

ESTUDO E UNIFICAÇÃO DE UMA
CLASSE DE PROBLEMAS DE
AMOSTRAGEM, INTERPOLAÇÃO E
EXTRAPOLAÇÃO

Paulo Jorge dos Santos Gonçalves Ferreira

Universidade de Aveiro
Departamento de Electrónica e Telecomunicações

1992

Reimpressão corrigida em Fevereiro de 1996, com
lista de referências bibliográficas actualizada.

Dissertação apresentada à
Universidade de Aveiro
para obtenção do grau de Doutor em
Engenharia Electrotécnica

Agradecimentos

Devo ao Prof. Dr. José Carlos Príncipe um agradecimento muito especial não só por ter lido e comentado uma versão preliminar deste trabalho, mas também e sobretudo pela contínua ajuda, inspiração e encorajamento de que soube sempre ser fonte ao longo dos anos, por palavras e exemplo.

Ao Prof. Dr. Pedro Guedes de Oliveira, que contribuiu de forma insubstituível para a formação e amadurecimento do grupo em que me insiro, agradeço não só os esforços que sempre fez para nos assegurar infraestruturas e condições de trabalho, como também numerosas sugestões acerca deste trabalho e as frequentes palavras de sincero encorajamento e motivação.

O Prof. Dr. José Sousa Pinto, com quem debati repetidas vezes alguns dos assuntos que constam do presente trabalho, deu-me uma inestimável ajuda ao colocar à minha disposição a extensa bibliografia sobre teoria da amostragem de que dispõe. Devo à sua generosidade o acesso a muitos artigos que doutro modo dificilmente poderia obter, e ao seu exemplo matemático numerosas lições.

Agradeço ao Prof. Dr. Francisco Vaz os esforços que empregou para melhorar as condições de trabalho dentro do grupo a que pertença, e o apoio e ajuda que nunca negou durante a realização deste trabalho, apesar de solicitado por tantos outros assuntos e em tão diversas direcções.

Agradeço ao Prof. Dr. Estima de Oliveira o cuidado que pôs na leitura e revisão linguística deste trabalho, as diversas sugestões acerca da sua forma, e muitas discussões de largo espectro, a que nunca se furtou apesar dos múltiplos afazeres.

Devo ainda um agradecimento especial ao Prof. Dr. Francisco Sepúlveda Teixeira, cuja revisão cuidada e aviso antecipado me permitiram evitar algumas incorrecções matemáticas.

Finalmente, a todos os restantes colegas e amigos, um sincero obrigado pelo apoio e amizade constantes, que tornaram mais agradáveis as horas de trabalho e as de lazer.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	xi
Abstract	xiii
Acerca deste trabalho	1
Introdução	1
Enquadramento e motivação	2
Objectivos	7
Conteúdo	8
Resultados principais	10
Resultados originais	11
Partes deste trabalho publicadas ou a publicar	12
Organização	12
Meios utilizados	14
1 Preliminares	15
1.1 Espaços de dimensão finita	15
1.2 Espaços de dimensão infinita	17
1.3 O conceito de limitação em frequência	20
1.4 Amostragem	22
1.5 Notação abreviada	23
1.6 Notas	24
2 Séries de amostragem incompletas	29
2.1 Séries de amostragem clássicas incompletas	29
2.1.1 A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ em ℓ_2	30
2.1.2 Solução não-iterativa	31
2.1.3 O teorema de unicidade	33
2.1.4 Soluções iterativas	34
2.1.4.1 Solução pelo método de Jacobi	35
2.1.4.2 Solução pelo método JOR	36

2.1.4.3	Solução pelo método de Gauss-Seidel	36
2.1.4.4	Solução pelo método SOR	37
2.1.5	Resumo dos resultados	38
2.2	Séries de amostragem generalizadas incompletas	41
2.2.1	A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ generalizada em ℓ_2	43
2.2.2	Solução não-iterativa	44
2.2.3	Um exemplo com a transformação de Hankel	46
2.2.4	O teorema de unicidade	47
2.3	Nota sobre polinômios trigonométricos	48
2.3.1	Série de amostragem infinita	48
2.3.2	Série de amostragem finita	49
2.3.3	Um método mais simples	51
2.4	Notas	52
3	Séries de amostragem incompletas em \mathbb{C}^n	55
3.1	Definição do problema e terminologia	55
3.2	O teorema de unicidade	57
3.3	Sobre a necessidade da contiguidade	59
3.3.1	Permutações que comutam com a matriz de Fourier	60
3.3.2	Necessidade da contiguidade	65
3.4	Uma perspectiva diferente	65
3.5	A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ em \mathbb{C}^n	67
3.5.1	Propriedades da matriz \mathbf{B}	69
3.6	O problema de reconstrução em \mathbb{C}^n	70
3.6.1	Primeiro método	70
3.6.2	Segundo método	70
3.6.3	Terceiro método	72
3.6.4	Relações entre os métodos	72
3.7	O problema de convergência	73
3.8	Algoritmos rápidos de reconstrução	75
3.8.1	Solução pelo método de Jacobi	75
3.8.2	Solução pelo método JOR	77
3.8.3	Solução pelo método de Gauss-Seidel	78
3.8.4	Solução pelo método SOR	79
3.9	Exemplos	80
3.10	Notas	82
4	Problemas de interpolação e extrapolação	85
4.1	O método de reconstrução	85
4.2	Reconstrução em $B_2(\sigma)$	86
4.2.1	A equação $f = Bf$ em $B_2(\sigma)$ ou equação de Bateman	87
4.2.2	O algoritmo iterativo de reconstrução	87
4.2.3	Interpretação do algoritmo	88

