Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano letivo 2012/2013

JOÃO MIGUEL RAFAEL DE CARVALHO

JOGOS DE SUBTRAÇÃO E OUTROS JOGOS COMBINATÓRIOS

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano letivo 2012/2013

JOÃO MIGUEL RAFAEL DE CARVALHO

JOGOS DE SUBTRAÇÃO E OUTROS JOGOS COMBINATÓRIOS

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Doutor Rui Duarte, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

o júri

Presidente	Prof. Doutor Manuel António Gonçalves Martins Professor Auxiliar na Universidade de Aveiro
Arguente	Prof. Altino Manuel Folgado dos Santos Professor Auxiliar na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Orientador	Prof. Rui Filipe Alves Silva Duarte Professor Auxiliar na Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:
- Ao professor Rui Duarte por me ter orientado ao longo de todo o trabalho que fizemos, e por ter feito sempre os possíveis para encontrar disponibilidade para me ajudar, mesmo quando estava ocupado.

- À minha família, por nunca me ter colocado barreiras e ter apoiado em tudo o que decidi fazer. Em especial ao meu tio *Quel*, por me ter ajudado imenso ao longo de todo o percurso académico.

- Ao meu colega e amigo Pedro Nora, por me ter ajudado a rever a prova e feito companhia nas maçadoras tardes na biblioteca.

- Por fim, à minha namorada Alice, simplesmente por fazer parte da minha vida e torná-la melhor.

palavras-chave

Jogos combinatórios,jogos de subtração, teoria de jogos, combinatória, Nim, Sperner, Ramsey, Fibonacci Nim, Nim de Moore

Resumo

A teoria dos jogos tem como objetivo modelar fenómenos que podem ser observados quando vários jogadores interagem. Esta dissertação explora diversos conceitos da teoria dos jogos aplicados a jogos combinatórios. Jogos combinatórios são jogos de informação completa, jogados por dois jogadores alternadamente, onde não existe a possibilidade de empate. Usando conceitos como os de P-posição e N-posição, são analisados matematicamente vários jogos combinatórios, com o objetivo de encontrar uma estratégia vencedora para um dos jogadores. Ao longo do documento, é dado um ênfase especial aos jogos de subtração, como o jogo do Nim e várias das suas variantes. Para isso, é utilizado como um auxílio para detetar padrões, um simples algoritmo classificador de posições implementado em C#.

Keywords

Combinatorial games,subtraction games, game theory, combinatorics, Nim, Sperner, Ramsey, Fibonacci Nim, Moore's Nim

Abstract

Game theory aims to model phenomena that can be observed when various players interact. This dissertation explores diverse concepts of game theory applied to combinatorial games. Combinatorial games are games of complete information, played by two players alternately where there isn't the possibility of a tie. Using concepts such as P-position and N-position, several combinatorial games are analyzed mathematically in order to find a winning strategy for one player. Throughout the document we put a special emphasis on subtraction games, like the Nim's and several of its variants. For this purpose, it's used as an aid to detect patterns, a simple positions' classifier algorithm implemented in C#.

Conteúdo

Introdução

A teoria de jogos é uma teoria matemática pura, que tem como propósito modelar fenómenos que podem ser observados quando dois ou mais jogadores (usualmente designados agentes) interagem entre si. Também pode ser definida como a teoria de modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. [21] É usada para estudar vários fenómenos presentes nas nossas vidas, como: eleições, evolução genética, leilões, entre outros.

Alguns matemáticos acreditam que um dia a teoria de jogos será o alicerce de um conhecimento técnico de como as decisões são tomadas e de como a economia funciona. No entanto, ainda não foi atingido esse patamar e é normalmente utilizada apenas para analisar jogos matemáticos, sendo usada como um auxílio para o entendimento de sistemas mais complexos.

Usualmente, quando alguém se refere à teoria de jogos refere-se a fenómenos em que ambos os jogadores têm que tomar uma decisão que depende das decisões do oponente, como o Dilema do Prisioneiro (cf.)[19], ou mesmo *jogos de azar*, como o Poker, Blackjack, ou qualquer jogo que envolva aleatoriedade.

Ao longo desta dissertação não iremos abordar esse tipo de fenómenos. Iremos apenas focar-nos em jogos combinatórios, que são jogos de *informação completa*. Isto é, jogos em que ambos os jogadores têm acesso a toda a informação que exista sobre o jogo, sendo portanto possível fazer uma análise matemática rigorosa de qual a melhor estratégia a adotar por cada um dos jogadores. Para além disso, para um jogo ser designado *jogo combinatório*, tem que cumprir determinadas condições como, por exemplo, terminar num número finito de jogadas.

Começamos por introduzir conceitos iniciais, como o de *posição* de um jogo, que podem ser classificadas, de acordo com determinados critérios, retirando-se informação dessa classificação acerca que qual dos jogadores está em vantagem. Utilizando apenas as condições iniciais do jogo bem como as suas regras, provamos que existe sempre uma estratégia vencedora para algum dos jogadores, indicando especificamente para qual deles existe essa estratégia.

De seguida damos exemplos de jogos, como o jogo de Ramsey e o jogo de Sperner e provamos que ambos são jogos combinatórios. Exploramos também com algum detalhe vários *jogos de subtração*, que são uma classe de jogos combinatórios em que dois jogadores retiram, alternadamente, objetos de uma ou mais pilhas de objetos até que a pilha esteja vazia, ou não existam mais jogadas possíveis segundo as regras desse jogo específico. Um desses jogos é o jogo do *Nim*, que tem uma forte teoria matemática desenvolvida há mais de um século atrás.

Terminamos com alguns conceitos mais avançados, que podem auxiliar a descoberta da estratégia vencedora de jogos combinatórios, mesmo aqueles que não são estudados neste documento (por exemplo, o *Hackenbush* [2]).

Capítulo 1

Jogos Combinatórios

Um *Jogo Combinatório* é um jogo que satisfaz as seguintes condições:

1. É jogado por dois jogadores.

2. Existe um conjunto, geralmente finito, de possíveis posições do jogo.

3. Para cada jogador e para cada posição, estão definidos que movimentos são permitidos para outras posições.

4. Os jogadores fazem movimentos alternadamente.

5. O jogo termina quando a posição atual é uma posição em que não existem mais movimentos possíveis. A tal posição dá-se o nome de posição terminal.

6. O jogo termina sempre num número finito de movimentos.

Se as regras não fizerem distinção entre os jogadores, ou seja, se ambos tiverem as mesmas jogadas possíveis a partir de cada posição, o jogo chama-se *imparcial*. Caso contrário, chama-se *partizan*.

Ao ser atingida uma posição terminal, na versão *normal*, o último jogador que fez um movimento é o jogador vencedor. Na versão *misère* o último jogador a fazer um movimento perde.[14] Sempre que não se disser quais as regras que estão a ser usadas, partiremos do princípio que são as regras normais.

Dizemos que um determinado estado de um jogo é uma *posição*. Essas posições podem ser classificadas como *P-posições* [1] ou *N-posições* [2], sendo a classificação definida recursivamente do seguinte modo:

1. Todas as posições terminais são P-posições se o jogo for jogado na *versão normal* ou são N-posições na *versão misère*.

2. Para cada N-posição, existe pelo menos um movimento para uma P-posição.

3. Para cada P-posição, qualquer movimento origina uma N-posição.

A ideia é que o jogador que jogue para uma P-posição tem uma estratégia que lhe permite vencer o jogo, independentemente das acções do seu oponente. Iremos explorar estes conceitos em maior detalhe no capítulo dos jogos de subtração.

[1] P de Previous player

[2] N de Next Player

1.1 Jogo de Ramsey

O jogo de Ramsey, também conhecido como jogo de SIM [22] [3] consiste num jogo de dois jogadores, em que cada um dos jogadores tem uma caneta de cor diferente. Numa folha estão desenhados seis pontos (sem existirem três que sejam colineares). Cada um dos jogadores traça, alternadamente, um segmento de reta com a sua caneta, que una dois pontos não unidos anteriormente. O primeiro jogador a completar um triângulo cujos lados tenham todos a mesma cor, perde. Ver, por exemplo, [11].

Teorema 1.1.1 (Princípio da Gaiola dos Pombos [4])**.** *Se n bolas forem distribuídas por m caixas, onde $n > m$, então existe pelo menos uma da caixa com pelo menos 2 bolas.*

Ou de um modo mais geral:

Teorema 1.1.2 (Princípio da Gaiola dos Pombos Generalizado)**.** *Se n bolas forem distribuídas por m caixas, onde $n > k \cdot m$, então existe pelo menos uma caixa com pelo menos $k+1$ bolas.*

Proposição 1.1.3. *Suponhamos que as arestas que ligam 2 vértices distintos, de um grafo completo com 6 vértices, estão coloridos com azul ou vermelho. Então, existe um subgrafo K_3 (triângulo) cujas arestas têm a mesma cor. [5]*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_6$ os vértices do grafo. Consideremos as cinco arestas $v_1v_6, v_2v_6, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_6$. Pelo Princípio da Gaiola dos Pombos (com $n = 5$ e $m = 2$) existem pelo menos três arestas com a mesma cor.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que v_1v_6, v_2v_6 e v_3v_6 são vermelhas. Então, existem duas possibilidades: se alguma das arestas v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 for vermelha, existe um triângulo vermelho; caso contrário, se nenhuma das três arestas é vermelha, então v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 é um triângulo azul.

□

[3] Gustavus J. Simmons (1930-) - matemático Americano

[4] Também conhecido como Princípio de Dirichlet

O resultado também se aplica para grafos completos com mais que 6 vértices. Basta notar que qualquer grafo desse tipo contém um subgrafo completo com 6 vértices, que contém algum triângulo com todas as arestas da mesma cor, como provámos.

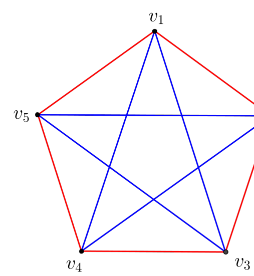

Figura 1.1: Grafo completo com 5 vértices sem triângulos com todas as arestas da mesma cor.

O *número de Ramsey* $R(p, q)$ é o menor inteiro positivo v tal que colorindo as arestas do grafo simples completo com v vértices, utilizando as cores C_1 e C_2, existe um subgrafo K_p com as arestas de cor C_1 ou um subgrafo K_q com as arestas de cor C_2.

De uma forma mais geral, diz-se um *número de Ramsey* e representa-se por $R(p_1, \ldots, p_n)$, ao menor inteiro positivo v tal que colorindo as arestas do grafo simples completo K_v, utilizando as cores $C_1, \ldots, C_n$, existe um subgrafo K_{p_i} com as arestas de cor C_i.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Ramsey [20])**.** *Dados os inteiros $p_1, \ldots, p_k$, existe um inteiro positivo mínimo, $R(p_1, \ldots, p_k)$, tal que, para $v \geq R(p_1, \ldots, p_k)$, colorindo as arestas de K_v com as cores $1, \ldots, k$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ e um subgrafo de K_v, completo, K_{p_i}, com as arestas de cor i.*

É de notar que $R(3, 3) = 6$ corresponde ao jogo de Ramsey. No caso geral, $R\underbrace{(3, 3, \ldots, 3)}_{n}$ referimo-nos ao mesmo jogo, jogado com n jogadores, mas em que apenas existe condição de paragem - quando algum jogador completar um triângulo. Nada é dito acerca da condição de vitória, ou seja, não se sabe qual dos outros jogadores é o vencedor. Por exemplo, $k = R\underbrace{(3,3,\ldots,3)}_{n}$ é o número mínimo de vértices necessários para, jogando o jogo de Ramsey com n jogadores, um deles tenha, obrigatoriamente, que formar um triângulo da sua cor.

Seja $R_n = R\underbrace{(3,3,\ldots,3)}_{n}$. Consegue encontrar-se um majorante para o valor de R_n que é $n(R_{n-1}-1)+2$, para $n \geq 1$.

O exemplo da figura 1.2 ilustra um grafo K_{16}, cujas arestas estão coloridas com três cores distintas, não contendo triângulos com as três arestas da mesma cor.

Pelo exemplo, concluímos que, para garantir que um grafo completo, colorido com 3 cores, contém pelo menos um triângulo com todos os lados com a mesma cor, o número de vértices do grafo tem que ser superior a 16, ou seja, $R_3 > 16$, no entanto, $R_3 \leq 17$. Portanto, concluímos que $R_3 = 17$.

