Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2012

Luísa Amélia Fernandes de Faria Casanova Afonso

A Matemática de alguns Jogos

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2012

Luísa Amélia Fernandes de Faria Casanova Afonso

A Matemática de alguns Jogos

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre (Mestrado em Matemática e Aplicações), realizado sob a orientação científica dos Doutores Manuel António Gonçalves Martins e Rui Filipe Alves Silva Duarte, Professores auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Ao meu marido e filhos Luís Carlos e Daniel

O júri

Presidente

Doutor Paulo José Fernandes Almeida

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutor Altino Manuel Folgado dos Santos

Professor Auxiliar da Universidade de Trás–os-Montes e Alto Douro

Doutor Manuel António Gonçalves Martins

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutor Rui Filipe Alves Silva Duarte

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Quero exprimir o meu agradecimento aos professores, orientadores deste trabalho, Doutor Manuel Martins e Doutor Rui Duarte, pela confiança, incentivo, conselhos, sugestões, criticas, pela leitura crítica e atenta e pela disponibilidade que sempre demonstraram, ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu marido pela paciência, motivação e incansável apoio na realização deste trabalho e nas traduções onde senti mais dificuldades.

Palavras-chave

Teoria dos jogos, jogos combinatórios e jogos lógicos.

Resumo

A definição de jogo continua ainda a ser muito vaga, dependendo de quem o define. Neste trabalho são apresentados alguns conceitos de jogo segundo a perspetiva de diferentes autores.

Os jogos combinatórios caracterizam-se por serem jogos onde não há interferência do acaso, são imparciais e terminam sempre com a vitória de um dos jogadores. Para alguns jogos é fácil encontrar a estratégia vencedora, como no jogo do NIM; o jogo do SIM e do Hex são jogos que nunca terminam empatados, o jogo da família dos Mancala, Ouri, é um jogo que quando bem jogado termina no empate.

Os jogos lógicos são muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. A utilização do cálculo proposicional e da teoria dos grafos em algumas situações simplifica a resolução deste tipo de jogos.

keywords

Game theory, combinatorial games and logic games.

abstract

The definition of game remains very vague, depending on who defines it. In this paper are presented some concepts of the game according to the perspective of different authors.

Combinatorial games are characterized by being games where there is no interference of chance, are imparcial and always end with the victory of one of the players. For some games it is easy to find a winning strategy, as in the game of NIM; the game of SIM and Hex are games that never end up tied, the game of Mancala, Ouri, is a game that when well-played ends in a tie.

Logical games are very important to the development of logical deductive reasoning. The use of propositional calculus and graph theory in some situations simplifies this type of games.

ÍNDICE

Introdução.....1

1. Os Jogos e a Matemática.....3

1.1. O que é um jogo?.....3

1.2. Tipos de jogos.....6

1.3. Formas de representação de um jogo.....7

1.4. Teoria de grafos.....10

2. Jogos Combinatórios.....17

2.1. Jogo do NIM.....18

2.1.1. Introdução.....18

2.1.2. Regras do jogo NIM.....19

2.1.3. Estratégia vencedora para o jogo NIM.....20

2.2. Jogo do SIM.....26

2.2.1. Introdução.....26

2.2.2. Regras do jogo.....27

2.2.3. Exemplo de um jogo utilizando seis vértices:.....27

2.3. Jogo do Hex.....32

2.3.1. Introdução.....32

2.3.2. Apresentação do jogo.....34

2.3.3. Regras do jogo.....34

2.3.4. Algumas estratégias do Hex.....35

2.3.5. Quem tem mais possibilidades de ganhar o jogo Hex?.....38

2.4. Jogos Mancala.....43

2.4.1. Um pouco de história.....43

2.4.2. Ouri 45
2.4.2.1. Um pouco de história do Ouri 45
2.4.2.2. Apresentação do jogo 45
2.4.2.3. Regras do jogo 46
2.4.2.4. Algumas dicas para ganhar uma partida de *Ouri* 48
3. Jogos Lógicos 50
3.1. Introdução 50
3.2. Problema da Travessia de Ilha para Ilha 52
3.3. Problema dos Canibais e dos Missionários 55
3.4. O Jogo de Grafos de Ehrenfeucht-Fraïssé 60
3.4.1. Um pouco de história deste jogo 60
3.4.2. Objetivo do jogo 61
3.4.3. Definição do jogo 61
3.4.4. Regras do jogo 62
3.4.5. Exemplos e situações de jogo 63
Considerações finais 73
Referências 75

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação são apresentados alguns jogos combinatórios e jogos lógicos. Como não existe ainda uma definição em concreto de jogo, existindo várias consoante o seu autor, começamos por apresentar algumas definições de diferentes autores. Seguidamente são definidos alguns tipos de jogo e formas de representação dos mesmos.

O objetivo desta dissertação é mostrar a importância da Matemática na procura de uma estratégia para que um determinado jogador seja vencedor. Nos jogos estudados nesta dissertação cada jogador tem apenas um objetivo: ganhar o jogo. Para alguns jogos, a procura de uma estratégia que leve à vitória fica mais facilitada com a aplicação da teoria dos grafos. A teoria dos grafos pode ser aplicada nos jogos combinatórios e nos jogos lógicos. Também são considerados jogos de soma nula e de soma não nula, o conhecido "*Dilema do Prisioneiro*".

Os jogos combinatórios estudados são o NIM, o SIM, o Hex e o Ouri (jogo da família Mancala). O jogo do NIM é um jogo de informação perfeita, para apenas dois jogadores, que nunca acaba empatado. O jogo do SIM e o do Hex são jogos onde se pode aplicar a teoria de grafos e, onde o empate nunca acontece. O Ouri é um jogo que exige um elaborado pensamento estratégico para poder ser bem jogado. Se o Ouri for bem jogado termina num empate, não havendo nem vencedores nem vencidos.

Os jogos lógicos implicam um raciocínio lógico dedutivo, e a aplicação da teoria dos grafos facilita a resolução dos mesmos. O jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé mostra a estreita relação que existe entre alguns conceitos lógicos mais complexos e o desenvolvimento de atividades lúdicas.

1. OS JOGOS E A MATEMÁTICA

Tentativa de uma rigorosa definição de jogo

1.1. O que é um jogo?

Não existe uma definição rigorosa de jogo. São apresentadas abaixo algumas definições de jogo da literatura:

- *"Um jogo é uma forma de brincar com objetivos e estrutura." (Kevin Maroney)*

- *"Um jogo é uma atividade ou ocupação voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente de vida quotidiana".* (Huizinga) [8]

- *"A nível mais elementar, podemos definir jogo como um exercício de sistemas de controlo voluntário em que há uma oposição entre forças, confinados por um procedimento e as regras a fim de produzir um resultado de desequilíbrio". (*Elliot Avedon e Brian Sutton-Smith*).*

- "*O jogo é um tipo de atividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. Os jogos de equipa podem ainda favorecer o trabalho cooperativo*". (Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Específicas de Matemática)

- *"Os jogos são caracterizados por um número fixo de jogadores ou tomadores de decisões que interagem, possivelmente se ameaçam e formam coligações,*

agem sob condições incertas, e por fim recebem algum benefício ou prejuízo, financeiro ou de outro tipo." (Thomas Ferguson) [5]

- *"Um jogo é uma forma de arte na qual os participantes, denominados jogadores, tomam decisões, a fim de gerir os recursos através de elementos de jogo na busca de um objetivo." (*Greg Costikyan*)*

- Segundo Brígida Sartini [18], *um jogo tem os seguintes elementos básicos:*
  - *um conjunto finito de jogadores, representado por* $J = \{j_1, j_2, ..., j_n\}$
  - *cada jogador* $j_i \in J$ *possui um conjunto finito de estratégias* $E_i = \{ e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im_i} \}$, *designadas estratégias puras do jogador* j_i *, com* $m_i \geq 2$.
  - *um vetor* $e = (e_{1k_1}, e_{2k_2}, ..., e_{nk_n}), 1 \leq k_i \leq m_i$ *onde* e_{ik_i} *é uma estratégia pura para o jogador* $j_i \in J$ é *designado por perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam o produto cartesiano* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, *denominado espaço de estratégia pura do jogo.*
  - *para cada jogador* $j_i \in J$ *, existe uma função vencedora*

$$v_i : E \rightarrow IR$$
$$e \rightarrow v_i(e)$$

  que associa o ganho (pagamento) $v_i(e)$ *do jogador* j_i *a cada perfil de estratégia pura* $e \in E$.

- Jouko Väänänen [19], dá uma formulação geral para os jogos de informação perfeita para duas pessoas:
  Considere-se, a formulação mais simples de um jogo em que existem dois jogadores I e II, um domínio A e um número natural n que representa o comprimento do jogo.

O jogador I começa o jogo, escolhendo um elemento $x_0 \in A$. Depois o jogador II escolhe $y_0 \in A$. Depois de terem sido jogados x_i e y_i, com $i + 1 < n$, o jogador I escolhe $x_{i+1} \in A$ e depois o jogador II escolhe $y_{i+1} \in A$. Após n rondas o jogo termina.

Para decidir quem ganha fixa-se à partida um conjunto de sequências $W \subseteq A^{2n}$

$$(x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1})$$

e declara-se que o jogador II ganha o jogo se a sequência formada durante o jogo estiver em W senão o jogador I ganha.

Estudando apenas para o caso de dois jogadores, I e II. Um jogo de um dos jogadores é qualquer sequência $\bar{x} = (x_0, ..., x_{n-1})$ de elementos de A. Uma sequência $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1})$, de elementos de A chama-se um jogo (de $G_n(A,W)$). Portanto, pode ser definido o conceito de jogo sem qualquer referência a jogar o jogo. O jogo $(\bar{x}, \bar{y})$ é uma vitória para o jogador II se $(x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1}) \in W$ e caso contrário uma vitória para o jogador I.

Tendo em conta as definições de jogo apresentadas acima, dadas por diferentes autores, podemos considerar que um jogo consiste numa atividade lúdica ou num desafio em que participam um determinado número de jogadores com um objetivo comum, ganhar o jogo, e para tal cada jogador, em cada jogada, tem um conjunto finito de opções. Num jogo temos jogadores e regras que são comuns para todos. Diz-se que um jogador tem uma *estratégia*[1] *vencedora* se tiver uma maneira de jogar que lhe garanta uma vitória certa, isto é, o seu oponente perde qualquer que seja o movimento que faça. Considerando sempre que um jogador quando participa num determinado jogo o faz com o objetivo de ganhar, então ele tentar tomar a decisão mais correta, em cada jogada de forma a ser o vencedor, isto é, vai tentar encontrar uma estratégia vencedora. Em jogos para dois ou mais jogadores, cada jogador na sua vez de jogar vai ter que, se necessário, mudar de estratégia pois a sua próxima jogada depende da(s) última(s) jogada(s) do(s) adversário(s). Portanto, um jogo

[1] Uma estratégia é um conjunto de meios e planos para atingir um objetivo

consiste num conjunto finito de jogadores com o objetivo único de ganhar e de um conjunto de estratégias para cada jogador.

No final de um jogo pode acontecer uma das três situações para cada um dos jogadores: ganhar, perder ou empatar. No entanto há jogos em que nunca se verifica uma situação de empate, isto é, jogos onde o que um jogador ganha é equivalente ao que o outro perde, ou seja, um jogador só tem uma de duas possibilidades: ganhar ou perder. Falaremos mais à frente em jogos deste tipo, por exemplo o *NIM*.

Em alguns jogos além de ganhar ou perder o jogo estão associados pagamentos (payoffs), que se podem traduzir em pontos ou em quantidades de dinheiro, estes jogos são conhecidos por jogos de soma nula. Nos jogos de soma nula pode haver empates, isso acontece quando ambos os jogadores ganham zero.

Vamos estudar com algum detalhe jogos em que o número de jogadores é dois, $n=2$, pois para este tipo de jogo (jogos com apenas dois jogadores) os conceitos são mais claros e as conclusões mais imediatas.

Por vezes, ao consultar alguma literatura, surge a expressão *árvore do jogo*. A árvore do jogo é um diagrama que inclui todas as posições possíveis de todas as partidas possíveis, isto é, considerando a posição inicial de um qualquer jogo, o primeiro jogador tem um conjunto de jogadas possíveis que pode escolher; para cada jogada escolhida pelo primeiro jogador o segundo jogador tem novamente um conjunto de opções e assim sucessivamente. Se se desenhasse este diagrama para incluir todas as jogadas possíveis dos dois jogadores ao longo das jogadas (terminando quando se chegasse ao fim da partida, sendo ela uma vitória, empate ou uma derrota para o primeiro jogador) obteríamos então uma árvore do jogo.

1.2. Tipos de jogos

Há uma infinidade de jogos, de todos os tipos e formas, desde os tradicionais de tabuleiro, a jogos com sons e cores, jogos de cartas, jogos corporais, jogos de computador, jogos apenas com papel e lápis, e outros mais.

Por detrás de um jogo combinatório está sempre implícita uma estratégia vencedora, que na maioria das vezes pode ser explicada utilizando teoria matemática. Vão ser

estudados alguns jogos combinatórios e lógicos, e para tal vamos começar por definir alguns conceitos que são essenciais para este tipo de jogos.

Em teoria dos jogos, diz-se que um jogo tem *informação perfeita* se todos os jogadores conhecem os movimentos prévios feitos por todos os outros jogadores (seus adversários), caso contrário diz-se de *informação imperfeita*. Os jogos de informação perfeita representam um pequeno subconjunto de jogos. Vamos estudar mais à frente alguns jogos de informação perfeita, o NIM, o SIM, o Hex e o Ouri. Um exemplo de jogos de informação imperfeita são os jogos de cartas, onde cada jogador só sabe as cartas que tem na sua mão desconhecendo as cartas dos outros jogadores.

Designam-se por *jogos simultâneos* (ou *estáticos*) aqueles em que se está perante uma situação em que ambos os jogadores se movem simultaneamente ou não se movem simultaneamente mas desconhecem as jogadas anteriores dos seus adversários. Os *jogos sequenciais* (ou *dinâmicos*) são aqueles em que o jogador conhece as jogadas anteriores do seu adversário; os movimentos de cada jogador seguem uma determinada ordem. Portanto, apenas os jogos sequenciais podem ser jogos de informação perfeita; os jogadores movem-se sequencialmente, estando cada um deles consciente das ações anteriores dos outros, enquanto nos jogos simultâneos nenhum jogador conhece a ação do outro.

Existem jogos em que há apenas um vencedor, isto é, a vitória de um dos jogadores implica a derrota dos restantes, independentemente da estratégia adotada por cada jogador. No caso de jogos com apenas dois jogadores em que um ganha e o outro perde, temos como exemplo de jogo do NIM.

Nos jogos de soma não nula, ou de soma variável, há ganhos e perdas diferenciados, pois os interesses dos jogadores não são completamente opostos – existe a possibilidade de cooperação, um exemplo deste tipo de jogo é "*O Dilema do Prisioneiro*", que será analisado mais à frente pois necessita de alguns conceitos que vão ser abordados a seguir.

1.3. Formas de representação de um jogo

As formas de representação mais utilizadas para representar um jogo são a forma normal e a forma extensiva.
John von Neumann e Oskar Morgenstern [11] são considerados os criadores da distinção entre representação de um jogo na forma extensiva e representação na forma normal, defendendo que o estudo dos jogos na forma normal facilita a sua compreensão.

A forma extensiva é utilizada nos jogos onde a ordem é importante, logo é ideal para representar jogos sequenciais. Nesta forma os jogos são apresentados como árvores, utilização de grafos, onde cada vértice representa um ponto de decisão para o jogador.

As representações na forma normal são apresentadas sob a forma de matrizes, muitas vezes conhecidas como matrizes de ganhos. A matriz mostra os jogadores, as estratégias e os pagamentos (payoffs). Na matriz as linhas correspondem a um dos jogadores e as colunas ao outro jogador. Os pagamentos são registados no interior da matriz, onde as entradas da matriz são pares ordenados, em que o primeiro valor corresponde ao pagamento recebido pelo jogador da linha e o segundo valor ao jogador da coluna. Estas matrizes podem ser de grande utilidade quando se querem identificar estratégias estritamente dominantes[2].

Se se compararem as duas formas de representação de jogos (normal e extensiva) verifica-se que na forma normal perde-se alguma da informação, pois a forma extensiva inclui todas as estratégias de cada jogador juntamente com as suas recompensas.
Quando um jogo é apresentado na forma normal, presume-se que cada jogador atua simultaneamente ou, ao menos, sem conhecer a ação dos outros. Se os jogadores têm

[2] Designa-se por estratégia estritamente dominante aquela estratégia que confere ao jogador um payoff sempre superior ao propiciado pela estratégia alternativa, independentemente do que os restantes jogadores possam fazer.

alguma informação acerca das escolhas dos outros jogadores, o jogo é habitualmente apresentado na forma extensiva.

Vamos agora tentar explicar um pouco o *Dilema do Prisioneiro* para se perceber porque é que este jogo não é um jogo de soma nula.

Resumidamente o Dilema do Prisioneiro [1] pode ser dado da seguinte forma:

> *Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. A polícia não tem provas suficientes para os condenar, então separa os prisioneiros em duas celas diferentes e oferece a ambos um acordo:*
>
> - *Se um dos prisioneiros confessar (trair o outro) e o outro prisioneiro permanecer em silêncio, o que confessou sai em liberdade enquanto o outro cumpre uma pena de 10 anos.*
> - *Se ambos ficarem em silêncio (colaborarem um com o outro), a polícia só pode condená-los a um ano cada um.*
> - *Se ambos confessarem, cada um leva 5 anos de cadeia.*
>
> *Cada prisioneiro decide sem saber a escolha do outro, pois não podem conversar. Como será que vão reagir os prisioneiros?*

Neste jogo o recurso a uma representação na forma normal, sob a forma de matriz, torna mais fácil a sua perceção assim como as condições impostas. Para distinguir os prisioneiros estes vão ser designados por Prisioneiro A e Prisioneiro B.

		Prisioneiro B	
		Colaborar (silêncio)	Trair (confessar)
Prisioneiro A	Colaborar (silêncio)	(1, 1)	(10, 0)
	Trair (confessar)	(0, 10)	(5, 5)

Na matriz, ao par ordenado apresentado corresponde o tempo em anos da condenação dos prisioneiros, a primeira coordenada corresponde ao prisioneiro A e a segunda coordenada corresponde ao prisioneiro B.