4.2.4	Alternativas à equação de Bateman	89
4.3	A equação $f = Bf$ para polinómios trigonométricos	91
4.4	A equação $f = Bf$ para outras transformadas integrais	92
4.5	Análise do problema de reconstrução	93
4.5.1	Relação com os teoremas de ponto fixo	97
4.6	Reconstrução em intervalos de medida qualquer	99
4.6.1	Reconstrução quando o núcleo pertence a L_2	99
4.6.2	Reconstrução quando o núcleo pertence a L_1	102
4.7	Notas	104
5	Generalização e unificação dos resultados anteriores	107
5.1	Operadores compactos	107
5.2	Complementos ortogonais em espaços de Banach	109
5.3	Novas demonstrações dos teoremas de unicidade	110
5.4	O problema de reconstrução abstracto	112
5.5	Alguns casos particulares	116
5.5.1	Reconstrução de funções sobre-amostradas no sentido da trans- formação de Fourier partindo de séries de amostragem incompletas	116
5.5.2	Reconstrução de funções sobre-amostradas em sentido generali- zado partindo de séries de amostragem incompletas	117
5.5.3	Reconstrução em \mathbb{C}^n	118
5.5.4	Interpolação e extrapolação de polinómios trigonométricos	119
5.5.5	Interpolação e extrapolação em $B_2(\sigma)$	119
5.5.6	Interpolação e extrapolação em $B_1(\sigma)$	121
5.6	Notas	123
6	Conclusões e trabalho futuro	125
6.1	Conclusões	125
6.2	Trabalho futuro	126
	Referências bibliográficas	129

Índice de figuras

2.1	Raio espectral ρ <i>versus</i> factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 5, 10, 20 e 40.	35
2.2	Raio espectral ρ <i>versus</i> factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 5 modificadas de acordo com os métodos (a) equação (2.6), (b) Jacobi, (c) Gauss-Seidel.	40
2.3	Raio espectral ρ <i>versus</i> factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 10 modificadas de acordo com o método SOR, para vários valores do parâmetro μ	40
3.1	Vector de dimensão 100 gerado aleatoriamente e limitado em frequência de modo a ter uma largura de banda normalizada igual a 0.41.	80
3.2	Vector amostrador de densidade normalizada 0.6. O processo de amostragem correspondente introduz uma perda de amostras de 40 por cento.	81
3.3	Erro <i>versus</i> número de iterações para os algoritmos de dimensionalidade n e k , (a) para $\mu = 1$ e (b) para o valor óptimo de μ	81
3.4	Erro <i>versus</i> número de iterações para os métodos (a) Jacobi, (b) JOR com $\mu = 1.1$, (c) Gauss-Seidel, (d) SOR com $\mu = 1.1$, (e) SOR com $\mu = 1.2$	81
6.1	Vector de dimensão 256 gerado aleatoriamente e limitado em frequência de modo a ter uma largura de banda normalizada igual a 0.5.	127
6.2	Vector amostrador de densidade normalizada 0.7. O processo de amostragem correspondente introduz uma perda de amostras de 30 por cento.	127
6.3	Erro quadrático <i>versus</i> número de iterações para os métodos (a) Papoulis-Gerchberg, (b) Jacobi, (c) Gauss-Seidel, (d) Jacobi com particionamento, (e) Gauss-Seidel com particionamento.	127

Índice de tabelas

2.1	Matrizes e vectores das iterações de Jacobi, JOR, Gauss-Seidel e SOR.	39
3.1	Raízes quadradas da unidade módulo n , para vários valores de n .	63
3.2	Erro após 20, 40, 60, 80 e 100 iterações dos métodos (a) Papoulis-Gerchberg, (b) Papoulis-Gerchberg com relaxação óptima ($\mu = 1.9$), (c) JOR, (d) JOR com relaxação óptima ($\mu = 1.13$), (e) SOR, (f) SOR com $\mu = 1.1$, (g) SOR com $\mu = 1.2$.	82

Resumo

Sejam X e Y dois conjuntos e f uma função definida em X com valores em Y . Seja U um subconjunto de X no sentido estrito. Dado o conjunto C constituído pelos pares $\{x, f(x)\}$ tais que $x \in X \setminus U$, o que se pode dizer acerca de f ? Em que condições C determina f ?

Existem diversas motivações de ordem prática para este problema. Suponhamos, por exemplo, que a função f descreve uma qualquer grandeza física. A natureza exacta dessa grandeza não tem qualquer importância para os nossos fins, pelo que a ignoraremos. Aquilo que queremos sublinhar é a frequente impossibilidade de proceder à medição *completa* dessa grandeza, isto é, determinar os valores de f para todos os pontos do seu domínio.

Para clarificar esta afirmação, imaginemos por um momento que a grandeza física varia em função do tempo. É óbvio que o processo de medida terá de ter duração finita, o que implica que os valores de f só possam ser conhecidos, quando muito, num conjunto limitado e fechado. O complemento deste conjunto corresponde ao conjunto U do problema abstracto que acima enunciámos.

Neste trabalho estuda-se um caso particular desse problema, e que se caracteriza pela existência de um operador linear B tal que $f = Bf$. O método que escolhemos para chegar à solução é de extrema simplicidade, e parte da decomposição

$$f = u + v,$$

em que o suporte de u é U , e o de v é $X \setminus U$. Note-se que v é uma função conhecida. Como B é linear, a relação $f = Bf$ implica

$$u = Bu + h,$$

onde $h = Bv - v$ é uma função conhecida. Esta é uma equação funcional de segunda espécie para u . Em muitos casos, pode tirar-se partido da teoria existente para a solução do problema.

Antes de passarmos ao estudo do problema geral examinaremos alguns casos particulares com interesse teórico e prático, relativos à interpolação, extrapolação e amostragem de uma classe de funções de grande importância prática. Apresentaremos resultados válidos quer em espaços de Hilbert de dimensão finita e infinita, quer em espaços de Banach.

Abstract

Denote by X and Y two sets and consider a function f defined on X and with values in Y . Let U be a proper subset of X . Consider the set C of all pairs $\{x, f(x)\}$ such that $x \in X \setminus U$. What does C imply about f ? Under what circumstances does C determine f ?