Em [15] prova-se que existe uma estratégia vencedora no jogo de Ramsey para o segundo jogador.

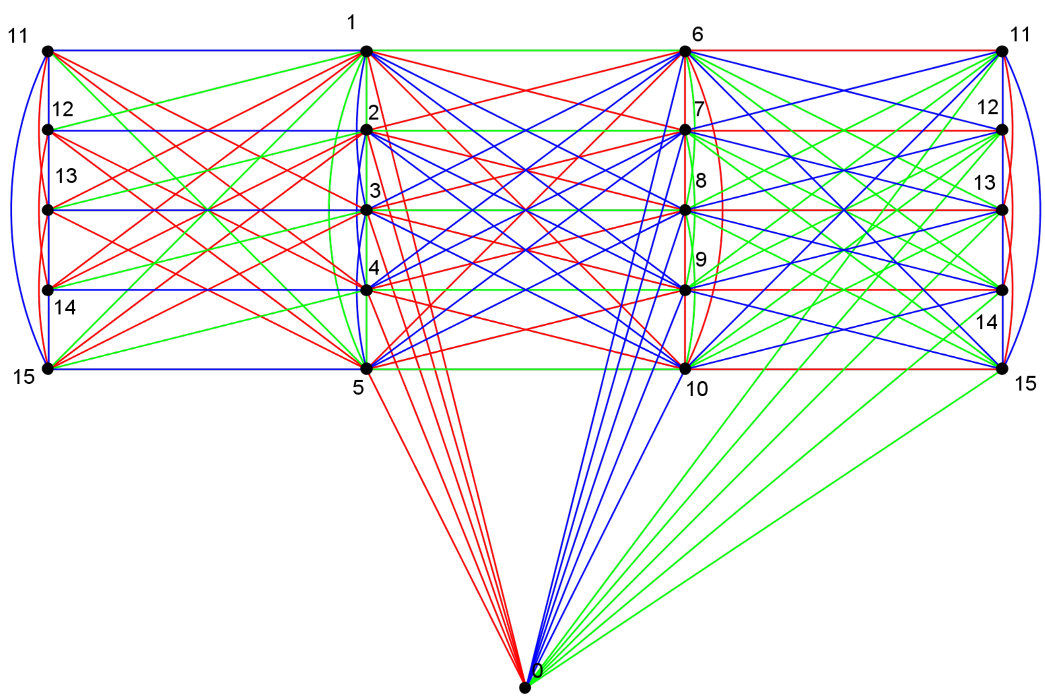

Figura 1.2: Coloração do grafo completo K_{16} sem triângulos com as arestas da mesma cor [10]

1.2 Jogo de Sperner

O jogo de Sperner[5] joga-se num tabuleiro triangular sub-dividido noutros triângulos. Cada canto do tabuleiro tem a sua própria cor, por exemplo, vermelho, azul e amarelo.

Neste jogo, uma jogada consiste em pintar um vértice de algum dos triângulos com uma cor, mas existem duas regras: se o vértice a ser pintado pertencer a um dos lados que delimita o tabuleiro, então esse vértice só pode ser pintado com uma das duas cores que já estão nos extremos desse lado; caso contrário, pode ser pintado com qualquer uma das três cores. [1] O jogador que completar um triângulo com vértices de cores diferentes perde.

Ao longo deste capítulo, por uma questão de simplicidade, não iremos colorir os vértices, mas apenas rotulá-los com os números 0, 1 e 2.

Uma *triangulação* $\mathcal{T}$ de um triângulo T é um conjunto de triângulos que cobrem exatamente T e se intersetam mutuamente apenas ao longo das suas arestas. Seja $V(\mathcal{T})$ a união dos vértices dos triângulos que cobrem T.

Os vértices v_0, v_1 e v_2 estão rotulados com os números 0, 1 ou 2, respetivamente. É também de realçar que qualquer vértice na aresta v_iv_j ou tem rótulo i ou j.

Um triângulo cujos vértices tenham três rótulos distintos diz-se um *triângulo multicolorido.*

Para garantir que o jogo de Sperner é um jogo combinatório, é necessário provar que o jogo nunca termina em empate.

Lema 1.2.1 (Lema de Sperner [23])**.** *Seja T um triângulo com vértices v_0, v_1, v_2. Seja $\mathcal{T}$ uma triangulação de T e $V(\mathcal{T})$ os seus vértices. Consideremos uma qualquer rotulação de $V(\mathcal{T})$ com os números $\{0, 1, 2\}$ tal que:*

[5] Emanuel Sperner (1905–1980) - Matemático alemão

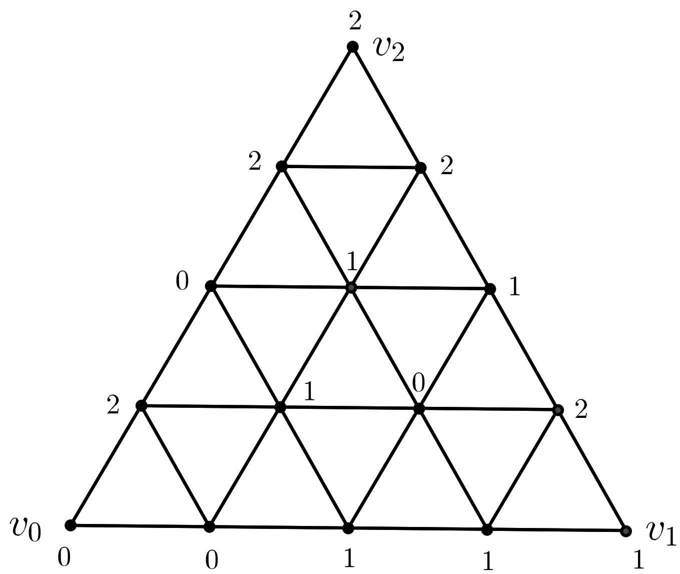

Figura 1.3: Exemplo de rotulação válida em $V(\mathcal{T})$

1. v_i é rotulado com $i \in \{0, 1, 2\}$.

2. Se $v \in V(\mathcal{T})$ se encontrar no segmento que une v_i e v_j com $i, j \in \{0, 1, 2\}$, com $i \neq j$, o rótulo de v ou é i ou j.

Então o número total de triângulos multicoloridos na triângulação $\mathcal{T}$ é ímpar e, portanto, existe pelo menos um triângulo multicolorido em $\mathcal{T}$ [7]. [6]

Demonstração. Seja G o grafo construído a partir de $\mathcal{T}$ tal que:

1. G tem um vértice a_t para cada triângulo $t \in \mathcal{T}$.

2. G tem um vértice adicional a_0, correspondente à parte exterior do triângulo T.

3. Os vértices a_t e $a_{t'}$ partilham uma aresta se e só se t e t' partilham uma aresta cujos vértices incidentes tenham os rótulos 0 e 1.

4. a_0 está ligado a todos os triângulos que tenham uma aresta ao longo do segmento incidente a v_0 e v_1 com rótulos 0 e 1.

[6] Este resultado pode ser utilizado para deduzir o Teorema do ponto fixo de Brouwer (cf.[3]).

A Figura 1.3 ilustra o grafo obtido desta forma.

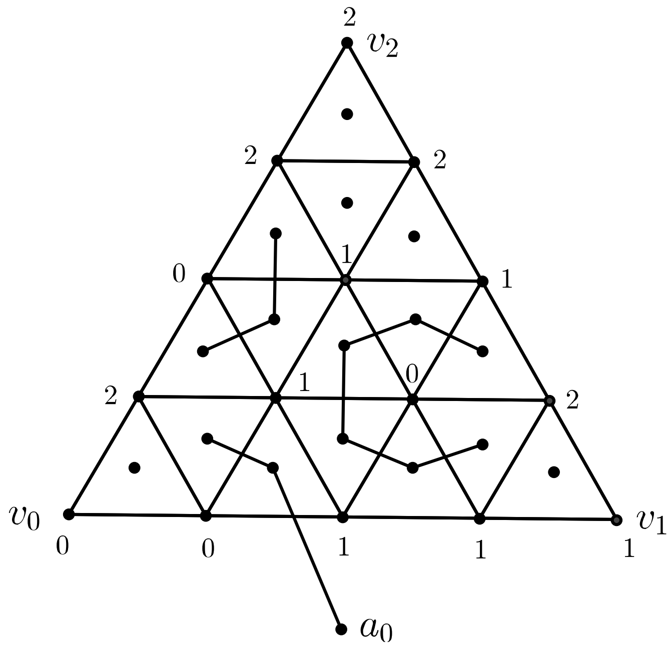

Figura 1.4: Grafo obtido através da construção anterior para o grafo da Figura 1.2

Note-se que a_0 tem grau ímpar: seja α o número de transições do rótulo 0 para o rótulo 1 quando se percorre o segmento de reta entre v_0 e v_1 e β o número de transições do rótulo 1 para o rótulo 0. Então $\alpha = \beta + 1$ e daqui resulta que o grau do vértice a_0 é ímpar pois grau$(a_0) = \alpha + \beta = 2\alpha - 1 = 2\beta + 1$. Como ilustração, pode observar-se a figura seguinte, construída a partir de [13].

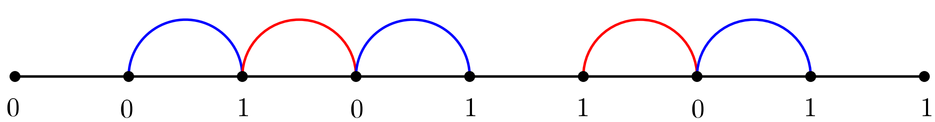

Figura 1.5: Transições de 0 para 1 e vice-versa

Como num grafo, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, o número de vértices de grau ímpar é par. Portanto o número de vértices com grau ímpar além de a_0 tem que ser ímpar. Mas para qualquer $t \in \mathcal{T}$, grau(a_t) só pode ser 0, 1 ou 2. Logo, um vértice de grau ímpar tem necessariamente que ser de grau 1. Um vértice tem grau 1 se e só se ele for multicolorido, como se pode ver na figura 1.5:

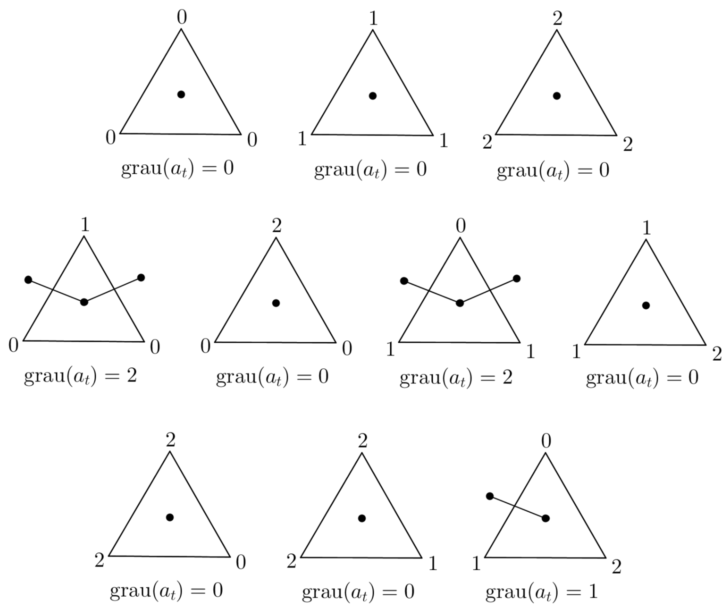

Figura 1.6: Valores possíveis para grau(a_t)

Portanto, o número de triângulos multicoloridos é ímpar, provando assim a existência de pelo menos um. $\square$

Da prova anterior concluímos que um jogo de Sperner nunca termina em empate, sendo portanto um jogo combinatório.

Capítulo 2

Jogos de Subtração

Os jogos de subtração são jogos que envolvem um conjunto finito S de inteiros positivos em que o conjunto S é chamado conjunto de subtração e ambos os jogadores removem alternadamente alguns s blocos de uma ou mais pilhas, de modo que $s \in S$.[12] O conjunto S pode ser fixo durante todo o jogo ou alterar a cada jogada, conforme as regras do jogo de subtração em questão.

