqrt{14}$$

Sabendo que $\cos a = -\dfrac{3}{7}$ e que $a \in [0, \pi]$, determine $\operatorname{sen} a$.

E97I20 relacoestrig 005

`%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas`

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Dado o seno de x determinar o seu cosseno e a sua tangente

Palavras chave: Funções trigonométricas; Relações trigonométricas, Tangente; Cosseno; Seno

```
%PROBLEM Seno, cosseno e tangente
Sabendo que $\displaystyle \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e
$\displaystyle \sen{\alpha}=vsen$. Calcula:
\begin{enumerate}
\item $\cos{\alpha}$,
\item $\tan{\alpha}$.
\end {enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria,
pois é fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:
$$\sen^2{x}+\cos^2{x}=1$$
e que permite escrever
$$\cos{x}=\pm \sqrt{1-\sen^2{x}}$$
Como $\sen{\alpha}$ é sgnsen@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $\alpha$
é um ângulo do quadrante1@c{"segundo","terceiro"} quadrante. Neste caso a
função cosseno é sgncos@c{"positiva", "negativa"}, logo,
\[
\cos{\alpha}=- \sqrt{1-\left(vsen \right)^2} = - \sqrt{cossq}
\]
Efetuando os cálculos, vem $$\cos{\alpha} = vcos$$

\item Das relações trigonométricas recorde-se que $$\displaystyle
\tan{x}= \frac{\sen{(x)}}{\cos{x}},$$ então substituindo os valores do seno e
do cosseno obtemos:
$$\displaystyle \tan{x}= \frac{vsen}{vcos}$$
Isto é, $$\tan{x}= vtan.$$
\end {enumerate}

class E97I20_Relacoestrig_005(Exercise):
```

```
def make_random(s):
    s.vsen=ur.squnif()

def solve(s):
    s.cossq = 1-s.vsen^2
    s.vcos = -sqrt(s.cossq)
    s.vtan = s.vsen/s.vcos
    if s.vsen > 0:
        s.sgnsen = 0 #text: 0 = positive
        s.quadrante1 = 0 #text: 0 =second quadrant
        s.sgncos = 1
    else:
        s.sgnsen = 1 #text: 0 = negativo
        s.quadrante1 = 1 #text: 1 =terceiro quadrante
        s.sgncos = 1
```

Enunciado:

Sabendo que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{6}{7}$. calcula:

1. $\cos\alpha$,
2. $\tan\alpha$.

Proposta de resolução:

1. Das relaçõs trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria, pois é a fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e que permite escrever

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Como $\operatorname{sen}\alpha$ é negativo, pode afirmar-se que α é um ângulo do terceiro quadrante. Neste caso a função coseno é negativa, logo,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{6}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13}{49}}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\cos\alpha = -\frac{1}{7}\sqrt{13}$$

2. Das relações trigonométricas recorde-se que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos x},$$

então substituindo os valores do seno e do cosseno obtemos:

$$\tan x = \frac{-\frac{6}{7}}{-\frac{1}{7}\sqrt{13}}$$

Isto é,

$$\tan x = \frac{6}{13}\sqrt{13}.$$

E97I20 Relacoestrig 006

```
%SUMMARY Funções trigonométricas; Relações trigonométricas
97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
Também pode ser 26A09 Elementary functions
Dado o cos de x determinar o seu seno e a sua tangente

Palavras chave: Funções trigonométricas; Relações trigonométricas, Tangente;
Cosseno; Seno

%PROBLEM Seno, cosseno e tangente
Sabendo que $\displaystyle \alpha \in [0, \pi]$ e $\displaystyle \cos{\alpha}=vcos$. Calcula:
\begin{enumerate}
\item $\sen{\alpha}$,
\item $\tan{\alpha}$.
\end {enumerate}

%ANSWER
\begin{enumerate}
\item Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria,
pois é fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:
$$\sen^2{x}+\cos^2{x}=1$$ e que permite escrever $$\sen{(x)}=\pm \sqrt{1-\cos^2{x}}$$
Como $\cos{\alpha}$ é sgncos@c{"positivo","negativo"}, pode afirmar-se que $\alpha$
é um ângulo do quadrante1@c{"primeiro","segundo"} quadrante. Neste caso a função
seno é sgnsin@c{"positiva", "negativa"}, logo,
\[ \sen{\alpha}= \sqrt{1-\left(vcos \right)^2} = \sqrt{sinsq} \]
Efetuando os cálculos, vem $$\sen{\alpha} = vsin$$
```

```
\item Das relações trigonométricas sabemos que $$\displaystyle \tan{x}= \frac{\sen{(x)}}
{\cos{x}},$$ então substituindo os valores do seno e do cosseno obtemos:
$$\displaystyle \tan{x}= \frac{vsin}{vcos}$$
Isto é, $$\tan{x}= vtan.$$
\end {enumerate}

class E97I20_Relacoestrig_006(Exercise):

    def make_random(s):
        s.vcos = ur.squnif()

    def solve(s):
        s.sinsq = 1-s.vcos^2
        s.vsin = sqrt(s.sinsq)
        s.vtan = s.vsin/s.vcos
        if s.vcos > 0:
            s.sgncos = 0 #text: 0 = positive
            s.quadrante1 = 0 #text: 0 =primeiro quadrante
            s.sgnsin = 0
        else:
            s.sgncos = 1 #text: 1 = negativo
            s.quadrante1 = 1 #text: 1 =segundo quadrante
            s.sgnsin = 0
```

Enunciado:

Sabendo que $\alpha \in [0, \pi]$ e $\cos \alpha = \frac{2}{9}$. calcula:

1. $\operatorname{sen} \alpha$,
2. $\tan \alpha$.