The function f can be thought of as a model of some physical quantity, whose exact nature is unimportant. Note that f itself is partially known, since only the pairs $\{x, f(x)\}$ with $x \in X \setminus U$ are in C . This could result, for example, from practical constraints imposed by the instrumentation.

This work is concerned with a particular case of this *reconstruction* problem, in which there is a linear operator B such that $f = Bf$ for every f belonging to X .

The approach taken towards the solution of the problem is extremely simple, and springs from the decomposition

$$f = u + v,$$

where the support of u is U , and the support of v is the complement of U in X . Note that v is a known function.

The equation $f = Bf$ implies, by linearity,

$$u = Bu + h,$$

where $h = Bv - v$ is a known function. This is a functional equation of the second kind for the unknown function u . If B is compact, the original reconstruction problem can be solved using the particularly elegant theory of second kind equations with compact operators.

We will study the general reconstruction problem in Banach spaces, as well as in finite and infinite dimensional Hilbert spaces. Before dealing with the general case we will consider a number of special problems which suggest the general theory, and provide a hint of its importance and practical interest. We will see that our approach allows a unified treatment of a number of reconstruction problems of theoretical and practical importance, in interpolation, extrapolation and sampling theory.

Acerca deste trabalho

Introdução

Este trabalho aborda assuntos que se podem classificar como fazendo parte da teoria de reconstrução, a qual tem por objectivo o estudo de métodos para a elaboração de modelos de quantidades físicas com base em observações ou medidas imperfeitas ou incompletas. Normalmente, as grandezas físicas consideradas variam em função do tempo e/ou de outras variáveis (espaciais, por exemplo).

Como todos os ramos experimentais das ciências exactas dependem da realização de medidas, e os processos de medida são intrinsecamente imperfeitos, os resultados da teoria da reconstrução têm, em princípio, um interesse muito alargado. A utilidade da teoria seria reforçada se, em primeiro lugar, a natureza dos problemas tratados reflectisse os interesses de uma audiência tão vasta e heterogénea quanto possível; e em segundo lugar, se os problemas e resultados fossem expressos de forma adequada a essa audiência, necessariamente detentora de dialectos científicos específicos e diversos.

A linguagem ideal para este fim existe, e é usada em todos os ramos das ciências exactas. Referimo-nos àquela que Carl Friedrich Gauss chamou a rainha das ciências: a Matemática.

Cremos, contudo, que a utilidade da teoria da reconstrução, ou de qualquer outro ramo multidisciplinar do saber, beneficiaria grandemente se à componente matemática se juntasse *abstracção* e *precisão*. Por abstracção, queremos exprimir a necessidade de expor e tratar o essencial do problema de forma independente da linguagem própria do contexto em que este surgiu ou está a ser estudado. Se tal não for possível, entendemos que se deve procurar no mínimo precisão, isto é, definir de modo exacto o significado dos termos utilizados, de modo a que o trabalho possa ser entendido por não-especialistas que dominem a linguagem matemática usada.

Um maior esforço neste sentido poderia contribuir para evitar aquilo que a nosso ver é um dos pontos sensíveis de parte da bibliografia científica actual. Referimo-nos ao carácter desnecessariamente críptico de tantos artigos e livros, resultado da adopção de uma linguagem hermética própria de determinado campo, e imprecisa ou parcamente explicada. Isto pode contribuir para que problemas matematicamente relacionados, ou mesmo equivalentes, não sejam reconhecidos como tal.

Tomemos como exemplo a teoria das séries de amostragem, nome pelo qual é

costume designar as expansões em série da forma

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(x_i) k_i(x),$$

cujos coeficientes são os valores da função expandida em determinados pontos do seu domínio, os pontos de amostragem. É perfeitamente possível expor e estudar a teoria de maneira independente das importantes aplicações que esta tem nos sistemas de comunicação digitais, por exemplo, mas isso raramente é feito.

O problema geral de existência e convergência para as séries de amostragem está natural e intimamente relacionado com outros problemas matemáticos, especialmente os ligados à teoria da interpolação. Poder-se-ia por isso esperar que o problema da amostragem fosse abordado em textos matemáticos dedicados a esta teoria, e, reciprocamente, que nos textos de engenharia dedicados à teoria da amostragem esta fosse enquadrada dentro da teoria de interpolação. Curiosamente, isto também só acontece a título excepcional.

O tópico da amostragem é frequentemente enquadrado em teoria da comunicação, ou em processamento de sinal. O mero facto de efectuar esta ou outra classificação já é em nossa opinião desvantajoso, porque pode contribuir para que o investigador interessado não seja induzido a procurar bibliografia fora dessas áreas, com todas as desvantagens que daí advêm. Estas observações são igualmente pertinentes para outros tópicos, como, por exemplo, para a teoria da interpolação e extrapolação de funções limitadas em frequência.

Concluindo, defendemos que a utilidade dos estudos efectuados no âmbito de qualquer tópico multidisciplinar cresce com os níveis de precisão e abstracção da linguagem neles utilizada, entendendo-se estes termos no sentido atrás definido; que mesmo que o problema a estudar tenha tido origem no contexto de uma especialidade bem determinada, o respectivo estudo e exposição deve ser efectuado sem recurso à linguagem própria dessa área, excepto, naturalmente, quando se passar ao nível final da aplicação; que se devem evitar as classificações rígidas dos tópicos em especialidades, de modo a facilitar a criação e evolução de um conjunto comum de conhecimentos aplicáveis em diversas direcções; e que um determinado assunto se enriquece tanto pelo avanço em profundidade no seu estudo, como pelo estabelecimento de novos relacionamentos com diferentes áreas do saber.

É nossa intenção elevar estas convicções ao nível dos restantes objectivos deste trabalho, os quais enunciaremos logo que dermos uma ideia do contexto em que os problemas a abordar se inserem, e das razões que nos levaram a considerá-los.