2.1 Jogo do Nim 21

Este é um dos jogos de subtração mais simples, pelo que serve como um bom exemplo introdutório.

As regras do jogo são as seguintes:

1. Existem dois jogadores (jogador A e jogador B).

2. Existe uma pilha com 21 blocos.

3. Uma jogada (ou movimento) consiste em retirar um, dois ou três blocos da pilha ($S = \{1, 2, 3\}$).

4. O jogador A é o primeiro a jogar e, a partir daí, alternam as jogadas entre si.

5. O jogador que retirar o último bloco ganha.

Análise do Jogo:

Vamos analisar este jogo do fim para o ínicio, visto que utilizaremos a definição recursiva de P-posição e N-posição, definida anteriormente.

Se não existir nenhum bloco restante na pilha, então chamamos a essa posição uma posição terminal e, portanto, é uma P-posição.

Se existirem um, dois ou três blocos restantes na pilha, então o próximo jogador pode jogar para a posição terminal, logo, as posições 1, 2 e 3 são N-posições, pois a partir delas é possível atingir uma P-posição. Se existirem quatro blocos na pilha só é possível jogar para N-posições, logo, 4 é P-posição.

Seja x o número de blocos na pilha. Visto que este é um jogo simples, poderíamos repetir o processo descrito anteriormente e obter a Tabela 2.1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Posição	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N

Tabela 2.1: Posições do Nim 21

Lema 2.1.1. *No jogo do Nim 21, sob as regras normais, as posições que são múltiplas de 4 são P-posições e as restantes são N-posições.*

Demonstração. Vamos provar por indução.

Caso base: Para $k = 0$, já provámos que a posição 0 é uma P-posição e que as posições 1, 2 e 3 são N-posições.

Hipótese de indução: $4k$ é P-posição e $4k + 1$, $4k + 2$ e $4k + 3$ são N-posições.

Tese: $4(k + 1)$ é P-posição e $4(k + 1) + 1$, $4(k + 1) + 2$ e $4(k + 1) + 3$ são N-posições.

Demonstração do caso geral: Da posição $4(k + 1)$ os únicos movimentos possíveis que temos são para as posições: $4k + 3$, $4k + 2$ e $4k + 1$, retirando uma, duas ou três peças, respectivamente. Mas como essas posições são N-posições, podemos afirmar que $4(k + 1)$ é P-posição.

Das posições $4(k+1)+1$, $4(k+1)+2$ e $4(k+1)+3$, podemos, removendo um, dois ou três blocos, respectivamente, mover-nos para a posição $4(k+1)$. Mas como $4(k+1)$ é uma P-posição, podemos afirmar que $4(k+1)+1$, $4(k+1)+2$ e $4(k+1)+3$ são N-posições. □

Como a posição inicial do jogo tem 21 blocos na pilha, o primeiro jogador está em vantagem pois, retirando um bloco da pilha, consegue jogar para uma P-posição. Isto é suficiente para provar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora no Nim 21. Basta notar que a partir de uma P-posição, o segundo jogador apenas vai conseguir jogar para N-posições, a partir das quais é possível jogar para uma P-posição novamente. Repetindo este processo até que não haja mais blocos na pilha, o primeiro jogador vence, pois é ele quem atinge a posição terminal (P-posição).

2.1.1 Generalização do Nim 21

As regras do jogo são semelhantes às do Nim 21, com a diferença que cada jogador pode retirar até M blocos da pilha, em cada jogada, ou seja, $S = \{1, 2, \ldots, M\}$ de uma pilha com $k \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1.2. *Na generalização do jogo do Nim 21, sob as regras normais, as posições que são múltiplas de $M + 1$ são P-posições e as restantes são N-posições.*

A prova do Lema é análoga à do Lema 2.1.1.

Portanto, se no início do jogo existirem k blocos na pilha e $k \not\equiv 0 \pmod{M+1}$, então o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora que consiste em jogar sempre para as posições cuja posição é um múltiplo de $M + 1$. Caso contrário (se $k \equiv 0 \pmod{M+1}$), o segundo jogador tem uma estratégia vencedora, que consiste em, após a jogada inicial do primeiro jogador, aplicar a estratégia vencedora que ele utilizaria.

2.2 Casos particulares de conjuntos S de Subtração

Sejam $S = \{1, 2, \ldots, M\}$ e $S_i = S \backslash \{i\}$ com $i \in \{1, 2, ..., M-1\}$. Vamos analisar casos particulares deste tipo de jogo:

Caso S_2

$S_2 = \{1, 3, \ldots, M\}$

Analisando este jogo concluímos que x é P-posição se e só se:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 2 & \text{se } M < 4 \\ x \equiv 0 \pmod{M+3} \text{ ou } x \equiv 2 \pmod{M+3} & \text{se } M \geq 4 \end{cases}$$

Exemplo 1: Seja $S = \{1, 3\}$, ou seja, $M = 3$. Vamos analisar as posições deste jogo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
Posição	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P	$\cdots$

Tabela 2.2: Posições do jogo de subtração S_2 com $M = 3$

Concluímos que no jogo de subtração $S = \{1, 3\}$, uma posição é P-posição se e só se $x \equiv 0 \pmod 2$

Exemplo 2: Seja $S = \{1, 3, 4, 5\}$, ou seja, $M = 5$. Vamos analisar as posições deste jogo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	P	N	N	N	N	N	P	N	P
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	···
Posição	N	N	N	N	N	P	N	P	N	N	···

Tabela 2.3: Posições do jogo de subtração S_2 com $M = 5$

Concluímos que no jogo de subtração $S = \{1, 3, 4, 5\}$, uma posição x é P-posição se e só se $x \equiv 0 \pmod 8$ ou $x \equiv 2 \pmod 8$.

Caso S_3

$S_3 = \{1, 2, 4 \ldots, M\}$

Analisando este jogo concluímos que x é P-posição se e só se:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 & \text{se } M < 6 \\ x \equiv 0 \pmod{M+4} \text{ ou } x \equiv 2 \pmod{M+4} & \text{se } M \geq 6 \end{cases}$$

Exemplo 1: Seja $S = \{1, 2, 4\}$, ou seja, $M = 4$. Vamos analisar as posições deste jogo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	···
Posição	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N	···

Tabela 2.4: Posições do jogo de subtração S_3 com $M = 4$

Concluímos que no jogo de subtração $S = \{1, 2, 4\}$, uma posição x é P-posição se e só se $x \equiv 0 \pmod 3$

Exemplo 2: Seja $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, ou seja, $M = 6$. Vamos analisar as posições deste jogo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	P	N	N	N	N	N	N	N	P
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
Posição	N	P	N	N	N	N	N	N	N	P	$\cdots$

Tabela 2.5: Posições do jogo de subtração S_3 com $M = 6$

Concluímos que no jogo de subtração $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, uma posição x é P-posição se e só se $x \equiv 0 \pmod{10}$ ou $x \equiv 2 \pmod{10}$

Caso S_i

Lema 2.2.1. *Seja $S_i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, M\}, 1 < i < M$*

Nesta classe de jogos, as P-posições são as posições x em que:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{i} & \textit{se } M < 2 \times i \\ x \equiv 0 \pmod{M+i+1} \textit{ ou } x \equiv i \pmod{M+i+1} & \textit{se } M \geq 2 \times i \end{cases}$$

Demonstração.

Se $M < 2 \times i$:

1. A posição 0 é a única posição terminal e verifica a condição $x \equiv 0 \pmod{i}$.

2. A partir de uma posição $x \equiv 0 \pmod{i}$, para obter uma posição com a mesma forma, seria necessário retirar i blocos da pilha ($M < 2i$). Mas $i \notin S$, portanto, qualquer movimento é para uma posição tal que $x \not\equiv 0 \pmod{i}$.

3. A partir de uma posição $x \equiv c \pmod{i}$ é sempre possível jogar para uma posição $x \equiv 0 \pmod{i}$. Basta remover c blocos à pilha, visto que $c < i$ e portanto $c \in S$.

Se $M \geq 2 \times i$:

1. A posição 0 é a única posição terminal e verifica a condição $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$.

2. A partir de uma posição $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$, para obter uma posição do tipo $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \equiv i \pmod{M+i+1}$ seria necessário remover $M+i+1$ ou $M+1$ (porque $(M+1)+i \equiv 0 \pmod{M+i+1}$) blocos, respetivamente. Mas, $M+i+1 \notin S$ e $M+1 \notin S$, portanto nenhuma das jogadas é válida segundo as regras do jogo, o que significa que qualquer jogada a partir de uma posição $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ será para uma posição $x \not\equiv 0 \pmod{M+i+1}$ e $x \not\equiv i \pmod{M+i+1}$.

   A partir de uma posição $x \equiv i \pmod{M+i+1}$, para obter uma posição do tipo $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \equiv i \pmod{M+i+1}$ seria necessário remover i ou $M+i+1$ blocos, respetivamente. Mas, $i \notin S$ e $M+i+1 \notin S$, portanto nenhuma das jogadas é válida segundo as regras do jogo, o que significa que qualquer jogada a partir de uma posição $x \equiv i \pmod{M+i+1}$ será para uma posição $x \not\equiv 0 \pmod{M+i+1}$ e $x \not\equiv i \pmod{M+i+1}$.

Provámos assim que a partir de uma posição da forma $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \equiv i \pmod{M+i+1}$, qualquer jogada origina uma posição da forma $x \not\equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \not\equiv i \pmod{M+i+1}$.

3. Suponhamos que o jogo está numa posição $x \equiv c \pmod{M+i+1}$ tal que $c \neq 0$ e $c \neq i$. Então, para jogar para uma posição $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \equiv i \pmod{M+i+1}$:

   Se $c \leq M$:

   Como, por hipótese, $x \equiv c \pmod{M+i+1}$ e $c \neq i$, então $c \in S$ e, para obter uma posição da forma $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$, basta remover c blocos da pilha.

   Se $c > M$:

   Suponhamos que $x \equiv c \pmod{M+i+1}$. Para obter uma posição da forma $x \equiv i \pmod{M+i+1}$, basta remover $c - i \pmod{M+i+1}$ blocos à pilha, ficando a mesma com $x \equiv c - (c - i) \pmod{M+i+1} \Leftrightarrow x \equiv i \pmod{M+i+1}$ blocos após a jogada. Para provar que essa jogada é válida temos que provar que $c - i \pmod{M+i+1} \in S = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, M\}$.

   Observemos que $c - i \pmod{M+i+1} > 0$, porque $c > M$ e $i < M$. Note-se também que $c < M + i + 1$ e, portanto, $c - i \pmod{M+i+1} < M + 1 \Leftrightarrow c - i \pmod{M+i+1} \leq M$.

   Para provar que $c - i \pmod{M+i+1} \in S$, resta apenas mostrar que $c - i \pmod{M+i+1} \neq i$.

   Suponhamos, com vista a obter um absurdo, que $c - i \pmod{M+i+1} = i$. Então, $c = 2i$. Mas, por hipótese, $M \geq 2i$. Logo, $c \leq M$, o que é absurdo, pois $c > M$. Portanto, $c - i \pmod{M+i+1} \neq i$ e $c - i \pmod{M+i+1} \in S$.

Provámos assim que a partir uma posição da forma $x \not\equiv 0 \pmod{M+i+1}$ e $x \not\equiv i \pmod{M+i+1}$, existe uma jogada que origina uma posição da forma $x \equiv 0 \pmod{M+i+1}$ ou $x \equiv i \pmod{M+i+1}$.

$\square$

2.3 Classificador de Posições em Jogos de Subtração

Para a implementação deste programa foi utilizado o software Visual Studio 2012 versão Profissional, com a linguagem C#. A escolha da linguagem não obedeceu a nenhum critério específico, podendo este programa ser facilmente convertido em Java ou até mesmo numa linguagem mais básica, visto que não é necessária uma orientação a objetos para a sua implementação.

O código do programa foi incluído no Apêndice A.