Analisando pormenorizadamente a situação trair ou ficar em silêncio para cada um dos prisioneiros chegamos à conclusão que trair é a melhor opção, isto porque:

- O Prisioneiro A tem de considerar duas opções:
  - se o Prisioneiro B escolher trair então o prisioneiro A ou escolhe colaborar e leva dez anos de prisão ou escolhe trair ficando com uma pena de 5 anos. Nesta situação, para o Prisioneiro A, trair é a melhor opção.
  - se o Prisioneiro B escolher colaborar, então o prisioneiro A ou escolhe colaborar e leva um ano de prisão ou escolhe trair e sai livre. Nesta situação, para o Prisioneiro A, trair é a melhor opção.

- Do ponto de vista do Prisioneiro B este também tem duas opções:
  - se o prisioneiro A escolher trair, então ou o prisioneiro B escolhe colaborar e tem uma pena de dez anos ou escolhe trair e tem uma pena de 5 anos. Nesta situação, para o Prisioneiro B, trair é a melhor opção.
  - se o Prisioneiro A escolher colaborar, então ou o prisioneiro B escolhe colaborar e leva um ano de prisão ou escolhe trair e sai livre. Nesta situação, para o Prisioneiro B, trair é a melhor opção.

Como se pode verificar pela análise acima, trair o companheiro parece ser a melhor opção e cada um fica com uma pena de 5 anos mas, analisando a matriz, esta não é a melhor opção, pois se ambos ficarem em silêncio, são condenados apenas a 1 ano cada.

Para alguns jogos, a busca de uma estratégia vencedora ou de uma resolução rápida é mais fácil utilizando a teoria dos grafos, desde que isso seja possível.

1.4. Teoria dos grafos

A teoria dos grafos[3] é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Para tal são empregadas estruturas designadas por grafos. O primeiro e um dos mais famosos problemas da teoria dos grafos, o problema das Pontes de Königsberg[4], foi resolvido por Euler em 1736.

Designa-se por *grafo* [2] uma estrutura tripla da forma G = ($V(G)$, $A(G)$, ψ_G) tal que $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio de vértices, $A(G)$ é o conjunto das arestas e ψ_G é uma função de incidência que a cada aresta do grafo G associa um conjunto de um ou dois vértices de G.

Exemplo 1: Considere-se o grafo G = ($V(G)$, $A(G)$, ψ_G), representado abaixo

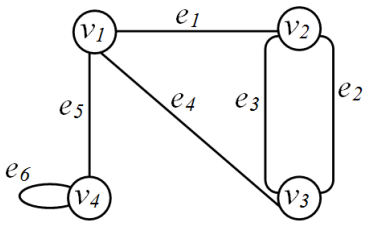


Figura 1 – Exemplo de um grafo

onde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $A(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e ψ_G é definida por

$\psi_G(e_1) = \{v_1,v_2\}$, $\psi_G(e_2) = \{v_2,v_3\}$, $\psi_G(e_3) = \{v_2,v_3\}$,

$\psi_G(e_4) = \{v_1,v_3\}$, $\psi_G(e_5) = \{v_1,v_4\}$, $\psi_G(e_6) = \{v_4\}$

Aos elementos de $V(G)$ dá-se o nome de *vértices* e aos elementos de $A(G)$ dá-se o nome de *arestas*. Normalmente representam-se os vértices por círculos e as arestas entre dois vértices, *a* e *b*, pelo conjunto $\{a, b\}$.

A *ordem* de um grafo G corresponde ao número de vértices desse grafo e representa-se por $|V(G)|$. A *dimensão* de um grafo é o número de arestas desse grafo,

[3] A teoria dos grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da Matemática. De entre os primeiros cientistas a trabalhar nesta área destacaram-se Leonhard Euler, Gustav Kirchhoff e Arthur Cayley.

[4] *"Na cidade de Konisberg existe uma ilha chamada Kneiphof, com dois braços do rio Pregel a contorná-la. Existem sete pontes. A questão consiste em saber se uma pessoa pode planear um caminho, de tal modo que atravesse cada uma das pontes exatamente e apenas uma única vez."*

simbolicamente por $|A(G)|$. Se um *grafo* não tiver arestas diz-se que é *nulo*, isto é, tem dimensão nula.

Uma *aresta* que une dois vértices de um grafo diz-se *incidente* em cada um dos seus vértices, isto é, uma aresta *e* é incidente a um vértice *v* se *v* pertence a $\psi_G(e)$. Dois *vértices* dizem-se *adjacentes* quando existe uma aresta a uni-los, analogamente, duas *arestas* dizem-se *adjacentes* se tiverem um vértice em comum.[2]

Por vezes em alguns grafos aparecem duas arestas com extremos iguais, isto é, existem $e, f \in A(G)$ tais que $\psi_G(e)= \psi_G(f)$, neste caso diz-se que as *arestas* são *paralelas*; quando uma aresta tem ambos os extremos no mesmo vértice de um grafo esta designa-se por *lacete*.

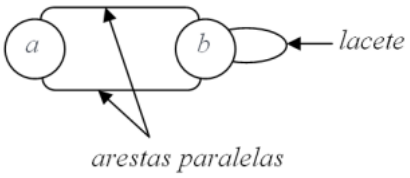


Figura 2 - Exemplo de um grafo que contém lacetes e arestas paralelas

Se um grafo não tem arestas paralelas nem lacetes diz-se *simples*, caso contrário designa-se por *multigrafo*.

Designa-se por *grau* ou *valência de um vértice v*, e representa-se por $g(v)$ o número de arestas de G incidentes nesse vértice. Se não incide nenhuma aresta em *v*, isto é, se $g(v)=0$, o vértice diz-se um *vértice isolado*. Se $g(v)=1$, significa que em *v* incide apenas uma aresta e o *vértice* diz-se *terminal*. Na determinação do grau de um vértice o lacete conta duas vezes. Um vértice que está ligado a cada um dos outros vértices designa-se por *vértice anti-isolado*.

A *matriz de incidência* do grafo G é uma matriz bidimensional, $M(G)=[m_{ij}]$ em que as entradas m_{ij} correspondem ao número de vezes que o vértice v_i incide na aresta e_j. Por outro lado, designa-se por *matriz de adjacência* do grafo G à matriz, também bidimensional, $|V(G)| \times |V(G)|$, $Ad(G) = [a_{ij}]$, em que os a_{ij} correspondem ao número de arestas que ligam os vértices v_i e v_j.

Lema: Em qualquer grafo a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja, em qualquer grafo G = (*V(G)*, *A(G)*, ψ_G) é satisfeita a igualdade $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A(G)|$.

Prova:

Considere-se a matriz de incidência M(G). A soma das entradas numa linha corresponde precisamente ao grau do vértice, e

$$\sum_{v \in V} g(v) = \sum_i g(v_i) = \sum_i \sum_j m_{ij} = \sum_j \sum_i m_{ij} = \sum_j 2 = 2|A(G)|$$

é justamente a soma de todas as entradas em M(G).

Logo $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A(G)|$. □

A matriz de incidência do grafo do exemplo 1 é dada por

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	0	0	1	1	0
v_2	1	1	1	0	0	0
v_3	0	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	2

Por um lado, $g(v_1) = 3$, $g(v_2) = 3$, $g(v_3) = 3$ e $g(v_4) = 3$, logo $\sum_{v \in V} g(v) = 12$. Por outro lado, |A(G)|=6, isto é o grafo tem apenas seis vértices e a soma dos graus de todos os vértices é 12, logo $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A(G)|$.

□

Um grafo simples G, com *n* vértices, diz-se um *grafo completo*, e representa-se por K_n, quando todos os pares de vértices são adjacentes, isto é, todos os vértices têm grau *n - 1*. Num grafo completo todos os vértices são anti-isolados.

No jogo do SIM apresentado mais à frente, na secção dos jogos combinatórios, são usados grafos completos.

Por vezes, por uma questão de nomenclatura ou para uma interpretação mais clara (como é o caso da notação usada no jogo Ehrenfeucht-Fraïssé), designa-se por *vértice popular* um vértice em que todos os (outros) vértices do grafo são adjacentes a esse vértice ou são adjacentes a um vértice adjacente a esse vértice. É apresentado abaixo um grafo em que o vértice *a* é popular.

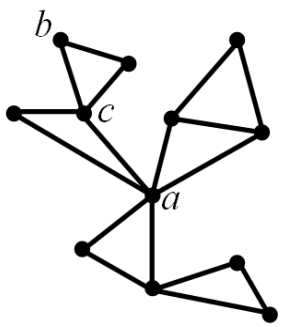


Figura 3 - Grafo em que existe um vértice popular *a*

Um *grafo* diz-se *bipartido* ou *bigrafo* quando o conjunto dos seus vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2, tais que qualquer aresta em A tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Um grafo bipartido é representado normalmente por $G=(V_1,V_2;A;\psi)$. Quando $|V_1|=n$, $|V_2|=m$ e $\forall u \in V_1$ e $\forall v \in V_2$, $\{u,v\} \in \Psi(A(G))$ o grafo denota-se por $K_{n,m}$ e designa-se por *grafo bipartido completo*.

Um *isomorfismo* entre dois grafos simples G e H é uma bijeção *f* de *V(G)* em *V(H)* tal que dois vértices *u* e *v* são adjacentes em G se e somente se *f*(*u*) e *f*(*v*) são adjacentes em H [4], isto é, $\{u, v\} \in A(G)$ se e só se $\{f(u), f(v)\} \in A(H)$ para todos $u, v \in V(G)$.

Dois grafos dizem-se *idênticos* ou *isomorfos* se existir um isomorfismo entre eles. Esta noção vai ser utilizada no jogo dos grafos de Ehrenfeucht-Fraïssé.

Em teoria de grafos, um *subgrafo* de um grafo G é um grafo G'=($V(G')$, $A(G')$, $\psi_{G'}$) cujo conjunto de vértices de G' é um subconjunto do conjunto de vértices de G

($V(G') \subseteq V(G)$) e o conjunto de arestas de G' é um subconjunto de arestas de G com os extremos em $V(G')$ ($A(G') \subseteq A(G)$).

Seja S um subconjunto não vazio de $V(G)$. O subgrafo G' de G diz-se gerado por S se $V(G')$=S e se $A(G')$ é o conjunto das arestas de $A(G)$ que possuem ambos os extremos em S.

2. JOGOS COMBINATÓRIOS

A teoria de jogos combinatórios é um ramo da matemática aplicada e das ciências da computação que estuda jogos de informação perfeita, tratando apenas de jogos em que as jogadas de cada jogador são do conhecimento do adversário. Assim sendo, um jogo combinatório é um jogo de informação perfeita em que nenhuma das jogadas é aleatória, isto é, não depende da sorte.

Nos jogos combinatórios podemos ainda falar de *jogos imparciais*, em que o conjunto de jogadas a partir de uma dada posição é o mesmo para qualquer jogador, qualquer peça disponível para um jogador deve estar disponível para os restantes, e, de *jogos parciais*, em que cada jogador tem um conjunto diferente de possibilidades de jogadas a partir de uma dada posição, como por exemplo no xadrez e nas damas.

Nos jogos para dois jogadores, escolhe-se o jogador que irá iniciar o jogo e efetuar as suas jogadas alternadamente com o adversário até que se chegue a uma posição terminal. A *posição terminal* é aquela em que um dos jogadores é declarado vencedor e o outro perdedor ou então a situação de empate, em que não há vencedores nem perdedores.

A teoria de jogos combinatórios surgiu como forma de explicar a teoria de jogos imparciais. Um exemplo deste tipo de jogo é o NIM, que será visto mais tarde. A teoria de jogos tenta determinar a melhor sequência de estratégias para cada jogador de forma que se tenha uma jogada ideal até ao final do jogo e que seja atingido o objetivo inicial, ganhar o jogo. Por vezes é difícil determinar essa sequência, a menos que o jogo seja simples. Para tal vão ser estudados jogos em que o número de jogadores é dois. Dentro do grupo dos jogos combinatórios vão ser estudados o NIM, o SIM, o Hex e o Ouri (da família dos jogos Mancala).

2.1. Jogo do NIM

2.1.1. Introdução

O NIM é um jogo para dois jogadores, em que os objetos que podem ser removidos por um jogador também podem ser removidos pelo outro, sendo assim um jogo imparcial. Neste jogo perde aquele jogador que já não puder efetuar uma jogada, ou seja, ganha o jogador que retirar a última peça.
A designação de NIM foi proposta por Charles Bouton o qual publicou um artigo [3] onde estuda a teoria matemática subjacente a este jogo. A teoria desenvolvida nesse artigo está relacionada com a aritmética dos números naturais no sistema de numeração binário (composta apenas por 0 e 1).

Segundo Paulo Figueiredo [17] o NIM é um dos exemplos mais importantes dos jogos de estratégia imparciais, tendo em conta que é:

- um jogo de apenas dois jogadores, onde estes jogam alternadamente;
- de informação perfeita, pois os jogadores sabem todas as jogadas efetuadas até ao momento;
- um jogo onde o factor sorte não existe, isto é, é um jogo determinístico;
- imparcial pois para cada posição de jogo, o acesso é igual para os dois jogadores;
- um jogo que tem um número finito de movimentos.

O NIM foi o primeiro jogo a ser estudado matematicamente e é considerado um dos jogos mais antigos que se conhecem mas, a sua origem ainda é desconhecida; no entanto Charles Bouton considera que este jogo teve origem na China, apesar de ser jogado na Europa desde o séc. XVI.
A palavra “NIM” significa “roubar” ou “retirar” e é um termo que foi utilizado por Shakespeare e, se fizermos uma rotação de 180º à palavra *NIM*, obtém-se a palavra *WIN* que significa vencer [17].

Há diversas variantes do jogo NIM. Segundo Rego & Rego [16], as mais usadas são: o jogo das correntes, o tabuleiro circular, o tabuleiro em estrela, o jogo das torres e o jogo da rainha.

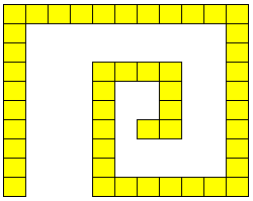


Figura A – Jogo das correntes

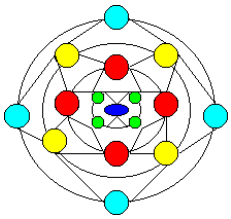


Figura B – Tabuleiro circular

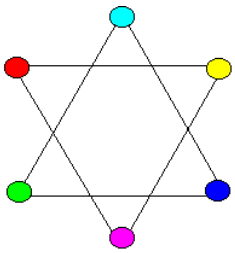


Figura C – Tabuleiro em estrela

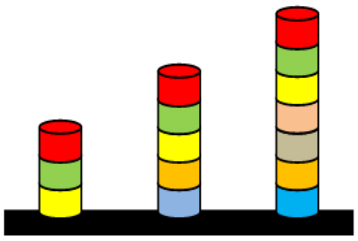


Figura D – Jogo das torres

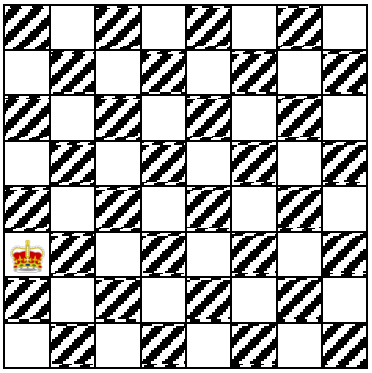


Figura E – Jogo da rainha

Figura 4 – Variantes do NIM mais utilizadas, segundo Rego & Rego [16]

Vamos debruçar-nos essencialmente no jogo das torres, o qual designamos apenas por NIM. Este jogo, NIM, pode ser jogado com pilhas de peças, é muito jogado na praia, no Brasil, em que as peças são pedras ou pauzinhos.

2.1.2. Regras do jogo NIM

1. Os jogadores definem o número de pilhas de peças assim como o número de peças de cada pilha;
2. Os dois jogadores escolhem/sorteiam o jogador que inicia o jogo (jogador I);
3. Os jogadores efetuam as suas jogadas alternadamente;
4. Os jogadores só podem retirar peças de uma pilha à sua escolha, no mínimo de uma peça e no máximo de todas as peças da pilha;
5. Ganha o jogador que retirar a última peça.

Como mencionado nas regras do jogo, os jogadores no início do jogo é que definem o número de pilhas de peças. Uma vez que o número de pilhas de peças pode variar, depende da escolha dos jogadores, pretende encontrar-se a estratégia vencedora mediante o número de pilhas.

2.1.3. Estratégia vencedora para o jogo NIM

- **Para um jogo constituído apenas por uma pilha de peças**

Com apenas uma pilha de peças, o jogador I pode retirar todas as peças e ganha numa só jogada, tornando-se assim o jogo trivial.

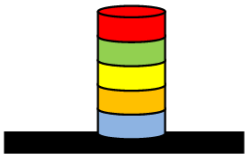


Figura 5 – Jogo do NIM constituído apenas por uma pilha de cinco peças

- **Um jogo constituído por duas pilhas de peças**

No caso de duas pilhas de peças, se estas tiverem o mesmo número de peças o jogador II ganha desde que copie na segunda pilha as mesmas jogadas do jogador I.

Se o número de peças das pilhas for diferente, a estratégia vencedora consiste em retirar de uma delas o número de peças necessárias para igualar as duas pilhas e a partir daí repetir sempre as jogadas do jogador II, de forma a deixar sempre iguais as duas pilhas de peças. Quando o jogador II retirar todas as peças de uma pilha, o jogador I retira todas as peças da outra pilha e ganha o jogo.

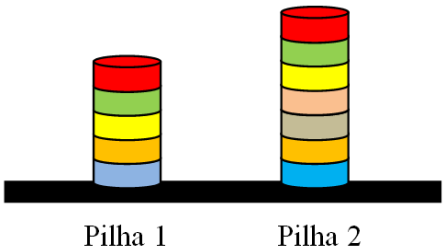


Figura 6 – Jogo do NIM, constituído por duas pilhas de peças

- **O jogo é constituído por três ou mais pilhas de peças**

Com três ou mais pilhas, a estratégia vencedora é um pouco mais complexa. Para definir a estratégia vencedora temos de introduzir o conceito *soma nim*. Para tal o número de peças de cada pilha é escrito na forma binária (zeros e uns) e é feita a respetiva soma.