Enquadramento e motivação

Os problemas de reconstrução disseminam-se por muitas das áreas da engenharia e das ciências exactas. São frequentes em teoria de sistemas, em teoria da informação, em sistemas de comunicação e em processamento de sinal.

A disponibilidade de meios de cálculo progressivamente mais poderosos tem tornado possível a abordagem de problemas de reconstrução de complexidade crescente, e estimulado de forma decisiva o interesse da comunidade científica sobre o assunto.

O resultado deste interesse está patente na grande variedade dos problemas abordados, no vastíssimo número de publicações relevantes para o seu estudo, e na diversidade das ferramentas matemáticas utilizadas para o efeito.

A inquestionável utilidade de tal corpo de conhecimentos é por vezes prejudicada por questões de linguagem e por uma excessiva fragmentação, que em alguns casos chega a impedir que problemas matematicamente semelhantes sejam reconhecidos como tal. A escassez de estruturas unificadoras que abarquem uma variedade considerável desses problemas leva a que eles sejam resolvidos isoladamente, empregando-se em cada caso a ferramenta matemática cujo êxito seja mais comum em problemas do género. Em processamento de sinal, por exemplo, tratam-se os problemas chamados *discretos* como sendo de uma natureza essencialmente distinta dos chamados *contínuos*, mesmo quando isso não acontece. Erguem-se assim barreiras entre problemas afins, que uma teoria matemática coerente poderia bem eliminar.

A utilidade dos esforços unificadores seria evidente, por exemplo, para os problemas de reconstrução de funções limitadas em frequência no sentido da transformada de Fourier. Os primeiros trabalhos onde o problema da extrapolação de tais funções é abordado devem-se a Slepian e Pollak Slepian e Pollak (1961), e Landau e Pollak Landau e Pollak (1961), que propõem um método de extrapolação baseado na biortogonalidade das funções esferoidais prolatas. Como na grande maioria dos trabalhos posteriores, só se consideram funções limitadas em frequência de quadrado integrável.

Landau Landau (1960) e Landau e Miranker Landau e Miranker (1961) estudaram o problema da reconstrução de funções dessa mesma classe, considerando um processo de distorção não-linear instantâneo e monotónico seguido de filtragem. Propuseram um algoritmo iterativo que mostraram convergir para a solução do problema. Masry Masry (1973) provou um resultado análogo, mas para processos estocásticos e dispensando a hipótese de monotonicidade. Logan Logan (1978) apresentou uma solução não-iterativa para o problema considerado por Landau e Miranker, no contexto da teoria da modulação.

Os resultados de Landau e Miranker foram generalizados por Sandberg Sandberg (1963), que os estabeleceu no contexto da teoria dos espaços de Hilbert e usando o teorema do ponto fixo de Banach. O resultado de Sandberg foi usado por Wiley *et al.* para a solução de um problema de desmodulação de sinais modulados em frequência com banda larga Wiley *et al.* (1977), e para a reconstrução de funções amostradas não-uniformemente e de forma não-instantânea, isto é, preservando informação sobre a função amostrada numa vizinhança de medida positiva de cada instante de amostragem Wiley (1978b). Sauer e Allebach Sauer e Allebach (1987) estudaram três algoritmos semelhantes ao que Wiley propusera, empregando-os para a reconstrução de imagens limitadas em frequência partindo de amostras não-equidistantes. Mais recentemente, foi demonstrado Marvasti *et al.* (1991) que se podia aplicar um algoritmo iterativo semelhante na reconstrução de funções amostradas instantaneamente e de

forma não-uniforme.

O aparecimento do algoritmo iterativo de extrapolação, descrito por Gerchberg (1974) e Papoulis (1975), estimulou de forma decisiva o interesse por este problema, inclusivamente ao nível do processamento de imagem e sinais multidimensionais. A semelhança formal entre o algoritmo de Papoulis-Gerchberg e o resultado citado devido a Sandberg foi notada por Wiley (1978a), que mais tarde provou Wiley (1979) que apesar da referida semelhança o resultado de Sandberg não é aplicável ao problema de extrapolação.

De entre as muitas aplicações do algoritmo de Papoulis-Gerchberg citamos a que consta de Marks II (1983), onde ele é usado para determinar qualquer número finito de amostras de funções sobre-amostradas. A utilidade do algoritmo em diversos problemas práticos tem sido demonstrada por vários autores Naidu e Paramasivaiah (1984), Ferreira (1988), Marvasti (1989). Uma aplicação a um problema de optimização é dada em Marks II e Reightley (1985).

Os algoritmos iterativos de extrapolação podem ser estudados no contexto da reconstrução condicionada, um panorama da qual é dado no trabalho de Schafer *et al.* (1981). Escolhendo de maneira apropriada os operadores que exprimem por um lado a condição a que a função a reconstruir deve obedecer, e por outro a distorção de que ela vai ser alvo, é possível chegar a uma variedade de algoritmos iterativos de reconstrução. Nesse número inclui-se o de Papoulis-Gerchberg, bem como o de Landau e Miranker.