O objetivo do programa é, dado um conjunto S de um jogo de subtração, classificar as posições até um certo valor definido pelo utilizador. (Figura 2.1)

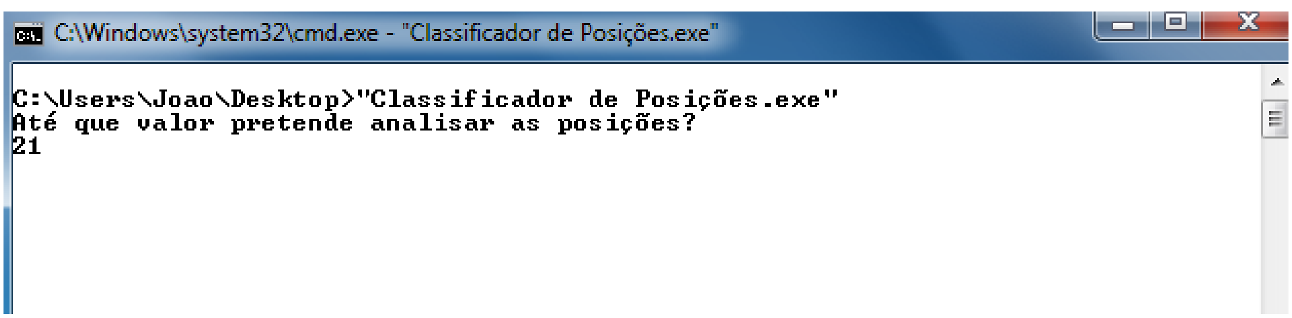

Figura 2.1: Utilização do classificador de posições - Inserção de limite

De seguida o utilizador tem que inserir que valores pertencem ao conjunto S do jogo de subtração que estiver a analisar, e inserir um “0” para parar de inserir valores. (Figura 2.2)

Serão impressas na consola as posições até ao número desejado e será pedido ao uti-

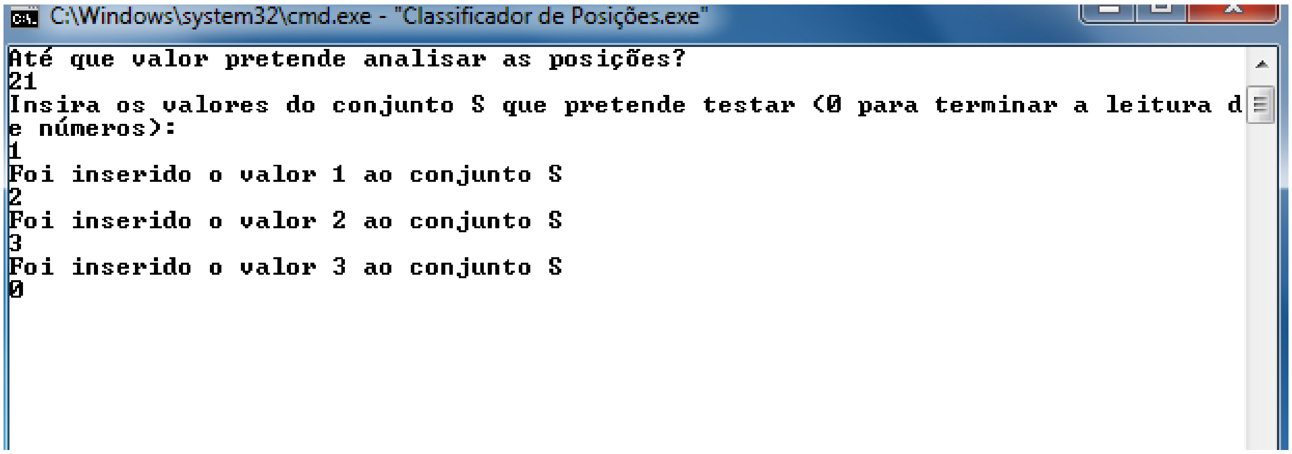

Figura 2.2: Utilização do classificador de posições - Conjunto S

lizador para inserir um número (opcional) para verificar se o padrão das posições tem determinado tamanho. (Figura 2.3)

Se todas as linhas que o programa imprimir (exceto a última) forem iguais, então é provável que o palpite, inserido pelo utilizador, para o comprimento do padrão, esteja correto. (Figura 2.4)

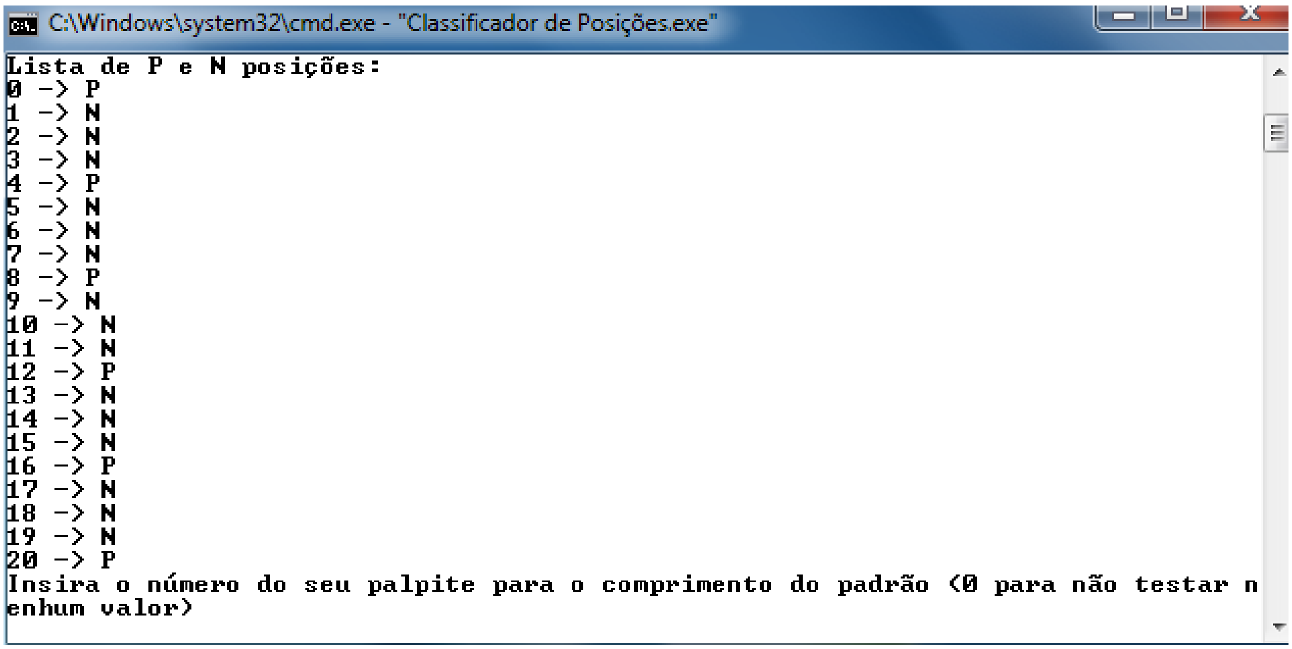

Figura 2.3: Utilização do classificador de posições - Listagem de posições

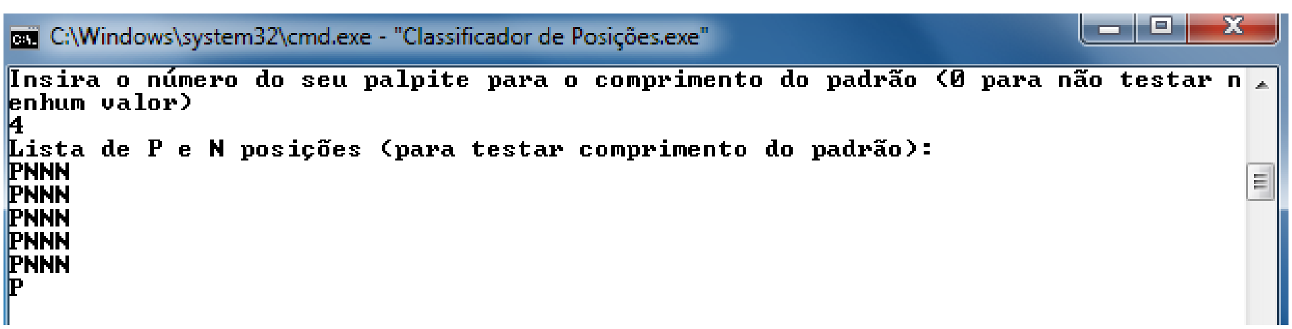

Figura 2.4: Utilização do classificador de posições - Listagem de posições para deteção de padrão

2.4 Nim

A teoria matemática do jogo do Nim[1] foi desenvolvida por Bouton[2] e está descrita em [4]. As regras do jogo são as seguintes:

1. Existem dois jogadores (jogador A e jogador B).

2. Existe uma ou mais pilhas com um número finito de blocos.

3. Uma jogada (ou movimento) consiste em retirar pelo menos um bloco de uma das pilhas, deixando as outras pilhas inalteradas.

4. O jogador A é o primeiro a jogar e, a partir daí, alternam as jogadas entre si.

5. O jogador que retirar o último bloco é o vencedor.

Designamos por posição de um jogo de Nim com n pilhas ao n-uplo $(x_1, \ldots, x_n)$, em que x_i é o número de blocos da pilha i.

Exemplo 1 - Jogo do Nim:

Vamos dar um exemplo de um jogo do Nim, desde o início até ao final, sem qualquer tipo de explicação. Posteriormente, iremos analisar este jogo.

Suponhamos que dois jogadores (Jogador A e Jogador B) jogam o jogo do Nim com a configuração inicial $(3, 5, 7)$, ou seja, em que existem três pilhas de blocos, com 3, 5 e 7 blocos, respetivamente.

[1] A origem do termo *Nim* não é consensual, havendo autores que defendem que o termo deriva do germânico "Nehme eins" que significa "tira um"

[2] Charles Leonard Bouton (1869-1922) - matemático americano.

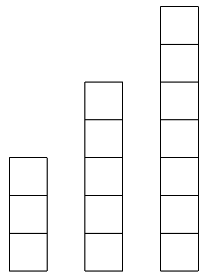

Figura 2.5: Pilhas com 3 e 5 e 7 blocos, respetivamente.

Jogador A - jogada 1

Remove 2 blocos da segunda pilha, jogando para a posição $(3, 3, 7)$.

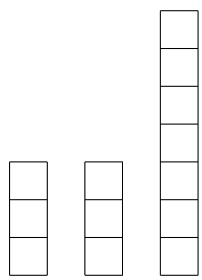

Figura 2.6: Pilhas com 3, 3 e 7 blocos, respetivamente.

Jogador B - jogada 2

Remove 4 blocos da terceira pilha, jogando para a posição $(3, 3, 3)$.

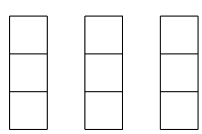

Figura 2.7: Três pilhas com 3 blocos cada.

Jogador A - jogada 3

Remove 2 blocos da primeira pilha, jogando para a posição $(1, 3, 3)$.

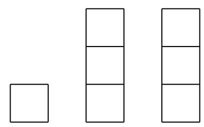

Figura 2.8: Pilhas com 1, 3 e 3 blocos, respetivamente.

Jogador B - jogada 4

Remove 1 bloco da primeira pilha, eliminando-a. Joga para a posição $(3, 3)$.

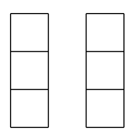

Figura 2.9: Duas pilhas com 3 blocos cada.

Jogador A - jogada 5

Remove 2 blocos de uma das pilhas. Joga para a posição $(3, 1)$.

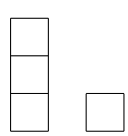

Figura 2.10: Pilhas com 3 e 1 blocos, respetivamente.

Jogador B - jogada 6

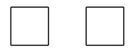

Figura 2.11: Duas pilhas com 1 bloco cada.

Remove 2 blocos da pilha que tinha 3 blocos, deixando ambas as pilhas com 1 bloco.

Jogador A - jogada 7

Remove uma das pilhas, deixando apenas uma pilha com 1 bloco.

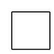

Figura 2.12: Pilha com 1 bloco.

Jogador B - jogada 8

Remove o último bloco da última pilha do jogo, saíndo assim vencedor.

Sabemos que num jogo combinatório, consoante a posição em que o jogo começa, existe sempre um jogador que tem uma estratégia vencedora, só não sabemos se é o primeiro jogador a jogar ou o segundo. Será que o Jogador A poderia ter vencido este jogo? A resposta é sim. Ao longo deste capítulo explicaremos como funciona essa estratégia vencedora no jogo do Nim, em que posições pode o jogo começar de forma a que o primeiro jogador tenha vantagem e demonstrando também porque isto se verifica.

No final do capítulo regressaremos a este exemplo, explicando o que o Jogador A poderia ter feito para garantir a vitória.