Proposta de resolução:

1. Das relações trigonométricas recorde-se da fórmula fundamental da trigonometria, pois é a fórmula que relaciona a função seno com a função coseno:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e que permite escrever

$$\operatorname{sen}(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

Como $\cos\alpha$ é positivo, pode afirmar-se que α é um ângulo do primeiro quadrante. Neste caso a função seno é positiva, logo,

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{77}{81}}$$

Efetuando os cálculos, vem

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{9}\sqrt{77}$$

2. Das relaçes trigonométricas recorde-se que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos x},$$

então substituindo os valores do seno e do cosseno obtemos:

$$\tan x = \frac{\frac{1}{9}\sqrt{77}}{\frac{2}{9}}$$

Isto é

$$\tan x = \frac{1}{2}\sqrt{77}.$$

E97I20 ConversaoGrausRad 002

```
%SUMMARY Trigonometria; Conversão radianos-graus
Conversão da medida de ângulos em graus para ângulos em radianos.
97I20 Mappings and functions
Palavras chave: Conversão de graus em radianos. Conversão de ângulos.

%PROBLEM Conversão2
Determina a medida do ângulo $a1^o$ em radianos.

%ANSWER
A relação que existe entre graus e radianos é a seguinte:
$$\frac {\pi \,rad}{180^o}=\frac {\theta \,rad}{x^o}$$
Então $$\frac {\pi}{180}=\frac {\theta}{a1}
\Leftrightarrow \theta=\frac {a1}{180} \pi \Leftrightarrow \theta=b1 \pi \, rad$$

class E97I20_ConversaoGrausRad_002(Exercise):
    """Neste exercício convertem-se medidas de ângulos em radianos para graus"""
    def make_random(s):
        x=var('x')
```

```
        y=var('y')
        s.a1=ur.iunif_nonset(0,999,[0])

    def solve(s):
        s.b1=s.a1/180
```

Enunciado:

Determina a medida do ângulo 883^o em radianos.

Proposta de resolução:

A relação que existe entre graus e radianos é a seguinte:

$$\frac{\pi\, rad}{180^o} = \frac{\theta\, rad}{x^o}$$

Então

$$\frac{\pi}{180} = \frac{\theta}{883} \Leftrightarrow \theta = \frac{883}{180}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{883}{180}\pi\, rad$$

E97I20 ConversaoRadGraus 001

```
%SUMMARY Trigonometria; Conversão radianos-graus
Conversão da medida de ângulos em radianos para ângulos em graus.
97I20 Mappings and functions
Palavras chave: Conversão de radianos em graus. Conversão de ângulos.

%PROBLEM Conversão1
Determina a medida do ângulo $c1 \pi$ em graus.

%ANSWER
A relação que existe entre radianos e graus é a seguinte:
$$\frac {\pi \,rad}{180^o}=\frac {\theta \,rad}{x^o}$$
Então
$$\frac {\pi}{180}=\frac {c1 \pi}{x}  \Leftrightarrow x=\frac {180}{\pi}
\times c1 \pi \Leftrightarrow x=d1^o$$

class E97I20_ConversaoRadGraus_001(Exercise):
    """Neste exercício convertem-se medidas de ângulos em radianos para graus"""
```

```
def make_random(s):
    x=var('x')
    y=var('y')
    s.a1=ur.iunif_nonset(0,99,[0])
    s.b1=ur.iunif(2,99)
    s.c1=s.a1/s.b1

def solve(s):
    s.d1=180*s.c1
```

Enunciado:

Determina a medida do ângulo $\frac{92}{71}\pi$ em graus.