Seja $N_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$. Podemos definir a soma nim ($\oplus$) para pares de inteiros não negativos

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

e essa operação goza das seguintes propriedades [12]:

1. Comutativa: $x \oplus y = y \oplus x$, para todo o $x, y \in N_0$
2. Associativa: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, para todo o $x, y, z \in N_0$
3. 0 é o elemento neutro: $x \oplus 0 = x$, para todo o $x \in N_0$
4. Cada número é o seu próprio inverso: $x \oplus x = 0$, para todo o $x \in N_0$

Considerem-se três pilhas de peças, por exemplo:

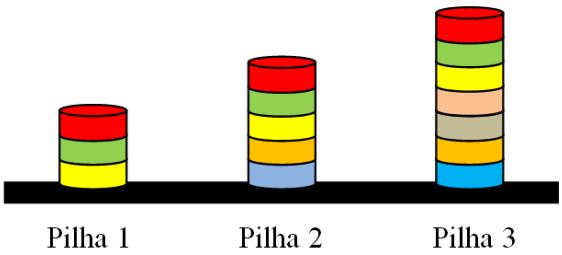


Figura 7 – Jogo do NIM, constituído por três pilhas de peças

Defina-se o número de peças de cada pilha como uma soma de potências de base 2,

Pilha 1 $\rightarrow$ $3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0$

Pilha 2 $\rightarrow$ $5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$

Pilha 3 $\rightarrow$ $7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

Supondo que as potências de base 2 que não aparecem na representação de um número estão a ser multiplicadas por zero, pode escrever-se

$$3 = 1\times 2 + 1\times 1 = 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$5 = 1\times 4 + 1\times 1 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$7 = 1\times 4 + 1\times 2 + 1\times 1 = 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

Escrevendo somente os coeficientes obtemos as representações de 3, 5 e 7 na base 2, como

$3 \rightarrow 1\ 1$ $\qquad$ $5 \rightarrow 1\ 0\ 1$ $\qquad$ $7 \rightarrow 1\ 1\ 1$

ou seja,

$3 = (1\ 1)_2$ $\qquad$ $5 = (1\ 0\ 1)_2$ $\qquad$ $7 = (1\ 1\ 1)_2$

Representamos assim os números 3, 5 e 7 recorrendo a zeros e uns.

Charles Bouton [3] mostrou que os jogadores devem calcular a soma nim dos números de peças das diferentes pilhas. Se esse número for diferente de zero, o jogador deve procurar uma jogada de forma a deixar ao adversário pilhas de peças com soma nim nula. Quem proceder desta forma em todas as jogadas vence o jogo com toda a certeza.

Calculando a soma nim [15] coordenada a coordenada das três pilhas de peças (compostas por três, cinco e sete peças) vem,

$$(0\ 1\ 1)_2 \oplus (1\ 0\ 1)_2 \oplus (1\ 1\ 1)_2 = (0\ 0\ 1)_2.$$

A jogada vencedora é a que retira uma peça. A peça a retirar pode ser de qualquer pilha de peças, como se pode ver abaixo.

<u>1ª situação</u> - Se retirar uma peça à pilha com três peças, ficamos com duas, cinco e sete peças em cada pilha, respetivamente, e a soma nim é

$$(0\ 1\ 0)_2 \oplus (1\ 0\ 1)_2 \oplus (1\ 1\ 1)_2 = (0\ 0\ 0)_2.$$

<u>2ª situação</u> - Se retirar uma peça à pilha com cinco peças, ficamos com três, quatro e sete peças em cada pilha, respetivamente, e a soma nim é

$$(0\ 1\ 1)_2 \oplus (1\ 0\ 0)_2 \oplus (1\ 1\ 1)_2 = (0\ 0\ 0)_2.$$

<u>3ª situação</u> - Se retirar uma peça à pilha com sete peças, ficamos com três, cinco e seis peças em cada pilha, respetivamente, e a soma nim é

$$(0\ 1\ 1)_2 \oplus (1\ 0\ 1)_2 \oplus (1\ 1\ 0)_2 = (0\ 0\ 0)_2.$$

Como se pode verificar pelas somas nim calculadas acima, a peça a retirar pode ser de qualquer pilha de peças, pois obtemos sempre a soma nim nula.

Considera-se uma combinação segura aquela que obtiver como soma nim apenas o dígito zero. Logo, a estratégia vencedora é passar o jogo ao adversário em que a soma nim seja nula, isto é, deixar uma combinação segura.

Charles Bouton [3] enunciou um teorema que diz:

<u>Teorema B1</u>: Se o jogador I deixar uma combinação segura (soma nim nula) após a sua jogada, então o jogador II não conseguirá deixar outra combinação segura na sua vez, isto é, a soma nim não é nula.

Prova:

Se o jogador I deixou uma combinação segura, o jogador II, na sua vez de jogar, pode apenas mexer numa pilha e tem que retirar pelo menos uma peça dessa pilha. Assim, se partirmos, por exemplo, da combinação (segura)

$$(0\ 1\ 0)_2 \oplus (1\ 0\ 1)_2 \oplus (1\ 1\ 1)_2 = (0\ 0\ 0)_2 \rightarrow \text{soma nim nula}$$

Começando na pilha com menos peças (pilha 1), retirando apenas uma peça, tem-se

Pilha 1	Pilha 2	Pilha 3	SOMA NIM
(0 0 1)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 1 1)

Mas, se retirarmos duas peças na mesma pilha em vez de apenas uma, fica

Pilha 1	Pilha 2	Pilha 3	SOMA NIM
(0 0 0)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 1 0)

Podemos resumir na tabela seguinte todas as jogadas possíveis:

	Pilha1|	Pilha2|	Pilha3	Pilha 1	Pilha 2	Pilha 3	**Soma nim**
POSIÇÃO INICIAL	3	5	7	(0 1 1)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 0 1)
JOGADA 1	2	5	7	(0 1 0)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 0 0)
POSSÍVEIS JOGADAS	1	5	7	(0 0 1)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 1 1)
	0	5	7	(0 0 0)	(1 0 1)	(1 1 1)	(0 1 0)
	2	4	7	(0 1 0)	(1 0 0)	(1 1 1)	(0 0 1)
	2	3	7	(0 1 0)	(0 1 1)	(1 1 1)	(1 1 0)
	2	2	7	(0 1 0)	(0 1 0)	(1 1 1)	(1 1 1)
	2	1	7	(0 1 0)	(0 0 1)	(1 1 1)	(1 0 0)
	2	0	7	(0 1 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(1 0 1)
	2	5	6	(0 1 0)	(1 0 1)	(1 1 0)	(0 0 1)
	2	5	5	(0 1 0)	(1 0 1)	(1 0 1)	(0 1 0)
	2	5	4	(0 1 0)	(1 0 1)	(1 0 0)	(0 1 1)
	2	5	3	(0 1 0)	(1 0 1)	(0 1 1)	(1 0 0)
	2	5	2	(0 1 0)	(1 0 1)	(0 1 0)	(1 0 1)
	2	5	1	(0 1 0)	(1 0 1)	(0 0 1)	(1 1 0)
	2	5	0	(0 1 0)	(1 0 1)	(0 0 0)	(1 1 1)

Como se pode verificar, em nenhuma das possíveis jogadas se obtém novamente uma soma nim nula. Efetivamente, quando se obtém uma soma nim nula, ela será inevitavelmente desfeita na jogada seguinte pois a jogada conduzirá a uma alteração da posição do(s) digito(s) "1" que constarem na representação binária correspondente à pilha onde for realizada a jogada, alterando desse modo a soma nim. □

Como vimos no teorema anterior, se o jogador I deixar uma combinação segura o jogador II não consegue manter essa combinação pois a soma nim após a sua jogada é não nula. Será que o jogador I pode voltar a encontrar uma combinação segura, na sua vez de jogar? A resposta a esta questão é dada por Charles Bouton através do seguinte teorema:

Teorema B2: Se o jogador I deixar uma combinação segura e o jogador II retirar peças de uma determinada pilha, então o jogador I poderá recompor uma combinação segura retirando peças de uma das outras pilhas.

Prova:

Suponhamos que o jogador I deixou uma combinação segura.

Então, como se viu no Teorema B1, o jogador II não consegue manter a combinação segura (soma nim nula). Qualquer que seja a sua jogada, irão aparecer na soma nim alguns dígitos “1”. Tudo o que o jogador I tem a fazer para restaurar a soma nim nula é retirar peças numa das outras pilhas, de modo que os dígitos “1” que passaram a aparecer na soma nim possam ser “anulados” por “1” que deverão aparecer na pilha alterada. Temos então dois subproblemas: o primeiro é o da escolha da pilha onde devem ser retiradas as peças e o segundo problema é o modo como as peças serão retiradas (isto é, qual o número de peças a retirar).

Relativamente à pilha a escolher, terá de ser aquela cuja representação binária do número de peças respetivo tenha “1” na mesma posição que o dígito “1” situado mais à esquerda na soma nim, porque quando um número diminui, a mudança que ocorre na sua representação binária, olhando da esquerda para a direita, é a passagem de algum “1” para “0”.

No que diz respeito ao número de peças a retirar para voltar a ter uma combinação segura, basta que o jogador retire um número de peças tal que a representação binária do número resultante passe a ter “0” na posição onde anteriormente estava “1” e alterar ou não os dígitos à direita desta casa, consoante o dígito correspondente da soma nim, de modo a obter uma soma nim nula. □

Este teorema pode ser verificado no exemplo seguinte.

Consideremos um jogo com 3 pilhas e 16, 12 e 28 peças, respetivamente.

1 0 0 0 0		1 0 0 0 0		1 0 0 0 0
0 1 1 0 0		0 1 1 0 0	→	0 1 0 1 1
<u>1 1 1 0 0</u>	→	<u>1 1 0 1 1</u>	(-1 peça)	<u>1 1 0 1 1</u>
0 0 0 0 0	(-1 peça)	0 0 1 1 1		0 0 0 0 0

O jogador II retirou uma peça à pilha 3, obtendo uma soma nim não nula. Para obter novamente uma combinação segura, o jogador I retirou então 1 peça na segunda pilha. Repare-se que o jogador I:

i) escolheu a segunda pilha, que era a única onde aparece o dígito “1” na mesma posição que o dígito “1” mais à esquerda na soma nim;
ii) retirou um número de peças tal que houvesse alteração no dígito “1” na mesma posição que o digito “1” mais à esquerda da soma nim, alterando também os dois “0” à direita para “1”, de forma a garantir uma soma nim nula.

Está assim mostrado, neste caso particular, que o jogador I pode voltar a recompor uma combinação segura, mas tem que ter em atenção a pilha que escolhe para retirar as peças bem como o número de peças a retirar dessa pilha.
Podemos concluir que se o jogador I deixar uma combinação segura, pelo teorema B1 o jogador II não consegue manter a jogada segura, pois tem de diminuir o número de peças de uma das pilhas. Na jogada seguinte o jogador I pode conseguir uma combinação segura retirando o número de peças necessários de uma das pilhas para que a soma nim seja nula.
Assim sendo, o jogador que conseguir manter uma soma nim nula ganha o jogo. Se a primeira disposição de peças nas pilhas for uma combinação segura, o jogador I desmancha essa combinação, mas o jogador II tem possibilidade de recompor uma combinação segura (pelo teorema B2 de Bouton). Se o jogador II conseguir manter sempre uma combinação segura ganha o jogo.
Tendo em conta que os jogadores no início do jogo escolhem o número de pilhas e o número de peças de cada pilha, se a primeira disposição de peças nas pilhas não for uma combinação segura, e o jogador I conseguir uma combinação segura, logo na primeira jogada e conseguir manter sempre essa combinação, então ganha o jogo.

2.2. Jogo do SIM

2.2.1. Introdução

O “SIM” é um jogo de informação perfeita sendo jogado por dois jogadores que têm conhecimento das jogadas do adversário antes de efetuar a sua própria jogada. Trata-se de um jogo de lógica que foi descrito em 1969 por Gustavus J. Simmons.

Para este jogo são necessários lápis de cores diferentes, um para cada jogador e um papel onde estão marcados os vértices de um polígono.

Os polígonos mais adequados para jogar o SIM são os de seis vértices, porque é o menor número de vértices para o qual o jogo não termina empatado (como veremos mais à frente).

O objetivo do jogo, para cada jogador, consiste em traçar segmentos de reta que unam dois vértices do polígono, de tal forma que não se formem triângulos com os três lados da mesma cor e cujos vértices coincidam com 3 dos 6 vértices marcados inicialmente.

2.2.2. Regras do jogo

1. Escolhe-se aleatoriamente o jogador que inicia o jogo;
2. Desenham-se num papel os vértices de um polígono, de forma a que quaisquer três vértices sejam não colineares;
3. Alternadamente, os jogadores traçam um segmento de reta, unindo dois pontos quaisquer do polígono;
4. Perde o primeiro jogador que formar um triângulo com os três lados da cor que utiliza e cujos vértices do triângulo construído sejam 3 dos 6 vértices marcados inicialmente.

2.2.3. Exemplo de um jogo utilizando seis vértices:

Suponhamos que o primeiro a jogar é o vermelho.

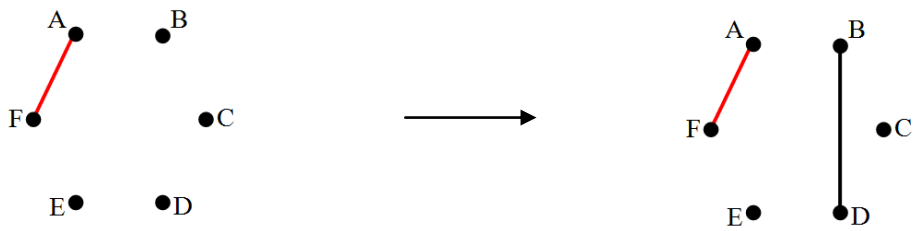


Figura 8 – Algumas jogadas do jogo do SIM

Após algumas jogadas em que nenhum dos jogadores ainda completou um triângulo, chegamos à seguinte situação

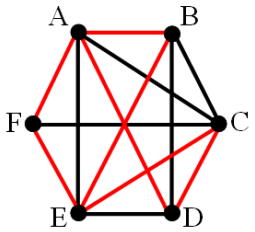


Figura 9 – Uma posição possível do jogo

Ao analisar a figura anterior podemos verificar que há apenas dois pares de vértices que ainda não foram unidos, que são os que aparecem na figura a seguir a tracejado.

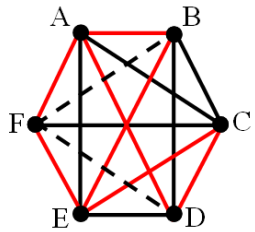


Figura 10 – Indicação, a tracejado, das únicas jogadas que ainda podem ser efetuadas

O jogador que utiliza a cor vermelha já efetuou sete jogadas e o jogador que utiliza a cor preta efetuou apenas seis jogadas. Como o jogador que iniciou o jogo foi o que utiliza a cor vermelha, o jogador a efetuar a próxima jogada é o que tem a cor preta.

Os segmentos de reta que faltam unir são [FB] e [FD]. Se o jogador com a cor preta desenhar o segmento de reta [FB] completa um triângulo, que é o triângulo [BCF], se desenha o segmento de reta [FD] não completa nenhum triângulo com a sua cor. Logo, para não perder, a jogada deste jogador será unir os vértices F e D.

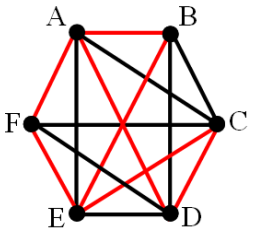


Figura 11 – Posição do jogo, antes da jogada do jogador vermelho

O jogador que utiliza a cor vermelha tem apenas uma possibilidade de jogo que é unir os pontos F e B. Este jogador ao efetuar esta jogada vai completar um triângulo com a sua cor, cujos vértices são os pontos A, B e F.

Assim sendo o jogador que utilizou a cor vermelha perdeu o jogo, porque foi o primeiro a completar um triângulo cujos lados são da sua cor.

Enquanto no jogo NIM, apresentado anteriormente, ganha o jogador que retirar as últimas peças, aqui o jogador que completa o triângulo da sua cor é que perde, ganhando o jogador que não completa o triângulo, ou seja, o último jogador a efetuar a sua jogada é aquele que perde.

No exemplo apresentado anteriormente o jogador que utilizou a cor vermelha perdeu o jogo. Será que existe sempre um vencedor ou o jogo pode terminar empatado?

Em cada vértice são incidentes cinco arestas. Como só temos duas cores e com essas temos que representar as cinco arestas de cada vértice, podemos assim concluir que, para cada vértice, têm de existir pelo menos três arestas com a mesma cor. Estamos deste modo a utilizar o princípio da gaiola dos pombos.

Teorema (Princípio da Gaiola dos Pombos): Se n caixas são ocupadas por n+1 objetos, então pelo menos uma caixa deverá conter pelo menos dois objetos.

Prova:

Se cada caixa tivesse no máximo um objeto, nas n caixas haveria no máximo n objetos. Como temos n+1 objetos, logo, pelo menos uma das caixas terá de ter dois objetos. □

O Princípio da Gaiola dos Pombos pode ser generalizado:

Teorema (Generalização do Princípio da Gaiola dos Pombos). *"Se n caixas são ocupadas por kn+1 objetos, então pelo menos uma caixa deverá conter pelo menos k*+1 *objetos."*

Prova:

Se cada caixa tivesse no máximo k objetos, as n caixas teriam no máximo kn objetos. Como temos kn+1 objetos, então pelo menos uma caixa terá no mínimo k+1 objetos. □

No jogo SIM abordado inicialmente temos seis vértices. Assim, dado um vértice, uma vez que o seu grau é cinco e como só temos duas cores, então pelo teorema anterior, desse vértice saem pelo menos três arestas da mesma cor.

Para podermos responder à questão sobre a possibilidade de empate no jogo do SIM, vamos utilizar a teoria de Ramsey. A teoria de Ramsey deve-se ao matemático Frank Plumpton Ramsey, e é um ramo da matemática que estuda em que condições uma determinada ordem ocorre num conjunto. Em 1930 Ramsey publicou estudos sobre esta teoria (teoria de Ramsey) baseando-se na teoria de conjuntos. Atualmente a forma mais comum de estudar a teoria de Ramsey é baseada na teoria dos grafos, pois é mais intuitiva e palpável que a teoria dos conjuntos.

Pretende mostrar-se que o jogo do SIM nunca termina num empate e para tal vamos utilizar a teoria dos grafos. Vamos supor que o jogo pode acabar empatado. Então podemos colorir as arestas de K_6 com duas cores de tal modo que não haja um triângulo com as arestas da mesma cor

Para ser mais fácil de responder a este problema vamos considerar G_V o grafo constituído por todos os seis vértices mas cujas arestas apenas são as vermelhas e G_P o grafo constituído por todos os seis vértices do polígono mas cujas arestas são as pretas.

Dado um vértice x do grafo, o grau de x em G_V somado com o grau de x em G_P totaliza 5, então pelo princípio da gaiola dos pombos um dos graus é pelo menos três.