A *soma-Nim* de $x = (x_m, \ldots, x_0)_2 \in \{0,1\}^{m+1}$ e $y = (y_m, \ldots, y_0)_2 \in \{0,1\}^{m+1}$ é $z = (z_m, \ldots, z_0)_2 \in \{0,1\}^{m+1}$ e escrevemos $x \oplus y = z$, onde $\forall k$, $1 \leq k \leq m$, $z_k \equiv x_k + y_k \pmod 2$.

Caso o comprimento em base binária de x seja superior ao comprimento em base binária de y, para calcular a soma-Nim desses dois números, basta adicionar zeros à esquerda a y até que os comprimentos em base binária de ambos os números sejam iguais. Depois disso, a soma-Nim z de x e y determina-se através da forma descrita anteriormente.

Propriedades da soma-Nim [18]:

1. Associativa: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
2. Comutativa: $x \oplus y = y \oplus x$;
3. 0 é o elemento neutro: $0 \oplus x = x$;
4. Cada número é o seu próprio inverso: $x \oplus x = 0$;

Como consequência das propriedades anteriores concluímos que a soma-Nim induz a estrutura de grupo abeliano a $\{0,1\}^{m+1}$ e como tal, aplica-se também a lei do corte, ou seja: se $x \oplus y = z \oplus y$ então $x = z$.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Bouton [4]). *Uma posição $(x_1, \ldots, x_n)$, no jogo do Nim, é uma P-posição se e só se a soma-Nim das suas componentes for zero, ou seja, $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.*

Demonstração. Se mostrarmos que:

1. Todas as posições terminais têm soma-Nim nula.
2. Para cada posição com soma-Nim não nula, existe pelo menos um movimento para uma posição com soma-Nim nula.

3. Qualquer jogada a partir de uma posição com soma-Nim nula vai ser para uma posiçao com soma-Nim não nula.

É o mesmo que mostrar que as P-posições são as posições cuja soma-Nim é nula e as N-posições são as posições cuja soma-Nim é não nula.

Demonstração dos pontos (cf. [9]):

1. A única posiçao terminal é a posição $(0, \ldots, 0)$ e a sua soma-Nim é $0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$.

2. Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ uma posição com soma-Nim não-nula. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = (x_{i,m}, x_{i,m-1}, \ldots, x_{i,1})_2$. Seja S a soma-Nim de todos os x_i, coordenada a coordenada:

$$S = (x_{1,m} \oplus \cdots \oplus x_{n,m}, x_{1,m-1} \oplus \cdots \oplus x_{n,m-1}, \ldots, x_{1,0} \oplus \cdots \oplus x_{n,0})_2$$

Para fazermos uma jogada para uma posição com soma-Nim nula basta fazermos a soma-Nim das n pilhas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & x_{1,m} & x_{1,m-1} & \cdots & x_{1,0} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & x_{k,m} & x_{k,m-1} & \cdots & x_{k,0} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\oplus & x_{n,m} & x_{n,m-1} & \cdots & x_{n,0} \\
\hline
 & x_{1,m} \oplus \cdots \oplus x_{n,m} & x_{1,m-1} \oplus \cdots \oplus x_{n,m-1} & \cdots & x_{1,0} \oplus \cdots \oplus x_{n,0}
\end{array}$$

De seguida, olhamos para a coluna mais à esquerda cuja soma-Nim seja 1. Essa coluna vai certamente ter um número ímpar de 1's. Basta modificar qualquer número que seja 1 nessa coluna para 0 e, para cada uma das outras colunas desse número, alterar de 0 para 1 ou vice-versa, de forma a que o número de 1's de cada coluna seja par e a soma-Nim da coluna seja 0.

É de notar que, como o valor mais à esquerda foi alterado para 0, o número obtido por este processo é inferior ao número original, e portanto, a jogada correspondente é uma válida no jogo de Nim e a posição resultante tem soma-Nim nula.

3. Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ uma posiçao com soma-Nim nula, isto é, $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. Numa jogada a partir dessa posição, sejam $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a pilha em que se removeram blocos e y_i o número de blocos na pilha i após essa mesma jogada. Suponhamos que a jogada origina uma posição com soma-Nim nula. Então temos que $x_1 \oplus \cdots \oplus x_i \oplus \cdots \oplus x_n = 0 = x_1 \oplus \cdots \oplus y_i \oplus \cdots \oplus x_n$, mas isso é absurdo, pois pela lei do corte isso implicaria que $y_i = x_i$, mas sabemos que $y_i < x_i$.

   Portanto, a jogada terá que ser para uma posição com soma-Nim não nula.

$\square$

Regressando ao exemplo do início do capítulo, o Jogador A cometeu o primeiro erro logo na primeira jogada, jogando para uma N-posição e permitindo ao Jogador B que lhe "roubasse" a estratégia vencedora [8].

Analisemos então o jogo, pensando agora em cada posição como sendo N-posição (soma-Nim não nula) e P-posição (soma-Nim nula).

Exemplo 2 - Jogo do Nim (com estratégia vencedora por parte do primeiro jogador):

Jogador A - jogada 1

Para perceber se a posição inicial do jogo do Nim $(3, 5, 7)$ é uma posição a partir da qual o jogador 1 pode vencer, temos que fazer a soma-Nim de 3, 5 e 7 em base binária. Como $3 = 11_2$, $5 = 101_2$ e $7 = 111_2$, façamos a soma $\pmod 2$ de cada uma das componentes dos números em base binária:

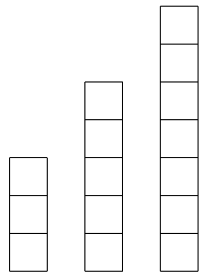

Figura 2.13: Pilhas com 3, 5 e 7 blocos, respetivamente.

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Como a soma-Nim de 3, 5 e 7 é não-nula, o jogador A está numa N-posição e, portanto, tem uma estratégia que lhe permite vencer o jogo. Basta-lhe jogar para uma posição com uma soma-Nim nula (de notar, que existe um número ímpar de jogadas desse tipo). Pode jogar, por exemplo, para a posição $(3, 5, 6)$, removendo 1 bloco da terceira pilha.

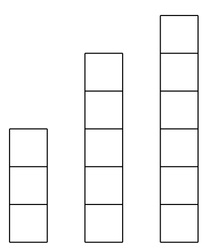

Figura 2.14: Pilhas com 3, 5 e 6 blocos, respetivamente.

Jogador B - jogada 2

Analisemos a soma-Nim desta posição $(3, 5, 7)$:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como a soma-Nim é nula, esta é uma P-posição e, por isso, o jogador B não tem qualquer jogada que lhe seja vantajosa. Suponhamos que ele remove 6 blocos da terceira pilha, eliminando-a e jogando para a posição $(3, 5, 0)$ ou, de forma simplificada, $(3, 5)$.

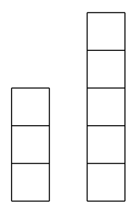

Figura 2.15: Pilhas com 3 e 5 blocos, respetivamente.

Jogador A - jogada 3

Analisemos a posição $(3, 5)$:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Como a soma-Nim é não-nula, o jogador 1 consegue jogar para uma posição com soma-Nim nula. Basta remover 2 blocos da pilha com 5 blocos, jogando assim para a posição $(3, 3)$.

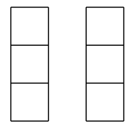

Figura 2.16: Duas pilhas com 3 blocos cada.

Jogador B - jogada 4

A partir daqui, mesmo sem calcular a soma-Nim das posições, é fácil perceber que o jogador A tem uma estratégia vencedora: basta-lhe copiar qualquer jogada que o jogador B faça na pilha oposta - isto vai fazer com que o jogador A seja sempre o último a jogar, sendo portanto o vencedor.

Suponhamos que o jogador B remove 2 blocos de uma das pilhas, deixando assim o o jogo na posição $(1, 3)$.

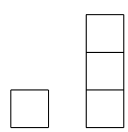

Figura 2.17: Pilhas com 1 e 3 blocos, respetivamente.

Jogador A - jogada 5

O jogador A copia a jogada anterior e remove 2 blocos da outra pilha, jogando para a posição $(1, 1)$.

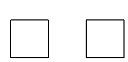

Figura 2.18: Duas pilhas com 1 bloco cada.

Jogador B - jogada 6

O jogador 2 elimina uma das pilhas.

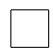

Figura 2.19: Pilha com 1 bloco.

Jogador A - jogada 7

O jogador 1 elimina a última pilha existente, sendo o vencedor do jogo.

Exemplo 3 - Várias estratégias vencedoras:

Por vezes, a partir de uma mesma N-posição, existem várias jogadas possíveis para P-posições distintas. Este exemplo serve para ilustrar esse facto.

Suponhamos que durante um jogo de Nim é atingida a posição $(3, 3, 3)$. Que jogada deve fazer o próximo jogador, de forma a que consiga vencer o jogo?

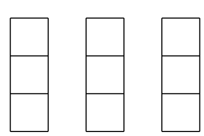

Figura 2.20: Três pilhas com 3 blocos cada.

Fazendo a soma-Nim de 3, 3 e 3 vem:

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

Como a soma-Nim de 3, 3 e 3 é não-nula, o jogador está numa N-posição e, portanto, tem uma estratégia que lhe permite vencer o jogo. Basta-lhe jogar para uma posição com uma soma-Nim nula. Só que, neste caso, tem 3 formas distintas de jogar para posições com soma-Nim nula: pode jogar para a posição $(0, 3, 3)$; para a posição $(3, 0, 3)$; ou para a posição $(3, 3, 0)$. A partir de qualquer uma dessas posições consegue vencer o jogo replicando os movimentos do seu oponente na pilha contrária, garantindo assim que faz o último movimento do jogo.

2.5 Misère Nim

Como foi mencionado no capítulo inicial sobre noções gerais de teoria de jogos combinatórios, qualquer jogo combinatório pode ser jogado na versão *misère*, em que o último jogador a jogar é o derrotado, quando na versão *normal* seria o vencedor. Neste capítulo vamos analisar o jogo do Nim jogado na sua versão *misère*.

Geralmente a teoria de um jogo na sua versão *misère* é bastante mais complexa que a estratégia na sua versão normal, mas neste jogo em particular, a análise é bastante semelhante ao jogo do Nim e é bastante simples.

A estratégia vencedora deste jogo consiste em utilizar a estratégia do jogo do Nim enquanto existirem pelo menos duas pilhas com mais que um bloco. Depois disso, quando o adversário fizer uma jogada para uma posição que tenha apenas uma pilha com mais do que um bloco, basta reduzir essa pilha para 0 ou 1 blocos, fazendo essa escolha com o objetivo de deixar um número ímpar de pilhas de tamanho 1.

É de notar que só existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador se ele começar a jogar numa N-posição, ou seja, se:

1. Só existirem pilhas com um bloco e existir um número par de pilhas.
2. Existir apenas uma pilha com mais do que um bloco.
3. Existirem duas ou mais pilhas com mais do que um bloco e a soma-Nim ($\oplus$ ou $\oplus_2$) dessas pilhas for diferente de zero.

Este processo funciona porque na estratégia do jogo do Nim normal nunca é necessário que deixemos exactamente uma pilha de tamanho superior a 1 (a soma-Nim tem que ser zero), e o nosso oponente não se pode mover de uma posição com duas pilhas de tamanho superior a 1 para uma em que não existam pilhas com tamanho superior a 1.
Por isso, o jogo haverá de chegar a uma posição em que somos nós a jogar e existe exatamente uma pilha de tamanho superior a 1.

Exemplo - Jogo de Misère Nim:

Analisemos um jogo de Misère Nim com três pilhas com 3,5 e 7 blocos. Ou seja, dizemos que este jogo tem a configuração (3,5,7) e é o primeiro jogador a mover-se.

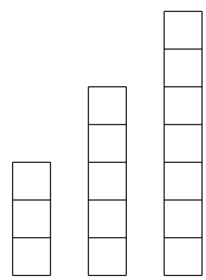

Figura 2.21: Pilhas com 3, 5 e 7 blocos, respetivamente.