O algoritmo de Papoulis-Gerchberg apresenta algumas desvantagens, a maior das quais se relaciona com a respectiva velocidade de convergência, que pode ser bastante baixa. O reconhecimento deste e doutros problemas conduziu ao aparecimento de um elevado número de trabalhos com a finalidade de generalizar ou melhorar a iteração originalmente proposta. No que respeita a generalizações temos o algoritmo de dupla projecção de Youla (1978), formulado em espaços de Hilbert, susceptível de uma elegante interpretação geométrica, e que foi proposto no contexto do processamento de imagem. O trabalho de Cadzow (1979) foca certos aspectos relacionados com a estabilidade do algoritmo, bem como problemas numéricos. Contém também uma solução não-iterativa do problema da extrapolação, numa forma no entanto pouco prática uma vez que exige a solução de uma equação integral de Fredholm de primeira espécie, um exemplo clássico de problema mal-posto no sentido de Hadamard. O carácter mal-posto do problema de extrapolação tinha já sido notado Viano (1976) num outro contexto por Viano, que propôs uma solução regularizada usando a biortogonalidade das funções esferoidais prolatas. Mais recentemente, Chamzas e Xu (1984) estudaram a possibilidade de acelerar a convergência do algoritmo de extrapolação introduzindo um termo dependente de uma constante de relaxação, calculada de forma a minimizar a norma do erro. Papoulis e Chamzas (1979) modificaram o algoritmo de extrapolação, propondo o anulamento da transformada de Fourier da estimativa do sinal extrapolado nos pontos onde o módulo dessa transformada seja inferior a um certo limiar. Esta forma do algoritmo é mais apropriada para a extrapolação de funções cuja transfor-

mada de Fourier tenha suporte na união de vários conjuntos de medida pequena ou nula. Singh *et al.* propuseram um algoritmo Singh et al. (1986) que permite extrapolações de qualidade em menos iterações do que as necessárias com o algoritmo de Papoulis-Gerchberg.

Os algoritmos descritos em muitos dos trabalhos citados partem de funções de variável real e dão origem a funções de variável real, definidas em toda a recta real, o que torna a sua manipulação numérica directa impossível. Na prática são necessários processos iterativos de dimensão finita, os únicos cuja simulação em computador é viável. Isto conduziu ao estudo dos chamados algoritmos *discretos*, e a um novo problema, ou seja, o de relacionar a solução obtida por um algoritmo discreto com a solução de algoritmos de variável contínua ou, simplesmente, *contínuos*.

O estudo da forma discreta do algoritmo de Papoulis-Gerchberg foi efectuado por Jones Jones (1986), tirando partido do facto das amostras conhecidas serem contíguas, o que invalida o resultado para problemas de interpolação. Removemos esta restrição nós mesmos Ferreira (1988), introduzindo simultaneamente uma constante de relaxação no algoritmo. Mais recentemente, levámos a cabo um estudo mais aprofundado desse mesmo algoritmo Ferreira (1994b), conseguindo determinar o valor óptimo da constante de relaxação, dando limites óptimos para a evolução do erro em função do número de iterações, determinando os sinais para os quais a velocidade de convergência é máxima e mínima, e estudando o efeito da posição das amostras desconhecidas sobre a velocidade de convergência.

Sabri e Steenaart Sabri e Steenaart (1978) estudaram também o algoritmo discreto de extrapolação, e deram uma solução não-iterativa obtida por passagem ao limite, sob forma de um operador linear a que chamaram *matriz de extrapolação*. Infelizmente, provou-se entretanto que a sua solução é incorrecta Jain e Ranganath (1981). As relações existentes entre os diversos trabalhos não foram sempre bem compreendidas, tendo dado origem a alguma polémica. Vejam-se, por exemplo, as notas Sabri e Steenaart (1980), Cadzow (1981) e Sabri e Steenaart (1981).

Jain e Ranganath Jain e Ranganath (1981) formularam o problema da extrapolação como um problema de optimização, e provaram que a solução correcta para o problema considerado por Sabri e Steenaart é dada pela pseudo-inversa de uma certa matriz singular. Estudaram ainda um algoritmo de extrapolação com velocidade de convergência melhorada, bem como um extrapolador recursivo. Um outro trabalho onde se dá atenção a problemas discretos e contínuos é Xu e Chamzas (1983), onde é proposta uma modificação estabilizadora do algoritmo de extrapolação. Em Kolba e Parks (1983), Kolba e Parks abordaram o problema da extrapolação com base num número finito de amostras. Um algoritmo não-iterativo para resolver esse mesmo problema, que incorpora informação prévia sobre a distribuição de energia do sinal no domínio do tempo, foi proposto por Potter e Arun Potter e Arun (1989). Sullivan e Liu Sullivan e Liu (1984) estudaram o problema de extrapolação discreto usando a técnica de decomposição em valores singulares. Katsaggelos e Efstratiadis Katsaggelos e Efstratiadis (1990) abordaram o problema de reconstrução discreto partindo de uma sequência iterativa de aproximações sucessivas à pseudo-inversa de uma matriz,

com base na qual construíram algoritmos iterativos para a solução de norma mínima do problema, no sentido de minimização do erro quadrático. Cabrera e Parks Cabrera e Parks (1991) propuseram um algoritmo discreto semelhante à versão discreta do algoritmo de Papoulis e Chamzas Papoulis e Chamzas (1979), mas aplicável a sinais não obrigatoriamente de banda estreita, e que deverá ser especialmente útil no caso da informação disponível sobre a banda do sinal não ser muito precisa.

A questão da equivalência entre as versões discreta e contínua do algoritmo de Papoulis-Gerchberg, no limite quando o número de pontos e a medida do intervalo de observação tendem para infinito, foi posta por Sanz e Huang num trabalho Sanz e Huang (1983d) onde discutiram os quatro possíveis modelos para os problemas de extrapolação, e que correspondem às quatro combinações possíveis de variáveis temporais e de frequência discretas e contínuas. A referida questão foi respondida na afirmativa por Schlebusch e Splettstößer Schlebusch e Splettstößer (1985). Zhou e Xia estudaram a versão multidimensional deste problema Zhou e Xia (1989b), bem como o efeito de ruído Zhou e Xia (1989a). A relação entre os algoritmos discretos e contínuos é também discutida em Sanz e Huang (1983c), juntamente com algoritmos de extrapolação e interpolação para sinais não necessariamente do tipo passa-baixo. A convergência de alguns dos algoritmos discretos foi estudada por Tom *et al.* Tom et al. (1981), tendo como base certos teoremas de ponto fixo. Em Sanz e Huang (1983b) discutem-se algoritmos discretos para reconstrução condicionada, igualmente baseados em teoremas de ponto fixo, válidos para sinais multidimensionais, e aplicáveis ao problema da extrapolação de imagens discretizadas.