Considere-se que x é adjacente a três dos vértices, por exemplo y, z e w, do grafo, em G_V. Se existirem pelo menos dois desses vértices que sejam adjacentes, isto é $\{y, z\}$ ou $\{y, w\}$ ou $\{z, w\}$, então eles formam um triângulo com x em G_V, caso contrário, $\{y, z\}$, $\{y, w\}$ e $\{z, w\}$ estão em G_P, ou seja, os três vizinhos de x formam um triângulo em G_P. Assim sendo, está mostrado que este jogo nunca termina empatado, isto é, tem sempre um vencedor.

Este jogo foi apresentado utilizando um polígono com seis vértices e verificamos que nesta situação existe sempre um vencedor. E se o número de vértices for inferior a seis?

Considerando que um polígono tem pelo menos três vértices, a utilização no jogo de um polígono com três vértices, leva obrigatoriamente à condição de empate pois os dois jogadores apenas podem construir três arestas no total (duas para um dos jogadores e uma para o outro jogador) e o jogo termina antes de ser possível construir um triângulo da mesma cor.

Quando se utilizam polígonos com quatro vértices, considerando o grafo completo K_4, de cada vértice saem três arestas, sendo sempre possível cada jogador escolher um vértice de modo que não se obtenha um triângulo, conduzindo assim a uma situação de empate, como se pode verificar pela figura abaixo.

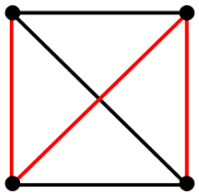


Figura 12 - Posição de empate num grafo de quatro vértices

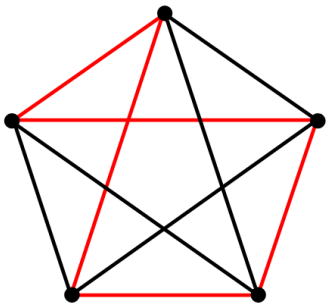


Figura 13 – Posição de empate num jogo com um polígono de cinco vértices

Na figura 13 apresentamos um polígono de cinco vértices onde podemos verificar que estes são insuficientes para garantir a existência de um triângulo cujas arestas sejam todas da mesma cor, pois em cada vértice incidem quatro arestas, podendo ser duas de cada cor. No caso apresentado acima, polígono de cinco vértices, houve uma situação de empate, de notar que do mesmo vértice saem duas arestas vermelhas e duas pretas. No entanto, nos polígonos de cinco vértices pode haver

um vencedor, como na figura apresentada abaixo, em que ganha o jogador que joga com a cor preta, pois o vermelho construiu um triângulo da sua cor.

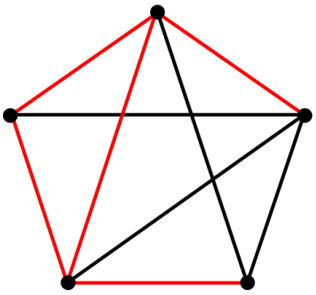


Figura 14 – Posição, num polígono de cinco vértices, em que ganhou o jogador que utilizou a cor preta

Tendo em conta que o objetivo de cada jogador é ganhar o jogo, a utilização de grafos com seis ou mais vértices permite-nos concluir que o jogo do SIM nunca termina empatado, havendo sempre um vencedor. Dependendo do número de vértices (seis ou mais) que se utilize, como se está a trabalhar com grafos completos e apenas com duas cores, utilizando o Princípio da Gaiola dos Pombos, podemos garantir que o jogo nunca termina empatado.

2.3. Jogo do Hex

2.3.1. Introdução

Como refere Valter Nunes [14], o Hex, é um jogo de conexão em que competem dois jogadores pela construção de uma cadeia contínua que liga dois lados opostos de um tabuleiro. Neste jogo conta-se apenas com a inteligência para se vencer, não havendo interferência de fenómenos aleatórios, sendo assim considerado um jogo combinatório.

O *Hex* é um jogo de tabuleiro cuja forma é a de uma grelha hexagonal, com m linhas e n colunas. Normalmente $m = n$, formando assim a disposição dos hexágonos a forma de um losango. O tabuleiro mais habitual entre os praticantes deste jogo é o tabuleiro 11x11, conhecido por tabuleiro em forma de *losango*, como apresentado a seguir.

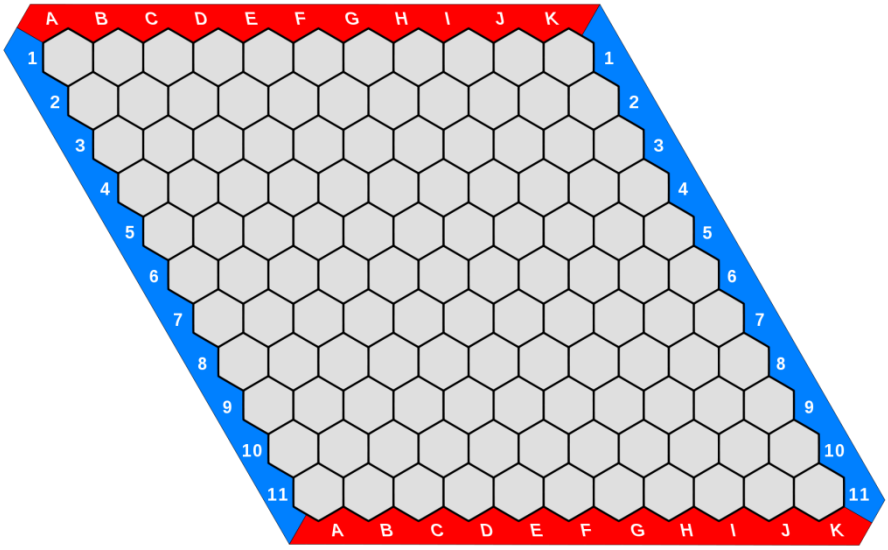


Figura 15 - Tabuleiro do Hex 11 x 11

Este jogo foi inventado pelo matemático, físico e poeta dinamarquês Piet Hein que o descreveu num artigo que publicou no jornal diário dinamarquês "*Politiken*" a 26 de dezembro de 1942, que o designou por "*Polygon*". Piet Hein comercializou este jogo com o nome de "*Con-tac-tix*" vendendo-o num tabuleiro de madeira 12 por 12 em forma de losango.

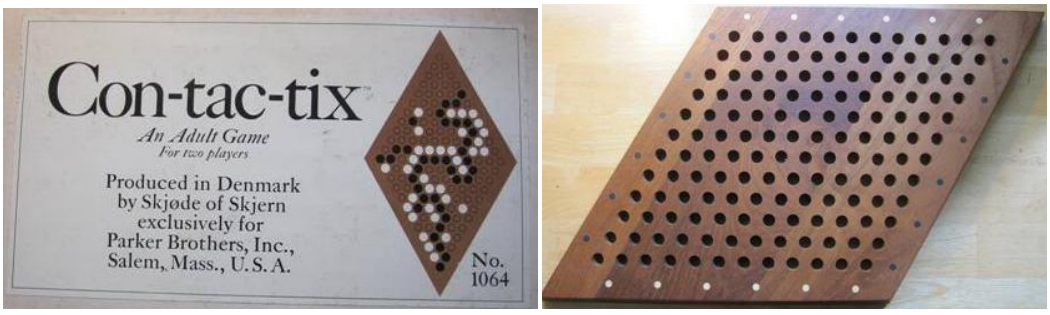


Figura 16 – Imagens do jogo comercializado por Piet Hein, através da Parker Brothers

Em 1948, o matemático John Nash inventou de novo (reinventou) este jogo, sem ter conhecimento da invenção de Piet Hein, enquanto preparava o seu doutoramento na universidade de Princeton nos Estados Unidos da América. Após a reinvenção de John Nash este jogo também foi conhecido por *John* e por *Nash*, em sua honra. Após algumas controversas relativas ao nome do jogo, a empresa "*Parker Brothers*", em 1952, comercializou uma versão deste jogo tendo chamado o mesmo de *Hex*, nome pelo qual é conhecido atualmente.

A popularidade deste jogo deve-se também a *Martin Gardner* [7] que escreveu alguns artigos sobre o mesmo numa coluna da revista "*Scientific American*" designada por "Mathematical Games", onde o popularizou ao longo dos tempos.

2.3.2. Apresentação do jogo

O *Hex* é um jogo de estratégia abstrata pertencendo à categoria dos jogos de conexão, pois está intimamente ligado quer à teoria da computação quer à teoria de grafos. Este jogo envolve dois jogadores com peças de cores diferentes, por exemplo, um jogador joga com peças vermelhas e o outro com peças azuis. Vamos debruçar o nosso estudo para um tabuleiro 11 x 11. Cada um dos jogadores possui lados opostos no tabuleiro. O objetivo de cada jogador é unir as duas margens da mesma cor através de um caminho. Para tal cada jogador possui 60 peças da sua cor.

2.3.3. Regras do jogo

As regras deste jogo são simples; nele, participam dois jogadores que dispõem de peças de cores diferentes e a cada um deles correspondem os dois lados do tabuleiro da sua cor. Inicialmente o tabuleiro está vazio. Os jogadores começam por escolher quem é o primeiro a jogar, podendo para tal ser lançada uma moeda ou acordarem mutuamente.

Os jogadores, alternadamente, colocam uma peça da sua cor num hexágono vazio do tabuleiro. O tabuleiro é preenchido alternadamente com as peças dos dois jogadores. Ganha o jogador que primeiro conseguir criar um caminho que una as duas margens da sua cor.

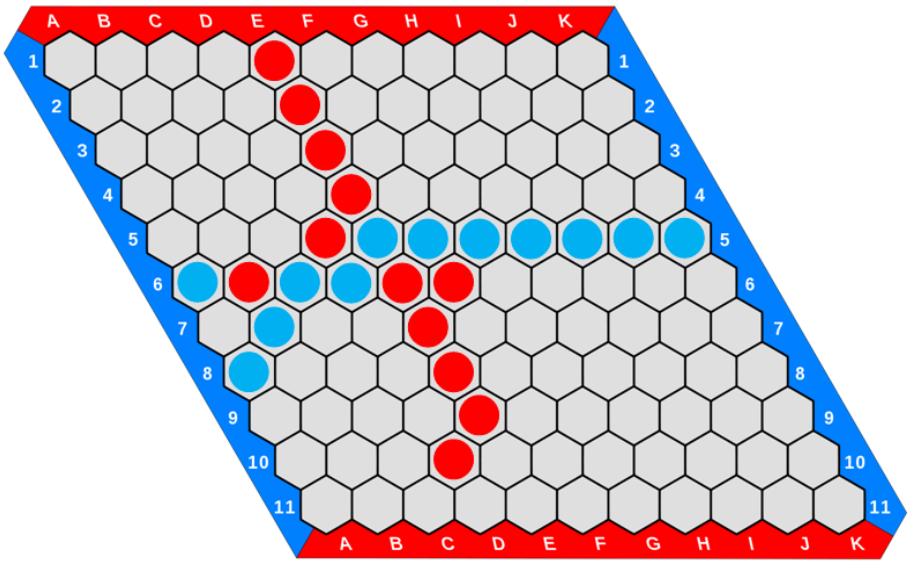


Figura 17 – Apresentação de um jogo em que ganham as azuis

2.3.4. Algumas estratégias do Hex

John Nash provou que um jogo de *Hex* não pode terminar empatado, e que para um tabuleiro simétrico, *n* x *n*, existe uma estratégia vencedora para o jogador que faz o primeiro movimento. Segundo John Nash para tabuleiros que têm no máximo sete linhas e sete colunas o primeiro a jogar tem uma estratégia vencedora, tendo assim o primeiro jogador uma vantagem em relação ao segundo a jogar. A justificação deste argumento é de que se a jogada for feita nas casas centrais do tabuleiro, o primeiro jogador fica com uma grande vantagem relativamente ao adversário; segundo Valter Nunes [14], jogar a primeira peça na casa F6 é das jogadas mais "fortes" no início do jogo. Para reduzir esta vantagem inicial do primeiro jogador é implementada ao jogo uma regra adicional que consiste em dar a possibilidade de, na primeira jogada do segundo jogador, em vez de este ocupar um dos hexágonos livres, trocar de cor (se vir vantagem nisso) com o seu adversário ficando com a jogada do adversário, isto é, troca a peça do adversário por uma das suas. Esta regra designa-se por *regra do equilíbrio* e serve para garantir que o primeiro jogador não tem vantagem, isto é, o primeiro jogador ao efetuar a sua primeira jogada, como não sabe se o adversário a vai aproveitar não pode fazer uma jogada muito ambiciosa, ficando assim um jogo mais equilibrado. John Nash considera que a única maneira de evitar que o adversário crie um caminho que una as duas margens

é este também formar um caminho. Para tabuleiros com 8 ou mais linhas e 8 ou mais colunas não se conhece nenhuma estratégia vencedora.

Valter Nunes, na sua tese, "O Jogo *Hex*" [14] definiu como posição válida num jogo Hex, a diferença entre o número de peças azuis e vermelhas num tabuleiro ser de zero ou um e o caso de os dois jogadores terem a possibilidade de ganhar; considera ainda que o tabuleiro vazio também é uma posição válida. Na mesma, referiu ainda que o limite mais alto de posições válidas para este jogo, no tabuleiro 11 x 11, é de aproximadamente 2,38 x 10^{56}. Sendo o número de posições válidas tão elevado, a complexidade de combinações compromete a sua jogabilidade no computador, pois o esquema completo é demasiado grande para poder ser processado pelas diferentes técnicas de processamento das máquinas.

A teoria de grafos está subjacente nas jogadas do *Hex*. Como o objetivo de cada jogador é ligar dois lados opostos do tabuleiro, o *Hex* é considerado um jogo de conexão. As jogadas do *Hex* podem ser explicadas utilizando pontes e conexões. Uma *ponte* é uma ligação robusta e consiste em ter duas peças que partilham a vizinhança de dois hexágonos, como se pode ver na figura seguinte, em que as peças azuis fizeram uma ponte e partilham como vizinhos as casas B e D.

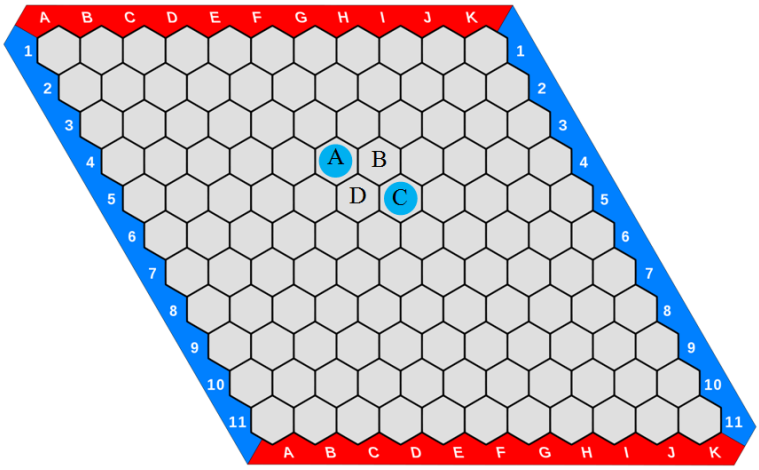


Figura 18 – Pontes e conexões

Diz-se que duas peças estão conectadas/ligadas se qualquer jogada que o adversário faça nada possa impedir o jogador que tem a ponte de ganhar. Considerando a figura anterior o jogador com as peças azuis fez uma ponte, o adversário pode colocar uma peça em B ou em D, ficando o hexágono restante para o jogador das

peças azuis; considera-se que B e D formam um duo que garante a segurança da ponte, do jogador com as pedras azuis, podendo assim unir a ponte que tinha anteriormente. Durante o jogo esta estratégia torna-se bastante útil.

Quando se está perante uma situação de ponte, o adversário, se possível, pode fazer uma jogada ameaçadora/estratégica noutro ponto do tabuleiro de forma a obrigar o adversário a distrair-se desta ligação. A elaboração de pontes ao longo do tabuleiro pode ser considerada uma jogada estratégica pois permite um aceleramento de ligações ao longo do mesmo. As pontes são melhores que as jogadas adjacentes[5] pois permitem ao jogador o dobro da rapidez, na construção de um caminho que una as duas margens. Como o objetivo do jogo é construir um caminho que ligue as margens opostas, os caminhos de cada jogador vão ter que se cruzar, e é neste cruzamento que os jogadores têm que definir melhor as suas estratégias de jogo. A luta por uma boa jogada na zona de cruzamento dos caminhos não pode ser feita em detrimento do restante caminho pois o adversário pode aproveitar para colocar peças defensivas de forma estratégica que poderão ter um grande impacto no que resta do jogo.

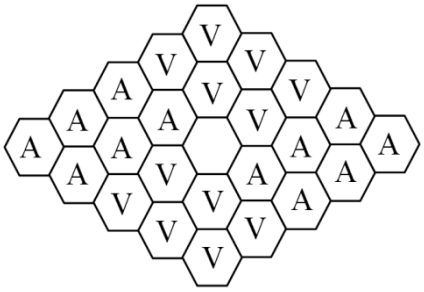


Figura 19- Posição de um jogo em que está em disputa a casa central

Valter Emerenciano, no capítulo de Estratégia do Jogo Hex [14], definiu algumas estratégias deste jogo. As estratégias mencionadas referem-se:

- **à expansão através das pontes**, como referido acima, as pontes ocupam o dobro da distância comparativamente às jogadas adjacentes, permitindo ao jogador obter o caminho pretendido com mais rapidez, consideradas tão boas ou melhores que as jogadas adjacentes;

[5] Jogadas adjacentes – jogadas em casas contíguas/adjacentes

- **à maximização da conectividade/minimização das capacidades do adversário**, a força da posição de um jogador na construção de um caminho depende da conetividade das suas peças ao longo do tabuleiro, principalmente onde os caminhos se cruzam;
- **ao bloqueio iniciado à distância**, o jogador para bloquear uma ligação do adversário deve jogar próximo da peça mais avançada do seu ataque;
- **através do posicionamento do jogo**, as peças colocadas ao longo do tabuleiro que ocupam a diagonal mais curta, entre os cantos obtusos, constituem uma posição considerada forte e, a jogada na casa F6 é a jogada de abertura mais forte.
- **a jogar à defesa**, o jogador deve identificar as ameaças do adversário e impedir a sua concretização, assim como fortalecer e expandir a sua ligação através de uma jogada posicional;
- **a escadas**, designação que se dá a um tipo de jogada que consiste na construção de paredes de defesa pelo adversário.