Jogador A

Para saber se o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora, temos que perceber se esta é uma N-posição. A condição (1) não se verifica, pois existem pilhas que têm mais que um bloco; a condição (2) também não se verifica, visto que existe mais que uma pilha com um bloco; no entanto verifica-se a condição (3), ora vejamos:

$3_{10} = 11_2$, $5_{10} = 101_2$ e $7_{10} = 111_2$. Somando os números em coluna $\pmod 2$ vem:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Logo, a soma-Nim desta configuração é não-nula e o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

Para jogar para uma P-posição basta-lhe tornar esta soma-Nim numa soma nula, fazendo por exemplo, uma jogada para a posição $(3, 5, 6)$, retirando um bloco à terceira pilha.

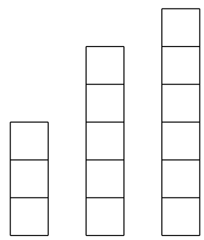

Figura 2.22: Pilhas com 3, 5 e 6 blocos, respetivamente.

Jogador B

A partir dessa posição, o segundo jogador não tem nenhuma jogada que lhe seja vantajosa. Por isso, suponhamos, que ele remove 5 blocos da terceira pilha, jogando assim para a posição $(3, 5, 1)$.

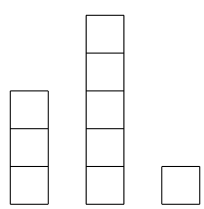

Figura 2.23: Pilhas com 3, 5 e 1 blocos, respetivamente.

Jogador A

Analisemos esta posição. Continua a existir mais do que uma pilha com tamanho superior a 1, portanto verifica-se a condição (3), logo, temos que analisar a posição $(3, 5, 1)$ como se esta fosse de um jogo do Nim usual:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Para tornar esta soma numa soma nula é fácil de observar que basta retirar 3 blocos à segunda pilha, jogando assim para a posição $(3, 2, 1)$.

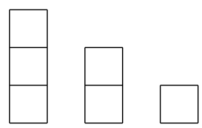

Figura 2.24: Pilhas com 3, 2 e 1 blocos, respetivamente.

Jogador B

Mais uma vez, o jogador B está numa posição em que não tem jogadas vantajosas, visto que esta não é uma N-posição (não verifica nenhuma das três condições). Portanto, suponhamos que o jogador B remove a primeira pilha, jogando assim para a posição $(2, 1)$.

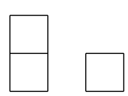

Figura 2.25: Pilhas com 2 e 1 blocos, respetivamente.

Jogador A

A partir daqui é fácil para o jogador A ter a vitória. Basta notar que apenas existe uma pilha com mais que um bloco, e por isso verifica-se a condição (2). Utilizando o processo descrito anteriormente, o jogador A apenas tem que jogar para uma posição que deixe um número ímpar de pilhas com 1 bloco. Neste caso, tem que eliminar a pilha com 2 blocos, deixando apenas a outra pilha.

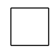

Figura 2.26: Pilha com 1 bloco.

Jogador B

O jogador B tem apenas uma jogada possível, visto que só existe uma pilha e essa pilha tem apenas um bloco. Ao ser forçado a eliminá-la ele perde o jogo, dando a vitória ao jogador A.

2.6 Nim 2^k

O jogo Nim 2^k é uma variante do Nim que surge como um exemplo em [12][3]. O jogo começa com uma pilha com $n \in \mathbb{N}$ blocos e cada jogada consiste em remover um número $s \in \mathbb{N}$ de blocos estritamente menor que metade do tamanho da pilha.

Análise do Jogo

Analisando o jogo, apercebemo-nos que só é possivel fazer alguma jogada a partir de posições $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < \frac{n}{2}$, ou seja, $n > 2$. Portanto, a partir das posições 0, 1, e 2 não há jogadas possíveis, logo, são consideradas posições terminais. No entanto, como as posições 0 e 1 nunca são atingidas. Para simplificar, consideramos que apenas a posição 2 é terminal.

Continuando a análise das posições para este jogo concluímos o Lema seguinte.

Lema 2.6.1. *No jogo Nim 2^k, uma posição $n \geq 2$ é uma P-posição se e só se $n = 2^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos o princípio de indução completa.
Quando $n = 2$ o resultado é válido: 2 é uma P-posição porque é uma posição terminal.
Suponhamos que o resultado é válido para todo m tal que $2 \leq m < n$. Queremos mostrar que o resultado é válido para n. Se $n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, só podemos retirar r peças com $0 < r < 2^{k-1}$ e passar para uma posição m tal que $2^{k-1} < m < 2^k$. Como nenhuma destas posições é uma potência de 2, são N-posições e portanto $n = 2^k$ é uma P-posição.
Se n não for uma potência de 2, então $n = 2^k + \ell$ para algum ℓ tal que $0 < \ell < 2^k$. Como $\ell = (2\ell)/2 < (2^k + \ell)/2 = n/2$, podemos retirar ℓ peças à posição $n = 2^k + \ell$ e passar para

[3]No artigo em questão os autores não dão um nome a este jogo, mas achámos conveniente designá-lo Nim 2^k

a P-posição 2^k. Daqui resulta que $n = 2^k + \ell$ é uma N-posição.

O resultado segue do princípio de indução completa. □

Estratégia Vencedora:

Caso o jogo comece numa posição que não seja da forma 2^k, a estratégia vencedora para o primeiro jogador consiste em jogar sempre para posições da forma 2^k. Já foi provado no lema anterior que isso é possível. Para fazer tal jogada basta converter o número de blocos existentes na pilha numa determinada jogada, por exemplo n em base 2: $n = n_i \times 2^i + n_{i-1} \times 2^{i-1} + \ldots + n_1 \times 2^1 + n_0 \times 2^0 = (n_i, n_{i-1} \ldots, n_1, n_0)_2$ e remover da pilha $n_{i-1} \times 2^{i-1} + \ldots + n_1 \times 2^1 + n_0 \times 2^0$ blocos.

De forma simplificada, utilizando o número n em base binária, basta remover todos os dígitos que sejam 1, exceto o dígito mais à esquerda, obtendo números em base 2 da forma $(1, 0, \ldots, 0)_2$.

Caso contrário, se o jogo começar numa posição da forma 2^k, existe uma estratégia vencedora para o segundo jogador, que consiste em "roubar" a estratégia ao primeiro jogador, após a jogada inicial.

Exemplo - Jogo de Nim 2^k:

Vamos dar um exemplo de um jogo de Nim 2^k.

Suponhamos que dois jogadores (Jogador A e Jogador B) jogam disputam este jogo com uma pilha inicial com 100 blocos.

Jogador A - jogada 1

Analisemos a posição 100. $100 = 1100100_2$. Como a posição não é da forma 2^k, o jogador A consegue mover para uma posição 2^k. Basta-lhe remover $100100_2 = 36$ blocos da pilha, jogando assim para a posição $100 - 36 = 64$.

Jogador B - jogada 2

A posição $64 = 1000000_2$ é da forma 2^k, portanto não há nenhuma jogada vantajosa para o jogador B. Suponhamos que ele retira da pilha o máximo de blocos que as regras lhe permitem, ou seja, retira $\frac{64}{2} - 1 = 31$ blocos da pilha, jogando para a posição $64 - 31 = 33$.

Jogador A - jogada 3

Como $33 = 100001_2$, o jogador A pode remover 1 bloco da pilha e obter uma posição da forma 2^k. O jogo fica na posição 32.

Jogador B - jogada 4

Mais uma vez não há jogadas vantajosas para o jogador B, visto que a posição $32 = 100000_2$ é da forma 2^k. Suponhamos que ele remove 13 blocos da pilha, jogando para a posição $32 - 13 = 19$.

Jogador A - jogada 5

Como $19 = 10011_2$, o jogador A consegue mover-se para uma posição da forma 2^k, eliminando $11_2 = 3$ blocos da pilha. O jogador A move para a posição $19 - 3 = 16$.

Jogador B - jogada 6

Não há jogadas vantajosas para o jogador B visto que $16 = 1000_2 = 2^4$. Suponhamos que o jogador B retira apenas 1 bloco da pilha, deixando o jogo na posição $16 - 1 = 15$.

Jogador A - jogada 7

Como $15 = 1111_2$, o jogador A remove $111_2 = 7$ blocos da pilha, tornando-a numa pilha com 2^3 blocos, visto que $15 - 7 = 8 = 100_2$.

Jogador B - jogada 8

O jogador B retira, por exemplo, 2 blocos da pilha, deixando-a com $8 - 2 = 6$ blocos.

Jogador A - jogada 9

Como $6 = 110_2$, o jogador A continua a utilizar a estratégia vencedora, retirando $10_2 = 2$ blocos da pilha. Joga, portanto, para a posição $4 = 100_2$

Jogador B - jogada 10

O jogador B só tem uma opção possivel, visto que $\frac{4}{2} - 1 = 1$, ele só pode remover 1 bloco. O jogo fica na posição 3.

Jogador A - jogada 11

O jogador A remove 1 bloco da pilha e joga para a posição terminal 2, sendo assim o vencedor do jogo.

2.7 Misère Nim 2^k

As regras do jogo são iguais às do jogo original, com a exceção de que é jogado na versão *misère*, ou seja, o último jogador a mover perde.

A análise do jogo é muito semelhante à do original. Fazendo uma análise recursiva das posições obtém-se a seguinte tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	-	-	N	P	N	N	P	N	N	N	N
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
Posição	N	P	N	N	N	N	N	N	N	N	$\cdots$

Tabela 2.6: Posições do jogo Misère Nim 2^k

Lema 2.7.1. *No jogo Misère Nim 2^k, uma posição $n \geq 2$ é uma P-posição se e só se $n = 3 \times 2^k$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. A prova é análoga a do Lema 2.6.1. Vamos o princípio de indução completa. Quando $n = 2$ o resultado é válido: 2 é uma N-posição porque é uma posição terminal. Suponhamos que o resultado é válido para todo m tal que $2 \leq m < n$. Queremos mostrar que o resultado é válido para n. Se $n = 3 \times 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$, só podemos retirar r peças com $0 < r < 3 \times 2^{k-1}$ e passar para uma posição m tal que $3 \times 2^{k-1} < m < 3 \times 2^k$. Como nenhuma destas posições é o triplo de uma potência de 2, são N-posições e portanto $n = 3 \times 2^k$ é uma P-posição. Se n não for o triplo de uma potência de 2, então $n = 3 \times 2^k + \ell$ para algum ℓ tal que $0 < \ell < 3 \times 2^k$. Como $\ell = (2\ell)/2 < (3 \times 2^k + \ell)/2 = n/2$, podemos retirar ℓ peças à posição $n = 3 \times 2^k + \ell$ e passar para a P-posição 3×2^k. Daqui resulta que $n = 2^k + \ell$ é uma N-posição.
O resultado segue do princípio de indução completa. $\square$

2.8 Fibonacci Nim

O jogo do Fibonacci Nim foi inventado por R.E. Gaskell, da Universidade de Oregon State [24] e as regras do jogo são as seguintes [16]:

1. Existem dois jogadores (jogador A e jogador B).
2. Existe uma pilha com N blocos, $N \in \mathbb{N}$.
3. O jogador A é o primeiro a jogar e, a partir daí, alternam as jogadas entre si.
4. Na primeira jogada, o jogador A tem que remover pelo menos um bloco da pilha e no máximo $N-1$ blocos, ou seja, apenas não pode eliminar todos os blocos da pilha na primeira jogada.
5. Em qualquer outra jogada, o jogador tem que remover pelo menos um bloco da pilha, mas não pode remover mais que o dobro dos blocos removidos na jogada anterior.
6. O jogador que retirar o último bloco ganha.

Ao longo deste capítulo iremos utilizar a notação f_i para indicar o i-ésimo termo da sucessão de Fibonacci, dada por:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ com } n \geq 1, f_1 = 1 \text{e} f_2 = 2.$$

Dado $I \subseteq \mathbb{N}$, seja $I + 1 = \{i + 1 \mid i \in I\}$. Dizer que I não contém dois inteiros consecutivos é equivalente a dizer que $I \cap (I + 1) = \varnothing$.

Lema 2.8.1. *Seja n um inteiro positivo e I um conjunto de inteiros menores ou iguais a n tal que $I \cap (I + 1) = \varnothing$. Então*

$$\sum_{i \in I} f_i < f_{n+1}.$$

Demonstração. (Princípio de Indução).