Proposta de resolução:

A relação que existe entre radianos e graus é a seguinte:

$$\frac{\pi\, rad}{180^o} = \frac{\theta\, rad}{x^o}$$

Então

$$\frac{\pi}{180} = \frac{\frac{92}{71}\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{180}{\pi} \times \frac{92}{71}\pi \Leftrightarrow x = \frac{16560}{71}^o$$

E97I20 Amplitudearco 001

```
%SUMMARY Trigonometria; Amplitude de um arco
Amplitude de um arco de circunferência. 97I20 Mappings and functions
Palavras chave: Amplitude do arco sabendo o comprimento. Arco de circunferência

%PROBLEM Amplitude1
O raio de uma circunferência é igual a $r1 \,cm$. Qual é a amplitude, em radianos
e em graus, de um arco da circunferência cujo comprimento é $c1 \,cm$?
Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

%ANSWER
Em radianos\\
Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c=r\times\theta$.
Então substituindo vem,
```

```
$$c1=r1 \times \theta \Leftrightarrow \theta=\frac{c1}{r1} \Leftrightarrow
\theta= f1 \,rad$$

Em graus\\
Sabemos que o comprimento de um arco é dado por
$c=\dfrac{r \times \alpha^o \times \pi}{180^o}$.
Então substituindo vem, $$c1=\frac{r1 \times \alpha \times \pi}{180} \Leftrightarrow
\alpha= \dfrac{c1 \times 180}{r1 \times \pi} \Leftrightarrow
\alpha=g1 \Leftrightarrow \alpha= h1^o$$

class E97I20_Amplitudearco_001(Exercise):
    """Neste exercício calcula-se a amplitude de um arco (em graus e em radianos),
    sabendo o raio e o comprimento do arco de uma circunferência"""
    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
        s.r1=ur.iunif(1,10)
        s.c1=ur.iunif(10,25)

    def solve(s):
        s.e1=s.c1/s.r1
        s.f1=round (s.e1,2)
        s.g1=(s.c1*180)/(s.r1*pi)
        s.h1=round (s.g1,2)
```

Enunciado:

O raio de uma circunferência é igual a $4\,cm$. Qual é a amplitude, em radianos e em graus, de um arco da circunferência cujo comprimento é $24\,cm$? Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

Proposta de resolução:

Em radianos: Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c = r \times \theta$. Então substituíndo vem,

$$24 = 4 \times \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{24}{4} \Leftrightarrow \theta = 6.0\,rad$$

Em graus: Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c = \dfrac{r \times \alpha^o \times \pi}{180^o}$. Então substituindo vem,

$$24 = \frac{4 \times \alpha \times \pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{24 \times 180}{4 \times \pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1080}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = 343.77^o$$

E97I20 Comprimentoarcograu 001

```
%SUMMARY Trigonometria; Comprimento de um arco
Comprimento de um arco de circunferência. 97I20 Mappings and functions

Palavras chave: Comprimento de um arco. Arco de circunferência

%PROBLEM Comprimento2
Considera uma circunferência de raio igual a $r1$ cm. Calcula o comprimento do arco
da circunferência de amplitude $a1 ^o$. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

%ANSWER
Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c=r\times\theta$\times\dfrac{\pi}{180^o}$.
Então substituindo vem, $$c=r1 \times a1 \times \frac{\pi}{180}
 \Leftrightarrow c= e1 \Leftrightarrow c= f1 \,cm$$

class E97I20_Comprimentoarcograu_001(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
        s.a1=ur.iunif_nonset(0,359,[0])
        s.r1=ur.iunif(1,20)

    def solve(s):
        s.e1=s.r1*s.a1*pi/180
        s.f1=round (s.e1,2)
```

Enunciado:

Considera uma circunferência de raio igual a 4 cm. Calcula o comprimento do arco da circunferência de amplitude 121^o. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

Proposta de resolução:

Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c = r \times \theta \times \dfrac{\pi}{180^o}$. Então substituindo vem,

$$c = 4 \times 121 \times \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow c = \frac{121}{45}\,\pi \Leftrightarrow c = 8.45\,cm$$

E97I20 Comprimentoarcograu 001

```
%SUMMARY Trigonometria; Comprimento de um arco
Comprimento de um arco de circunferência. 97I20 Mappings and functions
Palavras chave: Comprimento de um arco. Arco de circunferência

%PROBLEM Comprimento1
Considera uma circunferência de raio igual a $d1$ cm. Calcula o comprimento do arco da
circunferência de amplitude $\displaystyle c1 \pi$. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

%ANSWER
Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c=r\times\theta$. Então substituindo
vem, $$c=d1 \times \frac{a1}{b1} \pi \Leftrightarrow c= e1 \Leftrightarrow c= f1 \,cm$$



class E97I20_Comprimentoarcorad_001(Exercise):
"""Neste exercício calcula-se o comprimento de um arco de circunferência"""
            def make_random(s):
                x=var('x')
                y=var('y')
                s.a1=ur.iunif_nonset(0,99,[0])
                s.b1=ur.iunif(2,99)
                s.d1=ur.iunif(1,20)
                s.c1=s.a1/s.b1

            def solve(s):
                s.e1=s.d1*s.c1*pi
                s.f1=round (s.e1,2)
```

Enunciado:

Considera uma circunferência de raio igual a 13 cm. Calcula o comprimento do arco da circunferência de amplitude $\dfrac{16}{9}\pi$. Apresenta o resultado com 2 casas decimais.

Proposta de resolução:

Sabemos que o comprimento de um arco é dado por $c = r \times \theta$. Então substituíndo vem,

$$c = 13 \times \frac{16}{9}\pi \Leftrightarrow c = \frac{208}{9}\pi \Leftrightarrow c = 72.61\,cm$$