2.3.5. Quem tem mais possibilidades de ganhar o jogo *Hex*?

Sem a *regra do equilíbrio*, John Nash provou a existência de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, através de uma demonstração por absurdo que é a seguinte: *"... nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, logo, ou o primeiro ou o segundo jogador tem uma estratégia vencedora. Suponhamos que era o segundo jogador que, jogando perfeitamente, tem a vitória assegurada. Então o primeiro começa por jogar aleatoriamente, e a partir desse momento ignora a jogada que fez, encarando-se como segundo jogador, roubando-lhe a estratégia vencedora que se supôs existir. Sempre que tiver de jogar onde, por acaso, já o tinha feito, torna a jogar à sorte… Assim, tem a vitória garantida, partindo do princípio de que há estratégia vencedora para o segundo. Resumindo: se admitirmos que o segundo jogador vai ganhar então… o primeiro ganha! Absurdo. Como alguém tem de dispor de uma estratégia vencedora, terá de ser o primeiro. Este argumento é agora clássico, e aplica-se a muitos jogos, tendo ficado conhecido por «argumento do roubo de estratégia»."* [12]

David Gale provou que este jogo nunca termina empatado e que existe uma explicação matemática para a não existência de empates neste tipo de jogo. Para tal criou um caminho com as arestas dos hexágonos, esse caminho é escolhido de forma a que passe sempre entre um hexágono vermelho e um azul, não se podendo percorrer essa aresta nos dois sentidos, em momentos consecutivos. Esta demonstração pode ser consultada nas páginas 58 a 60 da tese de Valter Nunes [14].

"*É óbvio que, quando o tabuleiro está cheio, se as peças vermelhas forem pensadas como água e as peças azuis forem pensadas como terra, então acontece uma das duas situações seguintes: ou a água corre entre as duas margens vermelhas pertencentes ao jogador vermelho, ou o canal de água está obstruído por terra formando um caminho de peças azuis entre as duas margens desta cor.*" [14]

Através de um raciocínio geométrico, David Gale [14] provou que não há empates no *Hex*. Para tal construiu triângulos equiláteros a unir os centros dos hexágonos, ficando com uma grelha do tipo apresentado abaixo.

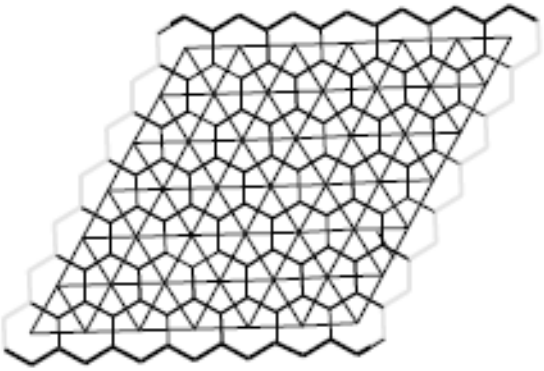


Figura 20 - Construção dos triângulos equiláteros sob os hexágonos, imagem retirada da Tese de Valter Nunes

Depois atribuiu aos vértices dos triângulos números 0 e 1, o 0 aos de uma cor e 1 aos da outra cor. Considerou que as arestas dos triângulos eram portas de passagem se os vértices onde essas arestas incidissem tivessem valores diferentes. É

apresentado abaixo um esquema representativo de um caminho que liga duas margens.

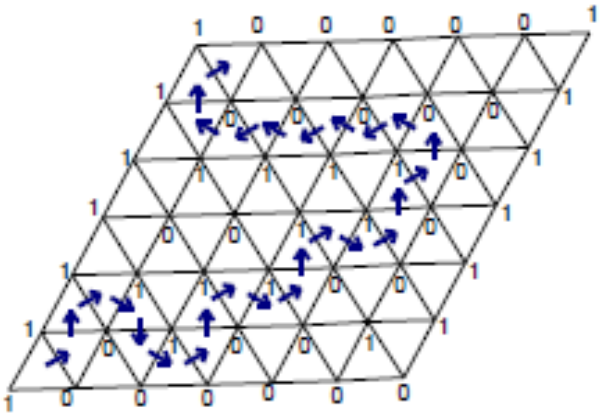


Figura 21 - Exemplo de um caminho unindo as duas margens, imagem retirada da tese de Valter Nunes

Valter Nunes, na sua tese, utilizou o facto da inexistência de empate no jogo do Hex para fazer a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.
Normalmente, o teorema de Brouwer é provado através do recurso a um resultado combinatório. Contudo, David Gale demonstrou que esse resultado pode ser substituído pelo facto de que o jogo Hex não pode terminar num empate.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer: Suponhamos que X é um conjunto não vazio, compacto e convexo de R^2. Se a função $f : X \to X$ é contínua, então existe um ponto x tal que $f(x) = x$.

Prova[14]:

A prova deste teorema restringe-se ao campo bidimensional, isto é, ao conjunto $X \in I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$.

Considere-se $d > 0$.

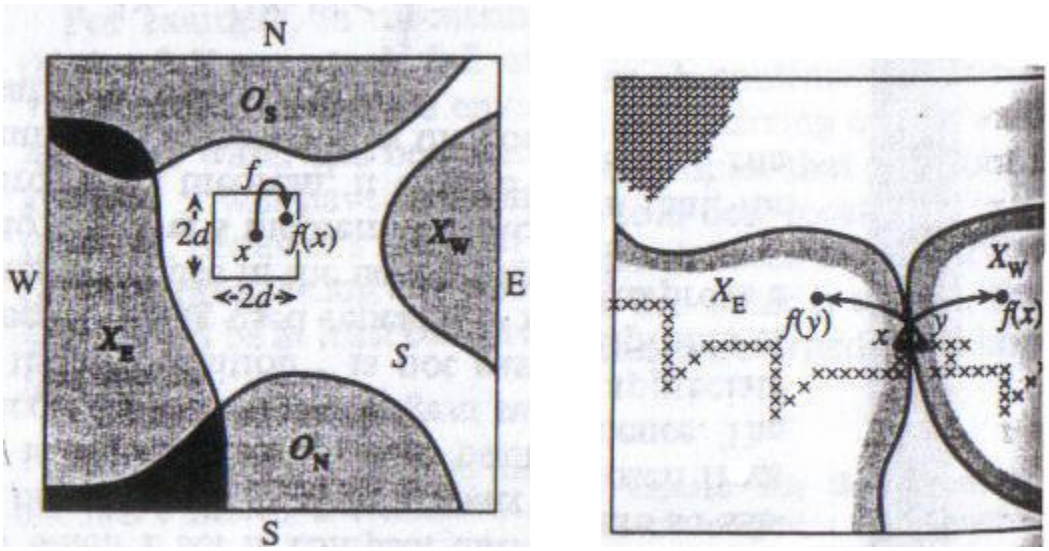
Seja O_N o conjunto de todo $x \in I^2$ cujas imagens por f estão a uma distância de x superior a d em direção a norte.

Seja X_E o conjunto de todo $x \in I^2$ cujas imagens por f estão a uma distância de x superior a d em direção a este.

Seja O_S o conjunto de todo $x \in I^2$ cujas imagens por f estão a uma distância de x superior a d em direção a sul.

Seja X_W o conjunto de todo $x \in I^2$ cujas imagens por f estão a uma distância de x superior a d em direção a oeste.

A figura abaixo (a) dá-nos um exemplo de como estes conjuntos podem parecer. A área não sombreada S, no diagrama, é o conjunto de todo o $x \in I^2$ que não pertence a nenhum dos quatro conjuntos O_N, O_S, X_E ou X_W.



(a) (b)

Figura 22 – Imagens da demonstração do teorema do Ponto Fixo de Brouwer, imagem retirada da tese de Valter Nunes

Se S é não vazio, então tem de haver pelo menos um x em I^2 cujas imagens por f não estão muito longe em nenhuma das direções. De facto $f(x)$ deve pertencer a um quadrado de lado $2d$ centrado em x. O ponto x está portanto "quase fixo" (tal ponto pode ser encontrado, por mais pequeno que seja d). A compacidade de X e a continuidade de f implicam a existência de um ponto fixo x. O problema é, desta forma, reduzido à demonstração de que S nunca é vazio. Isto será provado, através de redução ao absurdo e utilizando o jogo *Hex*.

Suponhamos que S é vazio para algum $d > 0$. Então cada $x \in I^2$ estaria num dos dois conjuntos $O = O_N \cup O_S$ ou $X = X_E \cup X_W$. Cubramos I^2 com uma grelha *Hex* muito reduzida, como na figura anterior (b). Cada peça desta grelha é agora marcada com um círculo ou uma cruz, dependendo se ela está no conjunto O ou no conjunto X. Se estiverem em ambos os conjuntos, marcamos aleatoriamente cruz ou círculo. Essa grelha fica então toda preenchida e, como já sabemos que no jogo *Hex* existe sempre um vencedor, terá de haver um caminho ininterrupto de cruzes ou de círculos a ligar duas margens opostas. Sem perda de generalidade, suponhamos que o vencedor é o jogador II pois une as suas duas margens com cruzes.

Uma peça mais a Oeste da rota vencedora do jogador II deve estar em X_E.

Uma peça mais a Este da rota vencedora do jogador II deve estar em X_W.

Note-se que não existe nenhum x que pertença simultaneamente a X_E e a X_W (por "construção" destes).

Algures no meio, deve estar um par de peças adjacentes x e y, das quais uma pertence a X_W e a outra pertence a X_E. Isto significa que a imagem de x por f, está a uma distância de pelo menos d para oeste e, simultaneamente, a imagem de y, (adjacente a x) por f, está a uma distância de pelo menos d para este. Então $f(x)$ e $f(y)$ estão a uma distância de pelo menos $2d$.

Dado que a distância entre x e y pode ser tão pequena quanto nós queiramos, através de uma redução suficientemente pequena da grelha do tabuleiro *Hex*, que o mesmo não se verifica para as imagens, temos uma contradição para a hipótese de que f é contínua. Logo, chegamos a um absurdo, e portanto S é não vazio. E como X é compacto e f contínua, então está provada a existência de um ponto fixo x.

Fica então assim demonstrado o Teorema de Brouwer, com recurso ao jogo *Hex*. □

Tendo em conta que se trata de um jogo que não termina empatado, um ganha e o outro perde, pode classificar-se o *Hex* como um jogo, para duas pessoas, finito, determinista e de estratégia.

2.4. Jogos Mancala

2.4.1. Um pouco de história

Mancala é uma família de jogos de tabuleiro jogados em todo o mundo. Estes jogos são também conhecidos por jogos de semeadura ou ainda jogos de contagem e de captura. É conhecido por jogo de semeadura porque as peças são distribuídas no tabuleiro como se se estivesse a semear; de contagem porque é utilizada a contagem das peças para se escolher a melhor jogada e de captura porque ao longo do jogo, e em determinadas situações, se fazem capturas de peças das casas para os depósitos.
Os tabuleiros podem ser construídos de diversos materiais. Por vezes os jogos são jogados com buracos escavados na terra ou esculpidos na pedra.
A palavra Mancala, vem do árabe *naqala* (que significa "mover"). A sua origem não é muito exata mas supõe-se que tenha acontecido no continente africano, há alguns milhares de anos. Estes jogos são considerados os mais antigos do mundo. Os jogos da família Mancala mais conhecidos no mundo ocidental são o *Oware*, *Kalah*, *Sungka*, *Omweso* e *Bao*. Desta família de jogos o mais conhecido em Portugal é o Ouri, também conhecido por "*Oware*", que é a versão do Mancala jogada em Cabo Verde
O tabuleiro desta família de jogos consiste em alguns buracos todos iguais, designados por casas e de outros buracos ligeiramente maiores designados por depósitos. Inicialmente os jogos da família *Mancala* eram jogos para dois jogadores, e o tabuleiro era constituído por duas filas de casas com um depósito em cada topo como se pode ver pela figura seguinte (figura acima da esquerda) onde é apresentado um tabuleiro para dois jogadores, mas com a evolução dos tempos já se podem encontrar tabuleiros para mais do que dois jogadores. Um tabuleiro tem tantos depósitos quanto o número de jogadores ao qual vai ser aplicado.

Foto: http://escolajosemendesmartins.blogspot.pt

Foto: http://luduslila.wordpress.com

Formatos de tabuleiros para dois jogadores

Foto: http://megajogos.blog.br

Formato de tabuleiros para quatro jogadores

Figura 23 – Formatos de tabuleiros para dois e quatro jogadores

Em geral, o jogo começa com 4 peças em cada casa. Cada jogador escolhe uma das suas casas e retira as sementes distribuindo-as pelas outras casas, uma por casa, no sentido anti-horário (em algumas versões é no sentido horário). Ganha o jogador que obtiver mais peças no final do jogo. Neste jogo não está envolvida a sorte mas sim o raciocínio lógico e matemático.

Uma das versões mais comuns é jogada no tabuleiro tradicional, com duas fileiras de seis buracos (casas) e um buraco maior (depósito) que ocupa as duas fileiras em cada ponta, como apresentado na figura abaixo.

Figura 24 – Tabuleiro do Ouri, em madeira, que pode ser adquirido em lojas da especialidade

Segundo a literatura, existem mais de duzentos jogos desta família. O tabuleiro mais utilizado é o de duas filas, no entanto estes podem ser de uma a seis filas, nas versões que se conhecem até ao momento.

2.4.2. Ouri

2.4.2.1. Um pouco de história do Ouri

O *Ouri* pertence à família de jogos *Mancala*. Pensa-se que tenha sido inventado pelos egípcios e levado mais tarde para a Ásia e a África Subsariana. No século XVI chegou à América levado pelos escravos negros. Trata-se de um jogo de captura.

O *Ouri* é tradicionalmente jogado na África Ocidental (por exemplo Senegal, Mali ou em Cabo Verde) e em parte das Caraíbas (principalmente nas ilhas inglesas), por isso é também conhecido por "*Wari*", "*Awari*", "*Aware*", "*Awele*" ou "*Oware*".

Trata-se de um jogo milenar que possui uma forte componente abstrata, não utilizando componentes aleatórios, sendo portanto um jogo da família dos jogos combinatórios.

2.4.2.2. Apresentação do jogo

O Ouri é um jogo de tabuleiro com 14 buracos (12 buracos circulares com o mesmo diâmetro, designados por casas, e dois outros buracos, designados por depósitos, de igual dimensão) como se pode ver pela figura seguinte.

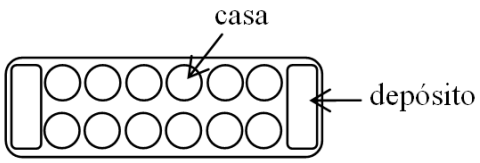


Figura 25 – Apresentação dos buracos de um Tabuleiro do Ouri

Este jogo é para dois jogadores que jogam alternadamente e é jogado num tabuleiro como o apresentado acima, utilizando 48 peças pequenas (algumas das

vezes utilizam-se feijões, grão de bico, pedras, avelãs, etc, …). Ganha o jogador que recolher mais sementes do que o adversário, isto é, vence o jogador que obtiver 25 ou mais peças. No entanto este jogo também pode terminar empatado, este resultado acontece quando cada jogador recolhe 24 peças.

2.4.2.3. Regras do jogo

As regras deste jogo são um pouco complexas.

- O tabuleiro é constituído por 12 casas e 2 depósitos. A cada jogador correspondem 6 casas e um depósito, destinado a guardar as peças capturadas ao adversário durante o jogo. O depósito de cada jogador é o que fica à sua direita.

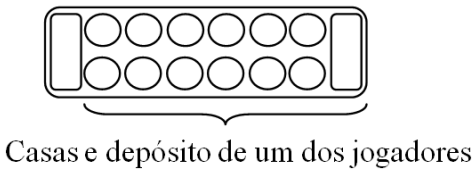


Figura 26 – Apresentação das casas e respetivo depósito de um dos jogadores

- O jogo é jogado sempre no sentido anti-horário.
- No início do jogo são colocadas 4 peças em cada uma das 12 casas.

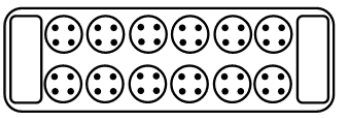


Figura 27 – Posição inicial do jogo do Ouri

- O jogador que inicia o jogo recolhe todas as peças de uma das suas casas e distribui-as, uma a uma, nas casas seguintes, no sentido anti-horário.
- Não se podem tirar peças de casas que contenham apenas uma peça, enquanto houver casas com duas ou mais peças.
- Os jogadores podem capturar peças nas seguintes situações:
  - quando ao colocar a última peça numa casa do adversário, esta ficar com duas ou três peças, o jogador retira-as e coloca-as no seu depósito. Mas se a casa ficar com uma, quatro ou mais peças o jogador não as pode capturar.

- se a(s) casa(s) anterior(es) à casa onde é colocada a última peça também tiver(em) duas ou três peças, o jogador captura-as e coloca-as no seu depósito. A captura é interrompida na primeira casa que não tenha esse número de peças.

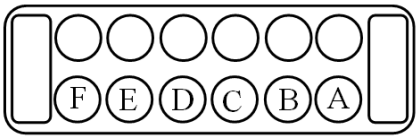
- Como fazer quando um jogador fica sem peças nas suas casas?
  - Quando um jogador realiza uma jogada e fica sem sementes, o adversário é obrigado a efetuar uma jogada de forma a introduzir uma ou mais peças nas casas desse jogador.
  - Se um jogador efetuar uma captura e deixar o adversário sem peças, é obrigado a jogar novamente, de forma a colocar uma ou mais peças nas casas dele.
- A partida termina:
  - quando um jogador capturar 25 ou mais peças. A partida termina e esse jogador ganha.
  - quando um jogador fica sem peças e o adversário não pode jogar de forma a colocar algumas peças nas casas desse jogador. A partida termina e o adversário recolhe as peças que estão nas suas casas para o seu depósito; ganha quem tiver 25 ou mais peças.
  - quando existem poucas sementes no tabuleiro e se está perante uma situação que se repete ciclicamente, sem que os jogadores possam evitar. Cada jogador recolhe as peças que estão nas suas casas e coloca-as no seu depósito; ganha o jogador que tiver mais peças.

A contagem é muito importante no *Ouri*, no sentido em que, dado um número de peças de uma determinada casa é importante saber em que casa irá ficar a última peça, no caso de estas serem distribuídas.

Durante o jogo, saber o número de peças que cada jogador precisa para ganhar é determinante na escolha da jogada seguinte. Também é importante ter a noção de quantas jogadas se podem fazer sem distribuir peças no lado adversário. No final, quando existem poucas peças no tabuleiro é necessário muito cuidado a gerir as jogadas que cada jogador possui, pois daí pode ser decidida a vitória ou a derrota da partida.