Se $n = 1$, então $I = \varnothing$ ou $I = \{1\}$, logo

$$\sum_{i \in \varnothing} f_i = 0 < 2 = f_2 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \{1\}} f_i = f_1 = 1 < 2 = f_2.$$

Se $n = 2$, então $I = \varnothing$ ou $I = \{1\}$ ou $I = \{2\}$, logo

$$\sum_{i \in \varnothing} f_i = 0 < 3 = f_3, \qquad \sum_{i \in \{1\}} f_i = f_1 = 1 < 3 = f_3 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \{2\}} f_i = f_2 = 2 < 3 = f_3.$$

Suponhamos agora que o resultado é válido para todo o inteiro k menor ou igual a um inteiro n, e seja I um conjunto de inteiros menores ou iguais do que $n+1$ tal que $I \cap (I+1) = \varnothing$. Se $n+1 \notin I$, então todos os inteiros de I são menores ou iguais a n e

$$\sum_{i \in I} f_i < f_{n+1} < f_{n+2}$$

por hipótese de indução. Se $n+1 \in I$, então $n \notin I$ e todos os inteiros de $I \setminus \{n+1\}$ são menores ou iguais a $n-1$, logo

$$\sum_{i \in I} f_i = \left(\sum_{i \in I \setminus \{n+1\}} f_i \right) + f_{n+1} < f_n + f_{n+1} = f_{n+2}.$$

□

Teorema 2.8.2 (Teorema de Zeckendorf[4]). *Para todo o inteiro positivo N existe um único conjunto I de inteiros positivos tais que $I \cap (I+1) = \varnothing$ e*

$$N = \sum_{i \in I} f_i.$$

Demonstração.

Existência: Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos inteiros positivos que não podem ser escritos na forma

[4] Edouard Zeckendorf (1901-1983) - Matemático belga

$\sum_{i\in I} f_i$ com $I\cap(I+1)=\varnothing$. Suponhamos, com vista a obter um absurdo, que $\mathcal{C}$ é não vazio. Pelo princípio da boa ordenação dos números naturais, $\mathcal{C}$ tem um mínimo N. Como $N\in\mathcal{C}$, N não pode ser um número de Fibonacci, logo existe um inteiro k tal que $f_k < N < f_{k+1}$. Como $0 < N - f_k < N$, $N - f_k \notin \mathcal{C}$ existe um conjunto I de inteiros tal que $I\cap(I+1)=\varnothing$ e

$$N - f_k = \sum_{i\in I} f_i.$$

Notamos que $k-1\notin I$ pois caso contrário

$$N - f_k = \sum_{i\in I} f_i \geq f_{k-1}$$

e portanto

$$N \geq f_{k-1} + f_k = f_{k+1}$$

contrariando uma das hipóteses. Daqui resulta que

$$N = \sum_{i\in I\cup\{k\}} f_i$$

onde $(I\cup\{k\})\cap((I\cup\{k\})+1)=\varnothing$, o que é absurdo. Logo $\mathcal{C}=\varnothing$.

Unicidade: Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos inteiros que se podem escrever na forma

$$\sum_{i\in I} f_i = \sum_{j\in J} f_j$$

onde I e J são conjuntos de inteiros tais que $I\cap(I+1)=\varnothing=J\cap(J+1)$ e $I\neq J$. Suponhamos, com vista a obter um absurdo, que $\mathcal{D}$ é não vazio. Pelo princípio da boa ordenação dos números naturais, $\mathcal{D}$ tem um mínimo N. Seja

$$N = \sum_{i\in I} f_i = \sum_{j\in J} f_j$$

onde I e J são conjuntos de inteiros tais que $I\cap(I+1)=\varnothing=J\cap(J+1)$ e $I\neq J$. Seja k o máximo do conjunto $I\cup J$. Então k não pode pertencer simultaneamente a I e a J pois

$N - f_k \notin \mathcal{D}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k \in I$ e $k \notin J$. Então todos os elementos de J são menores que $k-1$ e pelo Lema 2.8.1,

$$N = \sum_{j \in J} f_j < f_k.$$

Por outro lado

$$N = \sum_{i \in I} f_i \geq f_k,$$

o que é absurdo. Logo $\mathcal{D} = \varnothing$. □

Estratégia vencedora para o primeiro jogador:

Assumindo que o jogo começa numa posição que não seja um número de Fibonacci, para garantir a sua vitória, o jogador A, deve deixar um número de Fibonacci de blocos na pilha, sem que o jogador seguinte consiga eliminar todos os blocos restantes. Caso não seja posível, o jogador A deve escrever o número de blocos restantes na pilha como uma soma de números de Fibonacci não consecutivos (essa soma existe para qualquer número inteiro positivo, como provámos no Teorema de Zeckendorf), encontrar o número de Fibonacci mais pequeno dessa soma e remover exatamente esse número de blocos da pilha.

Se o jogador A repetir este processo até o jogo terminar, a sua vitória está garantida, independentemente das acções do jogador 2.

Se o jogo não começar num número de Fibonacci, após a jogada inicial do jogador A, o jogador B consegue garantir a sua vitória utilizando a estratégia que o jogador A utilizaria caso começassem o jogo num número que não fosse de Fibonacci.

Exemplo - Jogo de Fibonacci Nim:

Vamos dar um exemplo de um jogo de Fibonacci Nim, com uma pilha inicial com 20 blocos.

Jogador A - jogada 1

$20 = 13 + 5 + 2 = f_6 + f_4 + f_2$

O jogador A remove da pilha o menor número da soma de termos de Fibonacci não consecutivos, ou seja, neste caso, remove 2 blocos. Joga para a posição 18.

Jogador B - jogada 2

$18 = 13 + 5 = f_6 + f_4$

Retirou um bloco da pilha (podia ter retirado no máximo 4 blocos). Joga para a posição 17.

Jogador A - jogada 3

$17 = 13 + 3 + 1 = f_6 + f_3 + f_1$

O jogador A volta a aplicar a estratégia vencedora, removendo o termo mais pequeno da soma de termos de Fibonacci não consecutivos. Remove 1 bloco da pilha.

Jogador B - jogada 4

$16 = 13 + 3 = f_6 + f_3$

Retirou 2 blocos da pilha (o máximo de blocos que podia retirar). Joga para a posição 14.

Jogador A - jogada 5

$14 = 13 + 1 = f_6 + f_1$

O jogador A volta a aplicar a estratégia vencedora, removendo o termo mais pequeno da soma de termos de Fibonacci não consecutivos. Remove 1 bloco da pilha. Joga para a posição 13

Jogador B - jogada 6

$13 = f_6$

Retirou 2 blocos da pilha (o máximo que podia retirar). Joga para a posição 11.

Jogador A - jogada 7

$11 = 8 + 3 = f_5 + f_3$

O jogador A volta a aplicar a estratégia vencedora, removendo o termo mais pequeno da soma de termos de Fibonacci não consecutivos. Remove 3 blocos da pilha. Joga para a posição 8

Jogador B - jogada 8

$8 = f_5$

Retirou 3 blocos da pilha (podia ter retirado no máximo 6 blocos). Joga para a posição 5.

Jogador A - jogada 9

$5 = f_4$

Apesar de 5 ser um número de Fibonacci, como na jogada anterior o jogador B removeu 3 blocos, o jogador A já pode remover toda a pilha, atingindo assim a posição terminal e sendo o vencedor do jogo.

2.9 Nim de Moore (Nim_k)

As regras do jogo de Nim são as seguintes:

1. Existem dois jogadores (jogador A e jogador B).
2. O jogador A é o primeiro a mover-se e, a partir dai, alternam as jogadas entre si.
3. Na primeira jogada, o jogador A escolhe com quantas pilhas e quantos blocos em cada uma das pilhas se vai jogar, sendo que tem que existir pelo menos uma pilha com algum bloco para haver jogo.
4. Exceto a primeira jogada, uma jogada (ou movimento) consiste em retirar pelo menos um bloco de uma das pilhas, podendo retirar blocos de, no máximo, k pilhas.
5. O jogador que retirar o último bloco ganha.

É claro que, se o jogador A, na sua primeira jogada, escolher jogar com um número de pilhas inferior a $k+1$ o jogo termina em apenas uma jogada, dando a vitória ao jogador B (o jogador B consegue remover todos os blocos de todas as pilhas numa só jogada). Tal como no jogo do Nim, designamos essa posição como sendo uma N-posição (visto que é possível fazer uma jogada para uma posição terminal - uma P-posição).[5]

Portanto, se o jogador A, na sua primeira jogada, escolher começar o jogo numa P-posição, tem uma estratégia para vencer o jogo, visto que o jogador B só consegue jogar para N-posições, que permitem ao jogador A voltar a jogar para uma P-posição. Isto repete-se até o jogo terminar.

Para saber qual é a estratégia vencedora para o jogador A basta-nos então perceber quais são as P-posições deste jogo, bem como qual a forma como ele pode jogar de uma N-posição para uma P-posição.

[5] No artigo original [17] E. H. Moore designa as P-posições como "combinações seguras" e as N-posições como "combinações inseguras".

Utilizando a notação de Moore [17], sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o número de blocos contidos nas pilhas $i = 1, 2, \ldots, n$, respetivamente.

Seja $c_{ij} = 0$ ou 1, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots$ de tal forma que $c_i = c_{i0} + c_{i1}2^1 + c_{i2}2^2 + \ldots + c_{i0}2^j + \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dizemos que a soma-Nim$_k$ de $x = (x_m, \ldots, x_0) \in \{0, 1, \ldots, k\}^{m+1}$ e $y = (y_m, \ldots, y_0) \in \{0, 1, \ldots, k\}^{m+1}$ é $z = (z_m, \ldots, z_0) \in \{0, 1, \ldots, k\}^{m+1}$ e escrevemos $x \oplus_k y = z$, onde $\forall j$, $1 \leq j \leq m$, $z_j \equiv x_j + y_j \pmod{k+1}$.

Teorema 2.9.1. *Uma posição do jogo Nim de Moore é P-posição se e só se a soma-Nim$_k$ das suas pilhas for nula.*

Demonstração.

1. A única posição terminal é a posição 0, que tem soma-Nim$_k$ nula.

2. Suponhamos que o jogo está nula posição com soma-Nim$_k$ não nula. Para jogar para uma posição com soma-Nim$_k$ nula basta que utilizemos o seguinte algoritmo:

   Efetuamos a soma-Nim$_k$ das ℓ linhas (que, por hipótese, é não nula). Seja k_1 a posição não nula mais à esquerda do resultado dessa soma. De seguida, escolhemos k_1 linhas que tenham 1 nessa posição. Seja $c_1 = k_1 < k$

   Novamente, calculamos a soma-Nim$_k$ das restantes $\ell - k_1$ colunas não escolhidas e:

   - Se a soma-Nim$_k$ for nula, retirando todas as peças dessas k_1 colunas obtém-se uma posição com soma-Nim$_k$ nula.

   - Caso contrário, se a soma-Nim$_k$ for não nula, essa soma tem coordenadas não nulas.

   Seja k_2 a coordenada não nula mais à esquerda:

- Se $k_1 + k_2 \geq k$, escolhemos quaisquer $k - k_1$ linhas das que têm 1 nessa posição (ficando as k linhas em que se pode jogar escolhidas).

- Caso contrário, se $k_1 + k_2 < k$, escolhemos k_2 colunas que tenham 1 nessa posição. Seja $c_2 = k_1 + k_2$.

Repetimos o processo descrito até que a soma-Nim$_k$ das linhas não escolhidas seja nula ou até que sejam escolhidas k colunas.

É de notar que não é possível construir uma sucessão crescente c_i em que todos os valores sejam menores ou iguais a um inteiro k, portanto o processo descrito tem, obrigatoriamente, que terminar.

Portanto, para cada posição com soma-Nim$_k$ não nula, existe alguma jogada para uma posição com soma-Nim$_k$ nula.

3. Suponhamos que, a partir de uma posição com soma-Nim$_k$ nula, é feito um movimento. Consideremos a coordenada mais à esquerda que essa jogada afete. Antes da jogada, a soma dessa coluna era divisível por $k + 1$, mas para jogar para outra posição com soma-Nim$_k$ nula seria necessário remover $k+1$ blocos (só é possível alterar números na base binária de 1 para 0, pois, caso contrario, estaríamos a adicionar blocos às pilhas), o que não é permitido.

   Logo, qualquer movimento a partir de uma posiçao com soma-Nim$_k$ nula, será para uma posição com soma-Nim$_k$ não nula.