A diversidade de resultados do tipo que citámos levou alguns autores a considerarem a sistematização ou unificação dos mesmos. Sanz e Huang preocuparam-se com a unificação de certos conjuntos de resultados de reconstrução, considerando separadamente os algoritmos iterativos e não-iterativos. Em Sanz e Huang (1984) propuseram uma metodologia unificadora para soluções não-iterativas de alguns problemas de reconstrução. A técnica que escolheram passa pela formulação do problema de extrapolação numa forma que matematicamente equivale a uma equação integral de Fredholm de primeira espécie. Esta abordagem não é isenta de problemas práticos, uma vez que a solução de tais equações é um problema mal-posto no sentido de Hadamard.

Em Sanz e Huang (1983a) conseguiram uma unificação de vários processos iterativos de reconstrução, usando um método iterativo devido a Bialy e que é aplicável à solução de equações funcionais lineares em espaços de Hilbert.

O trabalho de Schafer *et al.* Schafer et al. (1981) dá uma metodologia geral que torna possível a abordagem de uma classe de problemas de reconstrução iterativa. Contudo, a unificação aparentemente conseguida não vai muito além do aspecto formal, uma vez que a demonstração da convergência dos algoritmos obtidos terá de ser feita caso a caso. A perspectiva adoptada não se mostra particularmente útil para chegar a soluções não-iterativas, o que aliás parece ser comum a todas as abordagens que fazem uso de teoremas de ponto fixo.

O presente trabalho pretende também contribuir para a unificação de certos as-

pectos da teoria da reconstrução, e em particular para os que se relacionam com problemas de interpolação e extrapolação. Dadas as características dos trabalhos citados de índole semelhante, seria particularmente útil poder dispor de uma metodologia e teoria unificadas para problemas discretos e contínuos, facilmente extensível a sinais multidimensionais, e que conduzisse a soluções iterativas e não-iterativas. Tomámos esta meta como um dos principais objectivos do trabalho, os quais passamos a descrever.

Objectivos

Como os tópicos abordados neste trabalho têm carácter multidisciplinar e são susceptíveis de aplicações múltiplas, não é fácil nem sequer muito útil classificá-los de forma precisa em determinado ramo do saber. Por esse motivo, o nosso primeiro objectivo, relativo à *forma* deste trabalho, é a sua exposição de forma *precisa*, no sentido que já explicámos.

Admitiremos, contudo, certas imprecisões que facilitam e aclaram a exposição, algumas das quais são comuns mesmo em obras de matemática. Por exemplo, as referências aos espaços L_p como espaços de funções, quando eles são na realidade espaços de classes de equivalência de funções; a utilização do mesmo símbolo para referência ora a uma função, ora ao seu valor em determinado ponto do domínio; a referência ocasional a equações integrais com núcleo de L_2 , quando de facto o núcleo é uma função de duas variáveis; e outras ainda.

Tentaremos não abandonar por completo as origens e aplicações dos problemas, nem dificultar desnecessariamente a apreensão do essencial. Contudo, achamos que não devemos esconder por trás de um falso conceito de clareza as dificuldades a ultrapassar. Procuraremos expor os assuntos tratados com precisão suficiente para serem compreendidos por investigadores com formação diferente da nossa, mas evitando formulações que possam parecer artificiais aos que tenham formação idêntica, e que estejam familiarizados com aplicações concretas.

Estes compromissos levarão provavelmente o engenheiro a pensar que o rigor e o formalismo são excessivos numa obra que se diz de engenharia, enquanto que o matemático os poderá julgar insuficientes para um trabalho minimamente preciso. Esperamos que ambos possam encontrar, a par desses defeitos, algumas das qualidades a que aspirámos.

Depois de termos discutido os objectivos relacionados com a *forma* deste trabalho, debateremos em seguida aqueles que se prendem com o seu *conteúdo*.

O nosso objectivo é estabelecer uma teoria unificadora para uma certa classe de problemas de reconstrução, que permita resolver qualquer problema da classe considerada independentemente da sua natureza específica; que trate unificadamente de problemas discretos e contínuos; que forneça sempre que possível soluções iterativas e não-iterativas; e que seja facilmente extensível a sinais multidimensionais.

Descrevemos em seguida, de modo sucinto, o trabalho que desenvolvemos tendo

em conta estes objectivos. Indicaremos os resultados principais do presente trabalho, dando uma ideia mais precisa da estrutura do mesmo, e justificando a estratégia seguida para a exposição e ordenação dos diversos assuntos.

Conteúdo

Seja f uma função definida num espaço topológico X , com valores noutra espaço topológico Y , e U um subconjunto, no sentido estrito, de X . Dado o conjunto C formado pelos pares $\{x, f(x)\}$ tais que $x \in X \setminus U$, o que se pode dizer acerca de f ? Em que condições C determina f ?

Existem diversas motivações práticas para este problema. Por exemplo, a função f poderia representar uma qualquer grandeza física. O conjunto C descreveria então o conhecimento existente acerca de f , que se reduz ao conhecimento dos pares $\{x, f(x)\}$, com x pertencente ao complemento de U em X . Os valores de f em U são desconhecidos, o que se poderia dever a imposições práticas ditadas pela instrumentação, como, por exemplo, a interrupção por lapsos de tempo do processo de medida.

Pouco se pode dizer sobre o problema que acabámos de pôr, devido à sua extrema generalidade. Este trabalho ocupa-se de casos particulares, caracterizados pela existência de um operador linear B tal que qualquer f admissível se pode exprimir como $f = Bf$.

O método que escolhemos para chegar à solução é de extrema simplicidade. Decomparamos f sob a forma

$$f = u + v,$$

de modo a que o suporte de u seja U , e o de v seja $X \setminus U$. Note-se que a função v é conhecida, como se depreende de C .