2.4.2.4. Algumas dicas para ganhar uma partida de *Ouri*

- Começar por distribuir as peças que se encontram nas casas mais à direita do tabuleiro, isto é, as casas que se encontram mais perto do adversário – desta forma garantimos mais jogadas nas nossas casas a médio prazo porque as casas mais à esquerda vão ter bastantes sementes logo de início.
- Ter em conta as jogadas do adversário pois as decisões deste têm reflexo nas jogadas seguintes.
- Evitar começar a perder vantagem no número de capturas de peças, pois a recuperação das peças pode ser difícil, ao longo da partida.
- Manter o maior número de peças nas nossas casas, isto é, evitar distribuir peças nas casas do adversário – para se poder controlar melhor os movimentos do inimigo e esperar pelo momento certo para fazer o "ataque" ao inimigo.
- São consideradas aberturas seguras[6] as casas A, C e E, ou as casas B, D e F, relativamente às capturas, no entanto é difícil manter estas casas vazias pois dificulta a distribuição de peças em casa.



- Ter sempre em atenção se a distribuição de peças na qual obtemos captura será a melhor jogada, pois por vezes a captura pode tornar-se uma armadilha no sentido em que pode ser uma jogada benéfica para o adversário.
- É importante criar uma casa com muitas sementes para mais tarde se poder efetuar capturas na casa do adversário. Esta casa deve ser o mais à direita possível do tabuleiro – para poder ter uma posição mais segura para o final da partida, ou no caso de estarmos numa posição em que não tenhamos muitas peças para distribuir, a distribuição das peças destas casas podem voltar a dar-nos vantagem. O ideal é que o número de peças dê para dar duas voltas ao tabuleiro, podendo em alguns casos significar a captura de todas as peças do

[6] Aberturas seguras – não ter duas casas consecutivas com poucas ou nenhumas peças.

adversário. Quanto mais à direita estiver essa casa, menor é o número de peças necessário para realizar as duas voltas à fila do adversário.

- Se conseguirmos chegar à fase final com uma casa com muitas peças e o adversário com poucas peças no seu lado, é muito provável que consigamos criar uma posição que nos permita capturar um grande número de peças e assim ganhar a partida.

Uma questão que se nos pode ser colocada é "*Como pode um jogador, que tem poucas peças em jogo impedir o adversário que tem muitas peças numa só casa capturar peças do seu lado do tabuleiro?*".

Para evitar que o adversário dê uma volta completa e entre novamente no nosso lado do tabuleiro, uma das nossas casas deve ter duas peças, para que na segunda volta ao distribuir as peças uma das casas fique com quatro peças quebrando a sequência de capturas.

A saber …

Na Holanda, em 2002, John Romein e Henri Bal para determinarem a árvore de jogo do Ouri montaram 144 computadores em rede e criaram um sistema paralelo de computação. Os computadores demoraram 51 horas no processamento para calcular a árvore do jogo. Concluíram que existem 889 063 398 406 posições possíveis de distribuírem as 48 peças pelas 12 casas segundo as regras do Ouri.

Em resumo …

Se o jogo do *Ouri* for bem jogado termina sempre num empate (24 peças para cada jogador). Temos de ter sempre em conta que jogar bem não é sinónimo de jogar de forma perfeita. Apesar de teoricamente o resultado final deste jogo ser o empate, como qualquer jogador não consegue memorizar uma árvore de jogo com a dimensão apresentada anteriormente, no final de cada partida podemos ter uma das três situações: vitória, empate ou derrota para um dos jogadores. Este jogo exige um elaborado pensamento estratégico para poder ser bem jogado.

3. JOGOS LÓGICOS

3.1. Introdução

A lógica é uma ciência de índole matemática e com uma forte ligação à filosofia. Como o pensamento é a manifestação do conhecimento, e o conhecimento busca a verdade, é necessário estabelecer algumas regras para que essa meta seja atingida.

Para o pensamento lógico são bastante importantes os jogos com regras bem definidas, pois a aplicação sistemática das regras leva a que o jogador estabeleça algumas deduções, na procura da estratégia vencedora. Os jogos são muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. A responsabilidade do cumprimento das regras e zelo pelo seu cumprimento leva a que os jogadores estejam mais atentos ao desenvolvimento da jogada.

Os jogos com regras são importantes para o desenvolvimento do pensamento lógico, pois a aplicação sistemática das mesmas conduz a deduções, sendo bastante adequados para o desenvolvimento de habilidades de pensamento. As regras e os procedimentos têm de ser apresentados aos jogadores antes da partida assim como devem ser estabelecidos os limites e as possibilidades de ação de cada jogador. O cumprimento de normas e a obrigatoriedade de zelar pelo seu cumprimento encoraja o desenvolvimento da iniciativa, da mente e da confiança em dizer honestamente o que pensa.

Um dos jogos lógicos mais conhecidos é o da travessia de um rio, onde existe apenas um barco, um homem (H), um lobo (L), uma ovelha (O) e uma couve (C). O homem conduz o barco e só pode levar um dos restantes passageiros. No entanto, o lobo não pode ficar sozinho com a ovelha e a ovelha não pode ficar sozinha com a couve. Este problema levanta questões interessantes. Por exemplo, na solução do problema, o elemento chave será a ovelha porque esta poderá comer a couve ou ser comida pelo lobo. Assim, será a ovelha o primeiro passageiro do barco (no primeiro movimento) e também estará na última viagem realizada, como podemos ver no esquema seguinte.

HLOC

LC $\xrightarrow{HO}$

LC $\xleftarrow{H}$ O

L $\xrightarrow{HC}$ O

L $\xleftarrow{HO}$ C

O $\xrightarrow{HL}$ C

O $\xleftarrow{H}$ CL

$\xrightarrow{HO}$ CL

HLOC

A teoria dos grafos, por vezes, simplifica a resolução de um problema. A seguir vão ser apresentados três jogos lógicos: o Problema da Travessia de Ilha para Ilha, o Problema dos Canibais e dos Missionários e o Jogo de Grafos de Ehrenfeucht-Fraïssé.

3.2. Problema da Travessia de Ilha para Ilha

Três amigas, a Ana, a Berta e a Cátia encontram-se numa ilha com as respetivas malas de viagem.

A Ana pesa 100 kg e a sua mala 40 kg.

A Berta pesa 50 kg e a sua mala 15 kg.

A Cátia pesa 75 kg e a sua mala 25 kg.

Pretendem atravessar para outra ilha e para tal têm um barco, mas existem duas condicionantes.

- o barco leva no máximo 140 kg;

- Nenhuma das amigas deixa que a sua mala fique com outra das amigas na sua ausência.

Perante estas condicionantes, como devem as três amigas fazer a travessia?[13]

Considerem-se as seguintes abreviaturas:

A: "Ana", B: "Berta" C: "Cátia"

M_A: "mala da Ana"; M_B: "mala da Berta" M_C: "mala da Cátia".

Tendo em conta as restrições do problema podemos construir a tabela abaixo:

A 100 kg	B 50 kg	C 75 kg	M_A 40 kg	M_B 15 kg	M_C 25 kg
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

Este jogo pode ser interpretado utilizando o cálculo proposicional, nas mesmas linhas que o artigo de Hernandez e Martins [9].

Neste problema temos que considerar doze variáveis: seis para cada ilha. As seis variáveis correspondentes à ilha X são A_X, B_X, C_X, M_{AX}, M_{BX} e M_{CX} tendo como significado que a Ana está na ilha X, a Berta está na ilha X, a Cátia está na ilha X, a mala da Ana está na ilha X, a mala da Berta está na ilha X e a mala da Cátia está na ilha X, respetivamente.

Relativamente à ilha Y também vamos considerar seis variáveis, a saber, A_Y como a Ana está na ilha Y, B_Y como a Berta está na ilha Y, C_Y como a Cátia está na ilha Y, M_{AY} como a mala da Ana está na ilha Y, M_{BY} como a mala da Berta está na ilha Y e M_{CY} como a mala da Cátia está na ilha Y.

Existem algumas condicionantes neste problema que podem ser expressas nas fórmulas que envolvem as variáveis definidas anteriormente. [9]

a) o barco transporta no máximo 140 kg (uma das amigas tem que ir no barco);

O barco pode transportar as cargas seguintes:

A e M_A	B e M_B	C e M_C	B e C e M_B
A	B	C	

b) a mala de uma amiga nunca pode ficar sozinha com uma das outras amigas, em qualquer das ilhas;

$(A_X \wedge M_{BX}) \rightarrow B_X$; $(A_Y \wedge M_{BY}) \rightarrow B_Y$;

$(A_X \wedge M_{CX}) \rightarrow C_X$; $(A_Y \wedge M_{CY}) \rightarrow C_Y$;

$(B_X \wedge M_{AX}) \rightarrow A_X$; $(B_Y \wedge M_{AY}) \rightarrow A_Y$;

$(B_X \wedge M_{CX}) \rightarrow C_X$; $(B_Y \wedge M_{CY}) \rightarrow C_Y$;

$(C_X \wedge M_{AX}) \rightarrow A_X$; $(C_Y \wedge M_{AY}) \rightarrow A_Y$;

$(C_X \wedge M_{BX}) \rightarrow B_X$; $(C_Y \wedge M_{BY}) \rightarrow B_Y$;

c) cada intervenientes só pode estar numa das ilhas, isto é, não podem estar simultaneamente nas duas ilhas, logo as fórmulas são as seguintes:

$$\neg(A_X \wedge A_Y) \wedge \neg(B_X \wedge B_Y) \wedge \neg(C_X \wedge C_Y) \wedge \neg(M_{AX} \wedge M_{AY}) \wedge \neg(M_{BX} \wedge M_{BY}) \wedge \neg(M_{CX} \wedge M_{CY})$$

Tendo em conta que as amigas e respetivas malas estão na ilha X, inicialmente atribui-se às variáveis A_X, B_X, C_X, M_{AX}, M_{BX} e M_{CX} o valor 1, pois todos os elementos estão na ilha X, e às variáveis A_Y, B_Y, C_Y, M_{AY}, M_{BY} e M_{CY} o valor 0, pois ainda não chegaram à ilha Y. No final às variáveis A_X, B_X, C_X, M_{AX}, M_{BX} e M_{CX} atribui-se o valor 0, pois já nenhum dos elementos está na ilha X e às variáveis A_Y, B_Y, C_Y, M_{AY}, M_{BY} e M_{CY} o valor 1, pois todos os elementos encontram-se na ilha Y.

Podemos assim construir uma sequência de viagens que conduz à solução do problema, utilizando sequências de valorações, 0 e 1, que obedeçam às condições impostas pelo problema na travessia entre as duas ilhas.

A tabela abaixo mostra uma sequência de valorações que resolve o problema das três amigas e respetivas malas.

A_X	B_X	C_X	M_{AX}	M_{BX}	M_{CX}	~ ~ ~	A_Y	B_Y	C_Y	M_{AY}	M_{BY}	M_{CY}
1	1	1	1	1	1	~ ~ ~	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	~ ~ ~	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	~ ~ ~	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	~ ~ ~	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	~ ~ ~	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	~ ~ ~	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	~ ~ ~	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	~ ~ ~	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	~ ~ ~	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	~ ~ ~	1	1	1	1	1	1

Note-se que de uma valoração para outra se está a ter em conta as restrições ao peso que pode ser transportado pelo barco.

Analisando a tabela acima podemos apresentar as viagens das três amigas da seguinte forma:

Viagem n.º	Margem de saída	Viagem	Margem de chegada
Início	A B C M_A M_B M_C		
1ª (ida)	A B M_A M_B	C M_C →	
2ª (regresso)	A B M_A M_B	← C	M_C
3ª (ida)	A M_A	B C M_B →	M_C
4ª (regresso)	A M_A	← C M_C	B M_B
5ª (ida)	C M_C	A M_A →	B M_B
6ª (regresso)	C M_C	← B M_B	A M_A
7ª (ida)	M_C	B C M_B →	A M_A
8ª (regresso)	M_C	← C	A B M_A M_B
9ª (ida)		C M_C →	A B M_A M_B
Fim			A B C M_A M_B M_C

Este jogo é um jogo lógico onde se utiliza o cálculo proposicional, também podia ser explicado utilizando a teoria dos grafos. Como este problema tem um número

significativo de variáveis, o mesmo não foi resolvido utilizando a teoria dos grafos pois o grafo aplicado a este jogo iria ser grande e difícil de representar.

3.3. Problema dos Canibais e dos Missionários

Um grupo formado por três canibais e três missionários viajam juntos e chegam à margem, esquerda, de um rio. Eles desejam atravessar para a outra margem, margem direita, para, desta forma, continuarem a viagem. O único meio de transporte disponível é um barco que transporta no máximo duas pessoas. Há uma outra dificuldade: em nenhum momento o número de canibais pode ser superior ao número de missionários pois desta forma os missionários estariam em grande perigo de vida. Como se deve efetuar a travessia?

Sabe-se à partida que o número de viagens vai ser em número ímpar, pois o barco parte de uma margem e tem que transportar os canibais e os missionários para a outra margem. Depois de terminada a travessia o barco não pode voltar à margem de origem pois não atravessa o rio sem pessoas a bordo.

Vamos tentar resolver este problema utilizando a teoria dos grafos. Como o problema trata de canibais e missionários, não havendo distinção entre os canibais e entre os missionários, vamos considerar as variáveis c e m correspondentes aos números de canibais e aos missionários numa determinada margem, respetivamente. Tendo em conta o número de canibais e de missionários podemos condicionar o valor de c e de m, sendo $0 \leq c \leq 3$ e $0 \leq m \leq 3$. Como, quando numa das margens estão canibais e missionários, o número de canibais nunca pode ser superior ao dos missionários, podemos impor ainda a condição $c \leq m$ quando $m \neq 0$.

Como nas margens podem ocorrer várias situações referentes ao número de canibais e de missionários, vamos definir o triplo (c, m, b), onde c e m representam os números de canibais e missionários, respetivamente, na margem de partida, e b representa o número de barcos na margem de partida, b toma o valor 1 quando o barco está na margem de partida e 0 quando está na margem de chegada. Por exemplo, o triplo (2, 3, 1) significa que na margem de partida estão dois canibais,

três missionários e o barco, já o triplo (1, 3, 0) significa que na margem de partida estão apenas um canibal e três missionários.

Pretende-se construir um grafo que represente o percurso desde o triplo (3, 3, 1), todos os canibais e missionários encontram-se na margem de partida, assim como o barco, até ao triplo (0, 0, 0), já todos se encontram na margem direita, incluindo o barco, isto é, atravessaram o rio.

Tendo em conta apenas os canibais e os missionários temos 32 estados possíveis, que são:

(3, 3, 1)	(2, 3, 1)	(1, 3, 1)	(0, 3, 1)
(3, 3, 0)	(2, 3, 0)	(1, 3, 0)	(0, 3, 0)
(3, 2, 1)	(2, 2, 1)	(1, 2, 1)	(0, 2, 1)
(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(1, 2, 0)	(0, 2, 0)
(3, 1, 1)	(2, 1, 1)	(1, 1, 1)	(0, 1, 1)
(3, 1, 0)	(2, 1, 0)	(1, 1, 0)	(0, 1, 0)
(3, 0, 1)	(2, 0, 1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 1)
(3, 0, 0)	(2, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

Considerando as restrições do problema, em que numa ilha se tivermos canibais e missionários, o número de canibais não pode ser superior ao número de missionários; logo podemos retirar alguns dos possíveis estados

(3, 3, 1)	(2, 3, 1)	(1, 3, 1)	(0, 3, 1)
(3, 3, 0)	(2, 3, 0)	(1, 3, 0)	(0, 3, 0)
~~(3, 2, 1)~~	(2, 2, 1)	(1, 2, 1)	(0, 2, 1)
~~(3, 2, 0)~~	(2, 2, 0)	(1, 2, 0)	(0, 2, 0)
~~(3, 1, 1)~~	~~(2, 1, 1)~~	(1, 1, 1)	(0, 1, 1)
~~(3, 1, 0)~~	~~(2, 1, 0)~~	(1, 1, 0)	(0, 1, 0)
(3, 0, 1)	(2, 0, 1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 1)
(3, 0, 0)	(2, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

Tendo em conta que os triplos

(2, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 0), (3, 2, 1) e (3, 2, 1)

não se podem verificar devido às condições do problema, o número de canibais não pode ser superior ao número de missionários, então os triplos complementares

(1, 2, 1), (1, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 1, 1) e (0,1, 0),

também não se verificam. Ficamos assim apenas com vinte possíveis estados.

(3, 3, 1)	(2, 3, 1)	(1, 3, 1)	(0, 3, 1)
(3, 3, 0)	(2, 3, 0)	(1, 3, 0)	(0, 3, 0)
~~(3, 2, 1)~~	(2, 2, 1)	~~(1, 2, 1)~~	~~(0, 2, 1)~~
~~(3, 2, 0)~~	(2, 2, 0)	~~(1, 2, 0)~~	~~(0, 2, 0)~~
~~(3, 1, 1)~~	~~(2, 1, 1)~~	(1, 1, 1)	~~(0, 1, 1)~~
~~(3, 1, 0)~~	~~(2, 1, 0)~~	(1, 1, 0)	~~(0, 1, 0)~~
(3, 0, 1)	(2, 0, 1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 1)
(3, 0, 0)	(2, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

Analisando o esquema acima podemos concluir que o número de missionários numa margem pode tomar os valores $m = c$ ou $m = 0$ ou $m = 3$, sendo que 0 é o valor mínimo e 3 o valor máximo.

Considerando ainda que o barco transporta no máximo duas pessoas e no mínimo uma, podemos considerar os seguintes pares ordenados relativamente ao número de pessoas a transportar pelo barco:

(1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1) e (0, 2).

Estamos então em condições de definir os vértices do grafo como sendo

$$V = \{(c,m,b) \mid c,m \in \{0,1,2,3\} \wedge b \in \{1,0\}\}.$$

É apresentado a seguir um grafo onde os vértices são formados por triplos, sendo as duas primeiras coordenadas correspondentes ao número de canibais e missionários na margem de partida, respetivamente, e a última coordenada corresponde à posição do barco. No esquema apresentado a cada aresta corresponde um determinado par

ordenado. O par ordenado associado a cada aresta corresponde ao número de canibais e missionários que são transportados pelo barco entre as duas margens.

O grafo a seguir apresenta todas as soluções possíveis para este problema, tendo em conta todos os triplos que verificam o problema.