$\square$

É de notar que analisar uma posição de um jogo de Moore's Nim com $k = 1$ é precisamente o mesmo que analisar um jogo do Nim na sua versão original.

Exemplo 1:

Seja $k = 1$. Analisemos o jogo de Moore's Nim numa posição com 4 pilhas com 2,7,11 e 14 blocos, respetivamente.

$2_{10} = (0, 0, 1, 0)_2$, $7_{10} = (0, 1, 1, 1)_2$, $11_{10} = (1, 0, 1, 1)_2$ e $14_{10} = (1, 1, 1, 0)_2$. Somando os números em coluna $\pmod 2$ vem:

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Por isso concluímos que a posição (2,7,11,14) é uma P-posição no jogo de Moore's Nim com $k = 1$, que é precisamente o mesmo que dizer que é uma P-posição no jogo do Nim original.

Exemplo 2:

Seja $k = 2$. Analisemos o jogo de Moore's Nim na mesma posição que no exemplo anterior.

$2_{10} = (0, 0, 1, 0)_2$, $7_{10} = (0, 1, 1, 1)_2$, $11_{10} = (1, 0, 1, 1)_2$ e $14_{10} = (1, 1, 1, 0)_2$. Somando os números em coluna $\pmod 3$ vem:

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Por isso concluímos que a posição (2,7,11,14) é uma N-posição no jogo de Moore's Nim com $k = 2$. Uma forma de jogar para uma P-posição seria jogar para a posição (2,7,7,5), retirando 4 blocos da pilha de 11 blocos original e 9 blocos da pilha de 14 blocos original. Para comprovar que a posição obtida é uma P-posição voltamos a somar os números obtidos em coluna $\pmod 3$:

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Capítulo 3

Mais conceitos sobre Jogos Combinatórios e as suas Aplicações

Neste capítulo pretendemos introduzir algumas noções um pouco mais avançadas de Teoria de Jogos Combinatórios e explicar em que podem ser úteis.

Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{N}_0$. O *mínimo valor excluído* do conjunto S é o menor valor inteiro não-negativo que não pertença a S e denota-se por $\text{mex}(S)$.

$$\text{mex}(S) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : k \notin S\} = min\mathbb{N}_0 \backslash S$$

É de notar que, pelo princípio da boa ordenação dos números naturais, este número existe.

Exemplos:

$\text{mex}\{\} = 0$

$\text{mex}\{1, 3, 4\} = 0$

$\text{mex}\{0, 1, 3, 4\} = 2$

$\text{mex}\{0, 1, 2, 3, 4\} = 5$

A *Função de Sprague-Grundy* de um jogo é a função

$G : \{\text{Posições do jogo}\} \rightarrow \{\mathbb{N}_0\}$

definida recursivamente a partir da posição final por:

$G(p) = \text{mex}\{G(q) : \text{existe um movimento de } p \text{ para } q\}$.

Esta função fornece-nos mais informação sobre cada posição de um jogo do que apenas saber se ela é P-posição ou N-posição.

Exemplo 1: Função de Sprague-Grundy para o jogo de Nim 21

$G(0) = \text{mex}\{\} = 0$

$G(1) = \text{mex}\{0\} = 1$

$G(2) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$

$G(3) = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$

$G(4) = \text{mex}\{1, 2, 3\} = 0$

$\vdots$

$G(n) = \text{mex}\{G(n-3), G(n-2), G(n-1)\}$

$\vdots$

$G(18) = \text{mex}\{3, 0, 1\} = 2$

$G(19) = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$

$G(20) = \text{mex}\{1, 2, 3\} = 0$

$G(21) = \text{mex}\{2, 3, 0\} = 1$

Obtemos assim a seguinte tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Posição	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Tabela 3.1: Posições do Nim 21 pela função de Sprague-Grundy

Exemplo 2: Função de Sprague-Grundy para o Jogo de Subtração com $S = \{2, 3, 5\}$

$G(0) = \text{mex}\{\} = 0$

$G(1) = \text{mex}\{\} = 0$

$G(2) = \text{mex}\{0\} = 1$

$G(3) = \text{mex}\{0, 0\} = 1$

$G(4) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$

$G(5) = \text{mex}\{0, 1, 1\} = 2$

$G(6) = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$

$G(7) = \text{mex}\{1, 2, 2\} = 0$

$G(8) = \text{mex}\{1, 2, 3\} = 0$

$G(9) = \text{mex}\{2, 3, 0\} = 1$

$G(10) = \text{mex}\{2, 0, 0\} = 1$

$G(11) = \text{mex}\{3, 0, 1\} = 2$

$G(12) = \text{mex}\{0, 1, 1\} = 2$

$G(13) = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$

$G(14) = \text{mex}\{1, 2, 2\} = 3$

$G(15) = \text{mex}\{1, 2, 3\} = 0$

$G(16) = \text{mex}\{2, 3, 0\} = 1$

$G(17) = \text{mex}\{2, 0, 0\} = 1$

$G(18) = \text{mex}\{3, 0, 1\} = 2$

$G(19) = \text{mex}\{0, 1, 1\} = 2$

$G(20) = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$

Obtemos assim a seguinte tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	0	0	1	1	2	2	3	0	0	1	1
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
Posição	2	2	3	0	0	1	1	2	2	3	$\cdots$

Tabela 3.2: Posições do jogo de subtração com $S = \{2, 3, 5\}$ pela função de Sprague-Grundy

Dados vários jogos combinatórios, podemos definir um novo jogo combinatório utilizando as seguintes regras:

1. Existe uma posição inicial em cada um dos jogos
2. Os jogadores alternam entre si
3. Uma jogada consiste em escolher um dos jogos e fazer a jogada nesse jogo, mantendo os outros inalterados
4. Este novo jogo termina quando não houver mais nenhuma jogada possível em nenhum dos jogos, sendo esta portanto a posição terminal do novo jogo

A este novo jogo chamamos de soma (disjuntiva, neste caso) de jogos combinatórios.

De uma forma mais formal, dados n jogos combinatórios representados pelos grafos $G_1 = (X_1, F_1), G_2 = (X_2, F_2), \dots, G_n = (X_n, F_n)$, podemos juntar todos esses grafos num só grafo $G = (X, F)$. Denominamos esse grafo como soma de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ e definimos *essa soma de jogos combinatórios*, $G = G_1 + \ldots + G_n$, da seguinte forma:

O conjunto dos vértices X é dado pelo produto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, ou seja, X é o conjunto de todos os n-uplos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in X_i$ para todo o $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Escolhendo um vértice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, o conjunto de vértices sucessores de x é dado por:

$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \cup \{x_1\} \times F_2(x_2) \times \cdots \times \{x_n\} \cup \cdots \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times F_n(x_n)$.

Apêndice A

Código C# de Classificador de Posições em Jogos de Subtração

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace JogosSubtracao
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            //L são os valores de cada posição
            //o indice de cada valor é o valor da pilha de nim

            Console.WriteLine("Até que valor pretende analisar as posições?");
```

```
            int comprimento = Convert.ToInt16(Console.ReadLine());
            int[] L = new int[comprimento];

            for (int inic = 0; inic < comprimento; inic++)
            {
                L[inic] = 0;
            }

            //conjunto S do jogo de subtração, por exemplo, no Nim 21 seria:
            //S = { 1, 2, 3}
            int[] S = new int[20];



            //inicialização de variáveis
            int indice = 0;
            int valorLido = -1;
            bool parar = false;

            Console.WriteLine("Insira os valores do conjunto S que pretende testar
(0 para terminar a leitura de números):");
            while (!parar)
            {
                valorLido = Convert.ToInt16(Console.ReadLine());

                //quando for lido o valor 0 pára de ler valores para o conjunto S
                if (valorLido != 0)
                {
                    S[indice] = valorLido;
```

```
                    Console.WriteLine("Foi inserido o valor " +
valorLido + " ao conjunto S");
                    indice++;
                }
                else
                {
                    parar = true;
                }
            }

            //para cada indice do L (0, 1, 2, 3,...)
            for (int i = 1; i < L.Length; i++)
            {
                //para cada valor do conjunto S
                for (int k = 0; k < S.Length; k++)
                {
                    int valorDeSActual = S[k];

                    //para não dar valores negativos
                    if (i >= valorDeSActual)
                    {
                        int temp = i - valorDeSActual;

                        if (L[temp] <= L[i])
                        {
                            L[i] = L[temp] + valorDeSActual;
                        }
                    }
```

```
            }
        }

        Console.WriteLine("Lista de P e N posições:");
        for (int i = 0; i < L.Length; i++)
        {
            if (L[i] == 0)
            {
                Console.WriteLine(i + " -> P");
            }
            else
            {
                Console.WriteLine(i + " -> N");
            }
        }

   Console.WriteLine("Insira o número do seu palpite para o comprimento do padrão
(0 para não testar nenhum valor)");

        int palpitePadrao = Convert.ToInt16(Console.ReadLine());



        int contadorPadrao = 0;

        Console.WriteLine("Lista de P e N posições (para
testar comprimento do padrão):");
        for (int i = 0; i < L.Length; i++)
        {
```

```
                contadorPadrao++;
                if (L[i] == 0)
                {
                    Console.Write("P");
                }
                else
                {
                    Console.Write("N");
                }

                //de notar que se o valor inserido for 0,
     //não será detetado nenhum padrão

                if (contadorPadrao == palpitePadrao)
                {
                    contadorPadrao = 0;
                    Console.WriteLine();
                }
            }
            //apenas para a consola não se fechar
            Console.ReadLine();
        }
    }
}
```

Bibliografia

[1] Editores Atractor, *Jogo de sperner*, Gazeta da Matemática 159, 2009, http://www.atractor.pt/publicacoes/artigo6.pdf.

[2] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, and R.K. Guy, *Winning ways: For your mathematical plays*, Winning Ways, Academic Press, 1982.

[3] J. A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1976.

[4] Charles L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics **3** (1901), no. 1, pp. 35–39.

[5] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] Chandra Chekuri, *Algorithmic game theory*, Department of Computer Science, University of Illinois, 2008.

[7] D.I.A. Cohen, *On the sperner lemma*, (1967), 585–587.

[8] E.D. Demaine, *Playing games with algorithms: Algorithmic combinatorial game theory*, Mathematical Foundations of Computer Science 2001 (J. Sgall, A. Pultr, and P. Kolman, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 2136, Springer Berlin Heidelberg, 2001, pp. 18–33.

[9] Thomas S. Ferguson, *Game theory*, University of California at Los Angeles, 2005.

[10] R.E. Greenwood and A.M. Gleason, *Combinatorial relations and chromatic graphs*, (1955).

[11] Frank Harary, *Graph theory*, University of Michigan, Addison-Wesley, 1969.

[12] Bao Ho, *Subtraction games with expandable subtraction sets*, Department of Mathematics and Statistics, La Trobe University, 2012.

[13] Jonathan Huang, *On the sperner lemma and its applications*, Stanford, November, 2004.

[14] M. Knorps, *Nim and combinatorial games on graphs*, Faculty of Applied Physics and Mathematics, Gdansk University of Technology, http://math.rice.edu/∼michael/teaching/2012Fall/nim.pdf.

[15] E. Mead, A. Rosa, and C. Huang, *The game of sim: A winning strategy for the second player*, 5, vol. 47, Mathematics Magazine, 1974.

[16] Mark Meyer, *Nim-values in fibonacci nim*, University of Minnesota Morris, 2010.

[17] E. H. Moore, *A generalization of the game called nim*, Annals of Mathematics **11** (1910), no. 3, pp. 93–94.

[18] J.P. Neto and J.N. Silva, *Jogos nim*, 2008.

[19] E.P.J. Pearse, *The prisoner's dilemma*, Department of Mathematics, University of Iowa, 2010.

[20] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, (1928).

[21] B. Sartini, G. Garbugio, H. Bortolossi, P. Santos, and L. Barreto, *Uma introdução a teoria dos jogos*, II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 2004.

[22] G. J. Simmons, *The game of sim*, 2, J. Recreational Mathematics, 1969.

[23] Emanuel Sperner, *Neuer beweis fur die invarianz der dimensionszahl und des gebietes*, (1928), 265–272.

[24] M. J. Whinihan, *Fibonacci nim*, Mathematics Department, San Jose State College, California, 1963.