Como B é linear, a relação $f = Bf$ implica imediatamente

$$u = Bu + h,$$

onde $h = Bv - v$ é uma função conhecida. Obtém-se assim uma equação funcional de segunda espécie para u . Em muitos casos, pode imediatamente tirar-se partido da teoria existente para a solução do problema.

O presente trabalho gravita em torno destas ideias. Para darmos uma ideia mais precisa do significado do problema que nos propomos tratar, recorreremos a alguns exemplos.

1. Para primeiro exemplo, consideremos a função definida no conjunto \mathbb{Z} , com valores em \mathbb{R} , caracterizada pelo vector de dimensão infinita

$$\mathbf{f} = \{\dots, f_{-i}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}.$$

Em termos de engenharia, poder-se-ia identificar com cada f_k o valor de uma função real de variável real g no ponto kT do seu domínio, o que equivale a escrever $f_k = g(kT)$.

Se a função g satisfizer condições adequadas é possível saber-se o seu valor em qualquer ponto do domínio, partindo apenas do conhecimento de \mathbf{f} . Essa condição poderá ser da forma $\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{f}$, sendo \mathbf{B} um operador apropriadamente definido. Existem condições análogas sob as quais se pode resolver afirmativamente o seguinte problema, que é um caso particular do problema geral de reconstrução que acima enunciámos: seja U um subconjunto de \mathbb{Z} com cardinal finito, e \bar{U} o seu complemento. Dado o operador \mathbf{B} e o vector \mathbf{f} tal que $\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{f}$, determinar o conjunto $\{f_i : i \in U\}$, partindo do conjunto $C = \{f_i : i \in \bar{U}\}$.

2. Para segundo exemplo, consideremos uma função definida no conjunto $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, com valores em \mathbb{C} , e portanto caracterizada por n números complexos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. É claro que se pode identificar com tal função um vector \mathbf{x} de \mathbb{C}^n , ou, na terminologia de processamento de sinal, uma sequência de extensão n .

Suponhamos que \mathbf{x} satisfaz $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, onde \mathbf{B} designa uma matriz $n \times n$. Esta condição permite exprimir, por exemplo, o subespaço constituído pelos vectores limitados em frequência no sentido da transformada de Fourier discreta, ou seja, os vectores \mathbf{x} cuja transformada de Fourier discreta $\hat{\mathbf{x}}$ satisfaz $\hat{x}_i = 0$ para um certo conjunto de inteiros contido em E_n .

Seja U um subconjunto de E_n , e \bar{U} o seu complemento. O problema de reconstrução enunciado tem neste caso o seguinte significado: dada a matriz \mathbf{B} e os vectores \mathbf{x} tais que $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, determinar o conjunto $\{x_i : i \in U\}$, partindo do conjunto $C = \{x_i : i \in \bar{U}\}$.

3. O terceiro e último exemplo é o seguinte. Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição $f = Bf$, para um operador B apropriado. Seja U um subconjunto mensurável dos reais, e \bar{U} o seu complemento.

Suponha-se que f descreve uma grandeza física que varia em função do tempo, e que devido a condicionamentos impostos pela instrumentação só foi possível observar e medir essa grandeza para instantes $t \in \bar{U}$. O problema é reconstituir f partindo do segmento observado, isto é, partindo do conhecimento de $f(t)$ para $t \in \bar{U}$.

Este é um problema de interpolação ou extrapolação, conforme a natureza de U . Constitui também um caso particular do problema geral de reconstrução anteriormente proposto.

Os problemas estudados no presente trabalho são desta natureza. Descrevemos em seguida, de maneira breve, algumas das conclusões a que chegámos no que respeita a esses problemas.

Resultados principais

Em termos gerais, o presente trabalho difere de todos os que o autor cita ou conhece pelo facto de conduzir a soluções iterativas e não-iterativas de problemas discretos e contínuos, em espaços de Hilbert de dimensão finita ou infinita, e mesmo em espaços de Banach. Possibilita também o tratamento de classes de funções limitadas em frequência no sentido de outras transformações para além da de Fourier. Existem certas características adicionais, como sejam o facto da metodologia seguida conduzir primeiro e de modo natural à solução não-iterativa do problema, e só depois à solução iterativa, precisamente o oposto do que se passa noutros trabalhos; a facilidade com que se podem modificar os processos iterativos; e a equivalência da demonstração da possibilidade de reconstrução não-iterativa e da convergência do método iterativo.

A lista seguinte enumera os resultados principais deste trabalho, segundo a ordem pela qual serão discutidos.

1. A demonstração da redundância dos conjuntos de amostras recolhidas em condições de sobre-amostragem. A nosso ver, a importância do resultado reside sobretudo nas possibilidades que abre tanto a nível teórico como a nível prático. A demonstração em si é extremamente simples, sendo esta simplicidade precisamente uma das suas vantagens.
2. A generalização do resultado mencionado no ponto (1), que possibilita o tratamento de séries de amostragem no sentido de Kramer, isto é, séries de amostragem válidas para funções que se possam exprimir por relações integrais do tipo

$$f(t) = \int_A g(x)K(x, t) dx$$

onde A é um conjunto compacto. Um exemplo não-trivial é fornecido pelas funções limitadas em frequência no sentido da transformada de Hankel, cujo núcleo se baseia na função de Bessel J_μ de ordem μ .

3. As diversas abordagens ao problema de interpolação e extrapolação em \mathbb{C}^n , com as quais esperamos ter aclarado as relações entre algumas das técnicas e linguagens em uso, neste trabalho e noutros.
4. As demonstrações alternativas do algoritmo de interpolação e extrapolação em \mathbb{C}^n .
5. O estabelecimento de condições necessárias e suficientes para a validade do algoritmo de interpolação e extrapolação em \mathbb{C}^n , num contexto bastante geral, usando a condição de Haar.
6. Os curiosos resultados sobre um certo grupo de permutações que comuta com a matriz de Fourier, as suas ligações simples com problemas elementares de teoria de números, e a caracterização do número dessas permutações em função da ordem da matriz de Fourier.