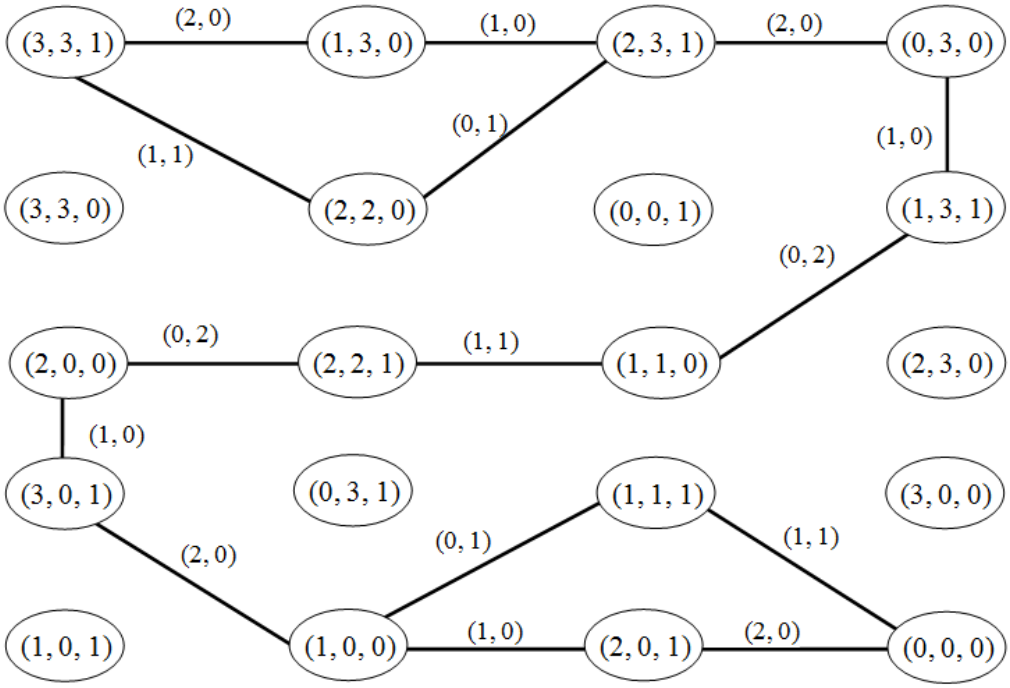


Figura 28 – Grafo correspondente ao jogo dos canibais e dos missionários

Analisando a figura anterior, verificamos que alguns dos vértices do grafo são isolados.

Para ser mais fácil de analisar a solução do problema considere-se o subgrafo gerado apenas pelos vértices que não são isolados.

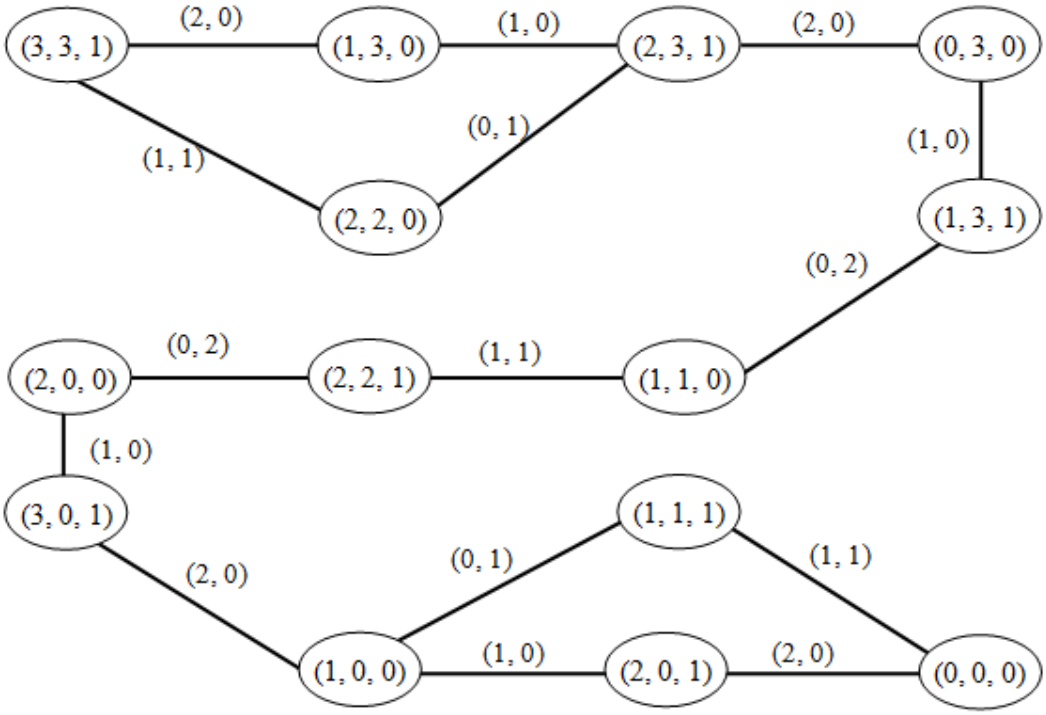


Figura 29 – Apresentação de todas as possíveis soluções do problema

No grafo anterior é possível encontrar quatro caminhos com o mesmo comprimento que nos levam a uma solução do problema.

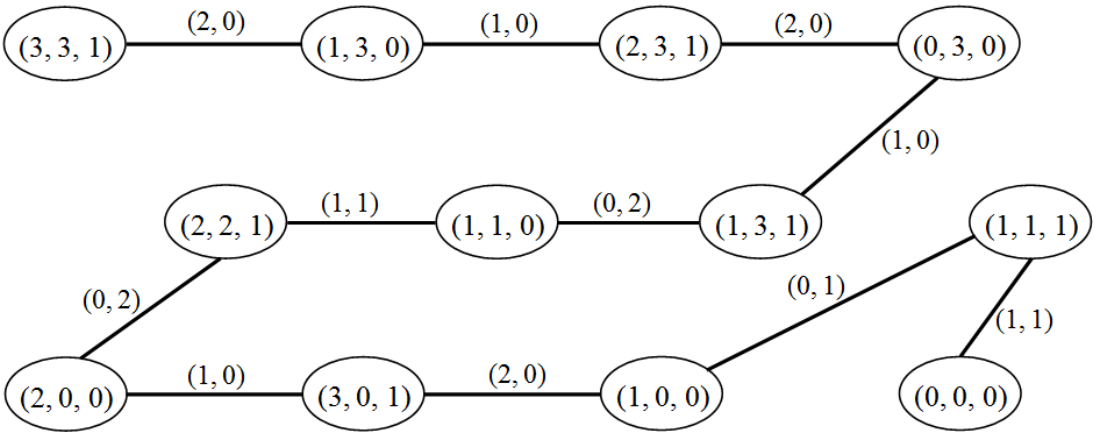


Figura 30 – Apresentação de uma solução do problema

No grafo acima a primeira viagem é feita por dois canibais e no grafo seguinte a primeira viagem é efetuada por um canibal e um missionário.

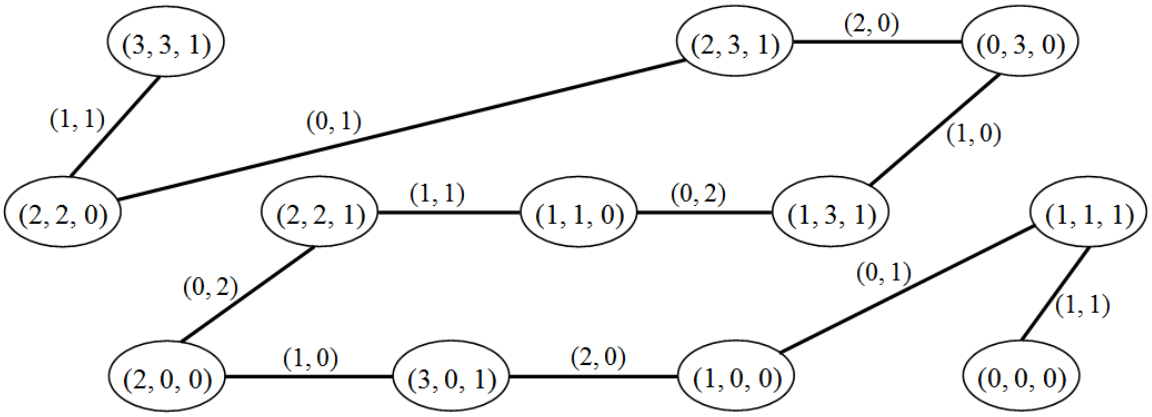


Figura 31 – Apresentação de uma segunda solução do problema

O número mínimo de viagens que o barco deve fazer para transportar os três canibais e os três missionários é onze, podendo no entanto efetuar mais viagens se tivermos em conta que, no grafo da figura 29, existem dois circuitos. Nada impede que o jogo possa ter mais movimentos do que o número mínimo indicado.

3.4. O Jogo de Grafos de Ehrenfeucht-Fraïssé

3.4.1. Um pouco de história deste jogo

Em 1930 Alfred Tarski formulou a equivalência elementar entre dois grafos simples G e G' como sendo estruturas elementarmente equivalentes. Em Princeton, em 1946, descreveu esta noção e expressou a vontade de que fosse possível desenvolver uma teoria sobre a noção de isomorfismo no jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé.

O jogo de grafos de Ehrenfeucht-Fraïssé é composto por dois grafos e dois jogadores. Um dos jogadores quer mostrar que os dois grafos são diferentes e o outro jogador quer mostrar que eles de certa forma são semelhantes. Os jogadores jogam alternadamente. Um dos jogadores escolhe um vértice de um dos grafos e o outro jogador escolhe um vértice do outro grafo. O segundo jogador ganha se existir um isomorfismo entre os subgrafos induzidos pelos

vértices escolhidos nos dois grafos. A duração do jogo é um número fixo de passos, sendo esse número decidido no início do jogo.

O franco-argelino, Roland Fraïssé, desenvolveu um método para verificar a condição necessária e suficiente para que dois grafos sejam elementarmente equivalentes [6]. Esta teoria de Fraïssé foi redescoberta alguns anos mais tarde pelo lógico A. D. Taimanov e reformulada em termos de jogo lógico por Andrzej Ehrenfeucht. Daí a designação de jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé. Também é conhecido como jogo de vai-e-vem. Normalmente os jogadores designam-se por *Spoiler* e *Duplicator*, aparecendo Spoiler como sendo o jogador masculino e Duplicator como o jogador feminino.

Este jogo pode ser simultaneamente simples e complexo e é ótimo para ser jogado entre amigos.

3.4.2. Objetivo do jogo

O jogador I tem como objetivo mostrar que os dois grafos são diferentes e o objetivo do jogador II é mostrar que são ”semelhantes”.

3.4.3. Definição do jogo

O jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé sobre G e G’ aparece na literatura com a notação EF_n (G,G’), onde G e G’ são os dois grafos simples do jogo e *n*, fixo, é o número de jogadas, para cada jogador. O número de jogadas tem de ser no máximo metade da soma dos números de vértices dos dois grafos. Durante o jogo, o jogador I escolhe *n* vértices, distintos, $x_0,\ldots,x_{n-1}$ dos grafos. Ao mesmo tempo, alternando com o jogador I, o jogador II também escolhe *n* vértices, distintos, $y_0,\ldots,y_{n-1}$ também dos dois grafos, mas y_i é escolhido do grafo ao qual x_i não pertence.

A seguir apresentamos o jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé, segundo Jouko Väänänen [19].

Definição: Suponhamos que G = (V,A) e G' = (V',A') são grafos simples tais que $V \cap V' = \emptyset$ e $n \in \mathbb{N}$. O jogo Ehrenfeucht-Fraïssé $EF_n(G,G')$ é o jogo $G_n(V \cup V', W)$, onde W é o conjunto dos $2n$-uplos $(x_0, y_0, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})$ tais que:

(G1) Para todo $i < n$: $x_i \in V \Leftrightarrow y_i \in V'$.

(G2) Se denotarmos v_i e v_i' como:

$$v_i = \begin{cases} x_i, & se\ x_i \in V \\ y_i, & se\ y_i \in V \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v'_i = \begin{cases} x_i, & se\ x_i \in V' \\ y_i, & se\ y_i \in V' \end{cases}$$

então

(G2.1) $v_i = v_j$ se e só se $v_i' = v_j'$.

(G2.2) $\{v_i, v_j\} \in A$ se e só se $\{v'_i, v'_j\} \in A'$.

Se as jogadas estiverem em W, então o jogador II ganha.

Os vértices v_i e v'_i definidos acima designam-se por *vértices correspondentes*.

3.4.4. Regras do jogo

- Cada jogada consiste num movimento do Jogador I seguido de um movimento do Jogador II;
- O jogador I escolhe um vértice de um dos grafos e o jogador II escolhe um vértice do grafo que o jogador I não selecionou, e que não tenha sido escolhido anteriormente;
- Na jogada $i+1$, o vértice selecionado pelo jogador I denota-se por x_i e por y_i o vértice selecionado pelo jogador II;
- O jogador II ganha se existir um isomorfismo entre os subgrafos gerados pelos vértices escolhidos nos dois grafos, caso contrário ganha o jogador I;
- O jogo termina ao fim de um determinado número de jogadas, n, onde $n \leq min\left\{\frac{\#V(G)+\#V(G')}{2}, \#V(G), \#V(G')\right\}$.

3.4.5. Exemplos e situações de jogo

Exemplo [19] de um jogo em que ganha o jogador II.

Suponham-se os grafos a seguir G = (V, A) e G' = (V', A').

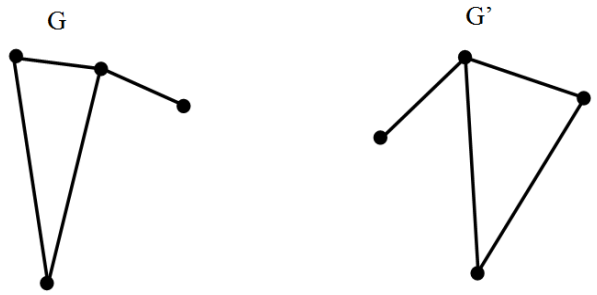


Figura 32 – Grafos iniciais para um jogo de $EF_4(G, G')$

Neste exemplo $n = 4$. O jogador I escolhe quatro vértices dos grafos, x_0, x_1, x_2 e x_3, alternando com o jogador II que também escolhe quatro vértices, y_0, y_1, y_2 e y_3.

Uma posição do jogo encontra-se na figura seguinte:

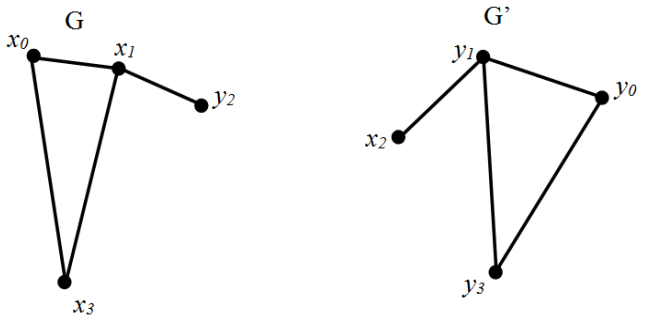


Figura 33 – Uma posição do jogo $EF_4(G, G')$

De notar que o jogador I indicou os seus dois primeiros elementos no grafo G, o terceiro em G' e o último em G. Respetivamente, o jogador II indicou os seus dois primeiros vértices em G', o terceiro em G e o último em G'. O jogador II fez sempre as suas jogadas no outro grafo relativamente ao qual o jogador I fez a sua jogada, com o objetivo de tentar imitar os movimentos do jogador I. De notar, neste jogo, $EF_4(G, G')$, que existe uma aresta entre quaisquer dois vértices de G se e só se existir uma aresta entre os vértices correspondentes no grafo G'. Então, isto significa que o jogador II ganhou o jogo porque conseguiu

provar que existe um isomorfismo entre os subgrafos gerados pelos vértices por si escolhidos.

No exemplo acima o número de vértices dos dois grafos era igual. E se por acaso tivermos a situação em que o número de vértices dos dois grafos é diferente?

Situação 1:

O grafo G tem um vértice isolado e o outro grafo não tem vértices isolados.

O jogador I tem uma estratégia vencedora, nesta situação, pois pode fazer a sua primeira jogada x_0 no vértice isolado e depois do jogador II ter escolhido y_0 (o qual não pode ser isolado…), o jogador I escolhe x_1 que esteja ligado por uma aresta a y_0. O jogador II está em desvantagem na escolha seguinte pois não pode escolher y_1 para o unir com x_0, porque este último é um vértice isolado. Verifica-se assim a vitória do jogador I.

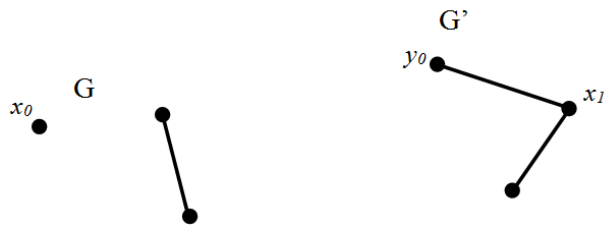


Figura 34 – Posição de um jogo $EF_2(G, G')$ em que ganha o jogador I

Situação 2:

O grafo G tem um vértice anti-isolado e o grafo G' que não tem vértices anti isolados.

Nesta situação o jogador I também tem uma estratégia vencedora. Para tal deve fazer a sua primeira jogada, x_0, no vértice anti-isolado. De seguida, o jogador II escolhe arbitrariamente y_0. O jogo prossegue até atingir a posição representada abaixo. O jogador II perde porque não consegue provar a existência de um isomorfismo entre os dois grafos.

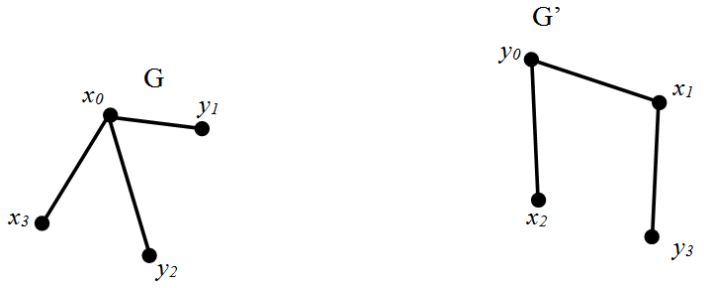


Figura 35 – Posição de um jogo EF_2(G, G') em que ganha o jogador I

Jouko Väänänen, refere no seu livro "*Models and Games*" [19] que se nenhum dos grafos tiver vértices isolados ou anti-isolados, o jogador II tem uma estratégia vencedora em EF_2(G, G').

O que acabamos de provar está expresso na proposição seguinte:

Proposição[19]: Sejam $G = (V,A)$ e $G' = (V',A')$ grafos tais que $V \cap V' = \emptyset$. Então, o jogador II tem uma estratégia vencedora em EF_2(G, G') se e só se as condições abaixo se verificarem:

(1) G tem um vértice isolado se e só se G' tem um vértice isolado.

(2) G tem um vértice anti isolado se e só se G' tem um vértice anti isolado.

(3) G tem um vértice que não é nem isolado nem anti isolado se e só se G' tem um vértice que não é nem isolado nem anti isolado.

Considere-se um caso especial neste jogo para depois se poder introduzir um teorema relativo à estratégia vencedora do jogador II.

Suponhamos então que o jogador II tem uma estratégia vencedora τ em EF_3 (G, G'). A afirmação simples $\exists z\ \forall x\ \exists y\ (x\ \mathrm{A}\ y \wedge z\ \mathrm{A}\ y)$. Note-se que esta afirmação diz que existe um vértice *a* tal que todo o vértice tem um vizinho que é vizinho de *a*.

Queremos mostrar que se G satisfaz a condição $\exists z\ \forall x\ \exists y\ (x\ \mathrm{A}\ y \wedge z\ \mathrm{A}\ y)$ então G' também a satisfaz. Para isso, suponhamos que G satisfaz realmente a condição $\exists z\ \forall x\ \exists y\ (x\ \mathrm{A}\ y \wedge z\ \mathrm{A}\ y)$. Assim, G tem um vértice, popular, *a*:

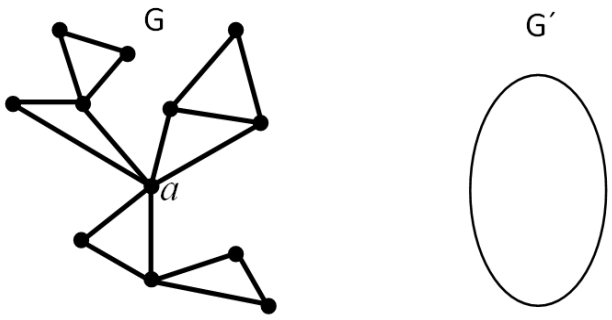


Figura 36 – Posição inicial de um jogo EF_3 (G, G'), onde o grafo G' é construído durante o jogo

Para mostrar que G' satisfaz a condição $\exists z\ \forall x\ \exists y\ (x\ A\ y \wedge z\ A\ y)$ consideramos que o jogador I começa o jogo EF_3 (G, G') com a jogada $x_0 = a$. O jogador II responde de acordo com a sua estratégia de vitória τ através de um elemento *a'* de G':

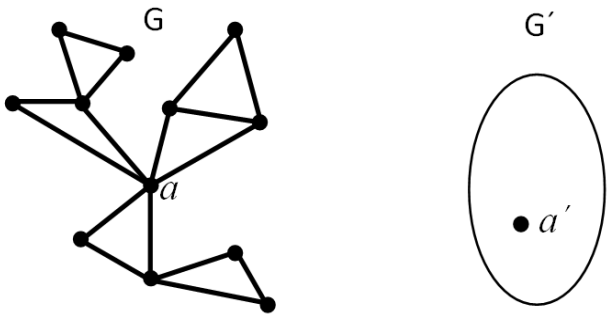


Figura 37 – Posição ao fim de uma jogada para cada jogador

É preciso mostrar que *a'* é um vértice popular de G'. Portanto, vamos tomar um elemento *b'* de G' e vamos tentar encontrar um vizinho que também seja vizinho de *a'*:

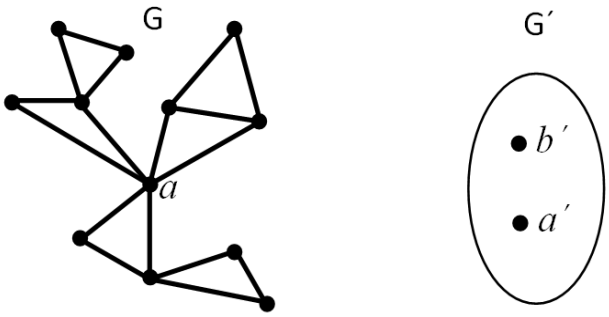


Figura 38 - Posição do jogo antes da segunda jogada do segundo jogador

O truque é continuar o jogo EF_3 (G, G') deixando que o jogador I jogue $x_1 = b'$ em G'. O jogador II responde de acordo com a sua estratégia vencedora τ com um elemento *b* de G:

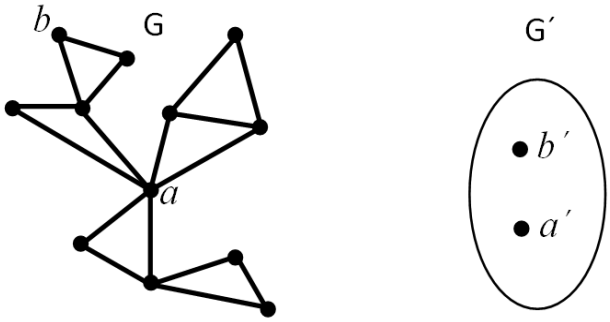


Figura 39 - Posição ao fim de duas jogadas para cada jogador

Uma vez que *a* é "popular" em G, então o vértice *b* tem um vizinho *c* o qual é também um vizinho de *a*:

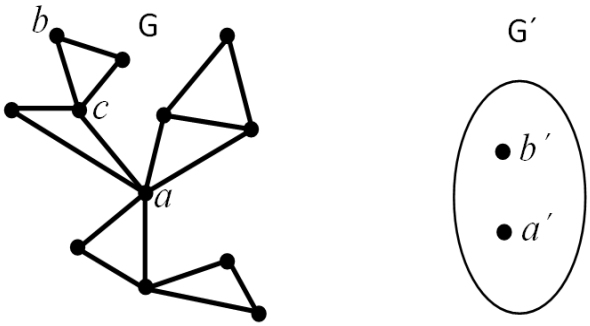


Figura 40 - Posição do jogo antes no final da segunda jogada do jogador I

Concluímos o jogo EF_3 (G, G') deixando o jogador I fazer a jogada $x_2 = c$ em G. O jogador II responde de acordo com a sua estratégia vencedora τ com um elemento *c'* de G':

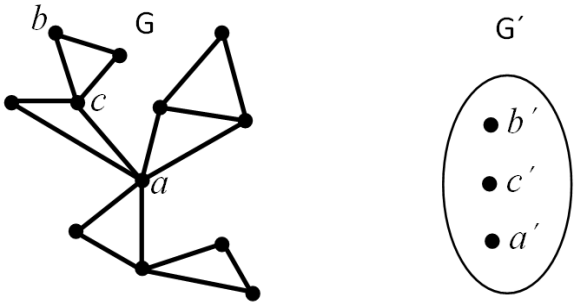


Figura 41 – Apresentação dos vértices do grafo G'

Uma vez que τ é uma estratégia vencedora e *c* é um vizinho tanto de *a* como de *b*, então *c'* é um vizinho tanto de *a'* como de *b'*:

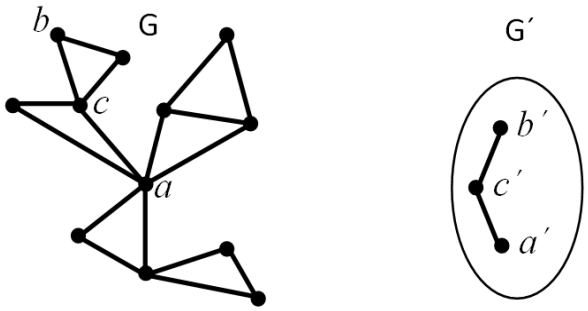


Figura 42 – Posição terminal do jogo

A linguagem de 1ª ordem de grafos constrói-se a partir de equações do tipo *y*=*x* e de afirmações de adjacência *x* A *y*, chamadas *fórmulas atómicas*, através das operações proposicionais ¬, ∧, ∨ e dos quantificadores ∃*x* ∀*x*, sendo *x* uma variável que toma valores no conjunto dos vértices.

Define-se uma *atribuição de* $\mathcal{G}$ como uma função *f* cujo domínio é um conjunto finito de variáveis e cujos valores são elementos de G. Escreve-se

$$\mathcal{G} \vDash_s \varphi$$

se a fórmula φ for verdadeira no grafo G, quando as variáveis livres que ocorrem em φ são interpretadas de acordo com *s*, isto é, uma variável *x* é interpretada como $s(x) \in V$.

A atribuição $s[a/x]$ define-se como:

$$s[a/x] = \begin{cases} a & se\ y = x \\ s(y) & se\ y \neq x \end{cases}$$

Com este conceito, a condição de verdade das fórmulas quantificadas pode ser dada facilmente por

$$\mathcal{G} \vDash_s \exists x\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe um vértice } v \text{ tal que } \mathcal{G} \vDash_{s[v/x]} \varphi.$$

O *número de variáveis* de uma fórmula φ é definida pelo número total de variáveis distintas que ocorrem na fórmula (uma ou várias vezes).

Suponha-se que

$$p = (x_0, y_0, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1})$$

é uma posição do jogo EF_n (G, G'). Chamamos *mapa da posição p* do jogo EF_n(G, G') ao correspondente conjunto de pares

$$f_p = \{(v_0, v'_0), \ldots, (v_{i-1}, v'_{i-1})\}.$$

Note-se que, a não ser que o jogador II já tenha perdido o jogo, f_p é uma função onde o dom(f_p) $\subseteq V_G$ e Cdom(f_p) $\subseteq V_{G'}$, onde dom(f_p) é o domínio de f_p e Cdom(f_p) é o contradomínio de f_p.

O *grau de quantificação* de uma fórmula φ, denota-se por QR(φ) e define-se do seguinte modo:

- QR(x=y) = QR(x A y)=0;
- QR(¬φ)=QR(φ);
- QR(φ ∧ ψ)= QR(φ ∨ ψ)=max{QR(φ),QR(ψ)};
- QR(∃xφ)= QR(∀xφ)= QR(φ)+1

De forma mais simplificada, o grau de quantificação de uma fórmula é a profundidade de aninhamento dos seus quantificadores.

Alguns exemplos:

Uma frase com grau de quantificação 2:

∀x ∃y R(x, y)

Uma fórmula com grau de quantificação 1:

∀x R(y, x) ∧ ∃x R(x, y)

Uma fórmula com grau de quantificação 0:

R(x, y) ∧ x ≠ y

Uma fórmula de grau de quantificação 3:

$$\forall_x \exists_y \exists_z \left(\left(\neg x = y\right) \wedge x R y\right) \wedge \left(\left(\neg x = z\right) \wedge z R x\right)$$

Uma fórmula, equivalente à anterior, porém com grau de quantificação 2:

$$\forall_x \left(\exists_y \left((\neg x = y) \wedge x R y\right)\right) \wedge \left(\exists_z \left((\neg x = z) \wedge z R x\right)\right)$$

Teorema C1: Suponhamos que G e G' são dois grafos simples. Se o jogador II tiver uma estratégia vencedora em EF_n (G, G') na posição $p = (x_0, y_0, \ldots, x_{n-k-1}, y_{n-k-1})$, então $\mathcal{G} \vDash_s \varphi$ se e só se $\mathcal{G}' \vDash_{f_p \circ s} \varphi$ para todas as fórmulas φ, sem variáveis livres, com grau de quantificação inferior ou igual a k e todas as atribuições s de $\mathcal{G}$ tais que Cdom (s) $\subseteq$ dom (f_p).

Prova:

A demonstração faz-se por indução sobre k. Para $k = 0$, nada há a demonstrar. Consideremos que a afirmação é verdadeira para k, como hipótese de indução e vamos demonstrá-lo para k+1. Seja $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_k)$ uma estratégia vencedora do jogador II em EF_n (G, G') na posição $p = (x_0, y_0, \ldots, x_{n-k-2}, y_{n-k-2})$. Suponhamos que φ é uma fórmula com grau de quantificação inferior ou igual a k+1 e seja s uma atribuição de $\mathcal{G}$ tal que Cdom(s) $\subseteq$ dom (f_p). Vamos mostrar: $\mathcal{G} \vDash_s \varphi$ se e só se $\mathcal{G}' \vDash_{f_p \circ s} \varphi$.

Caso 1:

Se φ é atómica e s satisfaz φ em $\mathcal{G}$, então o jogador que efetuou a última jogada ganha. O que se quer mostrar segue do facto de que o jogador II ainda não perdeu o jogo.

Caso 2:

$\varphi = \exists x \psi$, onde ψ tem grau de quantificação inferior ou igual a k. A hipótese de indução aplica-se a ψ.

Assume-se que $G \vDash_s \exists x \psi$ e vamos mostrar que $G' \vDash_{f_p \circ s} \exists x \psi$.

Seja então $a \in V_G$ tal que $G \vDash_{s[a/x]} \psi$. O nosso objetivo é encontrar um $b \in V_{G'}$ tal que $G' \vDash_{(f_p \circ s)[b/x]} \psi$. Joguemos EF_n (G, G') na posição p de modo que o jogador I escolha em primeiro lugar $x_{n-k-1} = a \in V_G$ e depois o jogador II usa a sua estratégia vencedora τ para escolher $y_{n-k-1} = b \in V_{G'}$. Temos assim uma nova posição $p' = (x_0, y_0, \ldots, x_{n-k-1}, y_{n-k-1})$ e o jogador II mantém ainda uma estratégia vencedora na posição p'. Pela hipótese de indução, $G \vDash_{s[a/x]} \psi$ implica que $G' \vDash_{(f_{p'})\circ(s[a/x])} \psi$. Como, após a jogada do jogador I, o jogador II ainda dispõe de uma jogada, tem-se $(f_{p'})\ o\ (s[a/x]) = (f_p\ o\ s)[b/x])$, o que significa que o jogador II ainda mantém uma estratégia vencedora. Assim, $G' \vDash_{(f_{p'} \circ s)[b/x]} \psi$, como pretendíamos.

De modo idêntico se poderia começar em $G' \vDash_{f_p \circ s} \exists x\psi$ e obter $G \vDash_s \exists x\psi$.

Caso 3:

φ é uma de $\neg\psi$, $\psi \vee \theta$, $\psi \wedge \theta$ de $\forall x\psi$. Então o que queremos demonstrar segue dos casos 1 e 2. Vejamos:

Se $\varphi = \neg\psi$, então o jogador que tem disponível a jogada (φ, s), permite a jogada (ψ, s) ao outro jogador, o que significa que o jogador II ainda não perdeu.

Se $\varphi = \psi \wedge \theta$, então o jogador que pode fazer a jogada (φ, s), passa a ter disponíveis (ψ, s) ou (θ, s) e o outro jogador é que decide.

Se $\varphi = \psi \vee \theta$, então o jogador que detém a jogada (φ, s), passa a ter disponíveis (ψ, s) ou (θ, s), e pode ele próprio decidir a jogada.

Se $\varphi = \forall x\psi$, então o jogador que tem disponível a jogada (φ, s), passa a dispor de $(\psi, s[v/x])$ para algum v e o outro jogador decide para qual v. □

Tendo em conta a demonstração acima prova-se o seguinte teorema:

Teorema C2: Suponhamos que G e G' são dois grafos. Se o jogador II tiver uma estratégia vencedora em EF_n (G, G'), então os grafos G e G' satisfazem as mesmas sentenças com grau de quantificação inferior ou igual a *n*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os três tipos de jogos aqui estudados poderão ser usados em atividades letivas dirigidas aos alunos tendo em conta as suas faixas etárias e os objetivos pedagógicos pretendidos. Os jogos em que é fácil descortinar uma estratégia vencedora mobiliza recursos do raciocínio conducentes à descoberta. Os jogos que nunca terminam empatados fornecem sempre uma solução para um dos jogadores. Este fator pode ter bons resultados pedagógicos motivando o aluno para a pesquisa e obtenção de uma solução, que se sabe existir, para um problema. Finalmente, os jogos que terminam sempre empatados, quando bem jogados, obrigam ao desenvolvimento de estruturas cognitivas de forma a tentar inverter essa situação. Outro jogo de raciocínio lógico que motiva algumas discussões matemáticas importantes é o Sudoku. Um desses problemas é saber se existirá um número mínimo de casas que deva estar inicialmente preenchido no jogo, abaixo do qual será impossível concluir o tabuleiro, ou seja, trata-se do problema do número mínimo de pistas de um Sudoku [10].

Tal como é preconizado no Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Específicas de Matemática, cremos que a introdução de jogos no ensino, ao aliar competências essenciais de raciocínio, estratégia e reflexão, é um fator benéfico para a aprendizagem de conteúdos de Matemática, desde que adequadamente utilizados. Sugere-se assim a continuação deste trabalho, procurando aliar o estudo de alguns dos jogos aqui realizado à lecionação de conteúdos de Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] A.N.d. Almeida, *Teoria de Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria de Jogos*, UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, São Paulo, 2006.

[2] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press Ltd., Great Britain, 1976.

[3] C.L. Bouton, *Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory*, in *The Annals of Mathematics*, 2, Annals of Mathematics, 1901-1902, pp. 35-39.

[4] P. Feofiloff, Y. Kohayakawa, and Y. Wakabayashi, *Uma Introdução sucinta à Teoria dos Grafos*, 2011.

[5] T.S. Ferguson, *Game Theory*, UCLA - University of California at Los Angeles, 2008.

[6] R. Fraïssé, *Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes restreints*, in *Mathematique*, Publications Scientifiques Université d'Alger, Alger, 1955.

[7] M. Gardner, Mathematical Puzzles and Diversions, Scientific American, CON-TAC-TIX A PIET HEIN Game, 1968.

[8] J. Huizinga, *Homo Ludens: O jogo como elemento da cultura*, São Paulo, 2007.

[9] E.H. Mafredini, and M.A. Martins, *Algumas aplicações do cálculo proposicional*, in *Boletim SPM*, n.º 48, Aveiro, 2003, pp. 37-52.

[10] P.M. Martins, and J. Picado, *Existe um Sudoku com 16 pistas?*, in *Boletim da SPM*, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2012, pp. 57 a 63.

[11] O. Morgenstern, and J.v. Neumann, *The theory of Games and economic behavior* Princeton University Press, 1947.

[12] J.P. Neto, and J.N. Silva, *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos, Coleção O Prazer da Matemática*, 1.ª, Gradiva - Publicações, Lda., Lisboa, 2004.

[13] M.A.F. Neves, and J.N. Silva, *Matemática para cursos profissionais - módulo B5*, Porto Editora, Porto, 2009.

[14] V.E. Nunes, *O Jogo Hex*, Universidade de Lisboa - Faculdade de Ciências, 2009.

[15] I.F. Raguenet, and M.K.d. Barrêdo, *A Teoria Matemática do Jogo de Nim*, in *Explorando o Ensino da Matemática - Atividades*, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica, Brasilia, 2004, pp. 153-159.

[16] R.G.d. Rego, and R.M.d. Rego, *Matematicativa II*, 1999.

[17] H.O. Rodrigues, and J.R.d. Silva, *O Jogo do Nim e os conceitos de mdc e mmc*, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2004.

[18] B.A. Sartini et al., *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*, in *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, U.F.d. Bahia ed., Bahia, 2004.

[19] J. Väänänen, *Models and Games*, Cambridge University Press, New York, 2011.