7. O tratamento unificado de problemas análogos de interpolação e extrapolação em L_2 e em \mathbb{C}^n , ou seja, quer considerando funções de variável real, quer considerando vectores de dimensão finita. Até aqui estes problemas eram tratados de forma distinta, usando-se em cada caso técnicas e linguagens diferentes.
8. A perspectiva dada ao problema da reconstrução possibilita a utilização de algoritmos de dimensionalidade mínima, determinada pelo número de incógnitas do problema, com matrizes hermíticas e definidas positivamente. Por seu lado, a perspectiva tradicional conduz a algoritmos de dimensionalidade em geral muito maior, com matrizes de iteração singulares e assimétricas, obviamente mais difíceis de estudar. O método simples que seguimos possibilita a aplicação de algoritmos comuns em diversos problemas de análise numérica, mas que tanto quanto sabemos não têm sido usados no caso dos problemas aqui estudados. Na nossa formulação o emprego desses métodos surge de uma maneira inteiramente natural.
9. Os algoritmos rápidos de interpolação e extrapolação que apresentamos, e que para o caso dos problemas em \mathbb{C}^n têm sem dúvida interesse prático. Entre os métodos estudados, o que parece reunir maior número de vantagens é baseado no método SOR, uma forma do algoritmo de Gauss-Seidel modificada pela introdução de um parâmetro de relaxação. Com este algoritmo obtêm-se taxas de convergência assintóticas bastante mais elevadas do que as atingíveis com as técnicas mais habituais. Como veremos, o erro obtido após poucas dezenas de iterações deste algoritmo pode ser várias ordens de grandeza inferior ao que se obteria usando o método de projecção alternada.
10. A abordagem dos problemas de extrapolação e interpolação em L_2 , segundo uma perspectiva semelhante à seguida para o caso de vectores de amostras de funções de L_2 ou de vectores de \mathbb{C}^n . Como consequência, surge-nos a possibilidade de generalização do algoritmo de Papoulis-Gerchberg em novas e mais gerais direcções.
11. A unificação obtida mediante a formulação abstracta do problema geral de reconstrução, e que possibilita a primeira abordagem sistemática e unificada destas questões em espaços de Banach de dimensão finita e infinita. Isto é conseguido em sintonia com os métodos seguidos ao longo do trabalho, mas aplicando, por exemplo, a teoria de Riesz-Schauder para equações funcionais com operadores compactos.

Resultados originais

Com exclusão de certos teoremas fundamentais e bem conhecidos, que dispensam atribuição explícita, todos os resultados incluídos neste trabalho são originais, no sentido de terem sido obtidos de modo independente pelo autor.

Acreditamos ainda que esses mesmos resultados são inéditos, no sentido de não existirem na bibliografia indicada ou noutros trabalhos de que temos conhecimento.

Existem duas excepções, que são explicitamente indicadas. A primeira dessas excepções é o resultado devido a C.-Y. Chao sobre o grupo de permutações que comuta com a matriz de Fourier. A segunda é a sugestão de J. L. Brown, Jr., acerca da possibilidade de utilização do teorema de Kramer para demonstração de um resultado de amostragem para polinómios trigonométricos.

As excepções restantes são constituídas exclusivamente por trabalhos nossos, que enumeramos na secção seguinte.

Partes deste trabalho publicadas ou a publicar

Alguns dos resultados que constam do presente trabalho foram já publicados ou submetidos para publicação, como se infere das referências bibliográficas que indicamos.

Os resultados contidos no segundo capítulo, sobre séries de amostragem incompletas nos sentidos clássico e de Kramer, constam do trabalho Ferreira (1992b).

Alguns dos assuntos estudados no terceiro capítulo foram também já publicados ou submetidos para publicação. Em Ferreira (1992c) e Ferreira (1992a) aplicamos alguns dos algoritmos estudados a problemas de reconstrução de sinal electrocardiográfico. O nosso interesse por estes assuntos começou com Ferreira (1988), onde usámos um algoritmo de reconstrução distinto dos que aqui se estudam para reconstrução de sinais electroencefalográficos. Recentemente, submetemos para publicação um trabalho Ferreira (1994b) que contém uma análise detalhada da convergência desse algoritmo, aliás equivalente ao algoritmo discreto de Papoulis-Gerchberg com relaxação. A análise aplica-se em grande parte ao método iterativo obtido por aproximações sucessivas estudado no terceiro capítulo. Temos ainda submetido para publicação um trabalho Ferreira (1994a) onde caracterizamos o grupo de permutações que comuta com a matriz de Fourier, e um outro Ferreira (1994c) onde descrevemos os algoritmos iterativos rápidos e o algoritmo não-iterativo propostos no terceiro capítulo.

O trabalho Ferreira (1993) contém uma descrição preliminar das técnicas de partionamento que podem ser usadas para melhorar a convergência dos (já de si rápidos) algoritmos descritos em Ferreira (1994c).

Os resultados contidos nos últimos capítulos deste trabalho não foram ainda publicados, com excepção de um resumo Ferreira (1992d) da teoria unificada de reconstrução que consta do quinto capítulo.

Organização

Esta tese escapa em pouco à organização tradicional, mas o suficiente para entendermos que são pertinentes os seguintes esclarecimentos relativos a algumas das opções tomadas.

Para maior facilidade de consulta e para explicar a notação que adoptámos apresentamos no primeiro capítulo um resumo dos conceitos e resultados mais frequentemente usados neste trabalho. O segundo, terceiro e quarto capítulos abordam casos particulares do problema geral de reconstrução. O problema geral é tratado no quinto capítulo. O sexto e último capítulo contém conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Foi deliberadamente que remetemos para o final o tratamento do problema mais geral, e através do qual se consegue a unificação dos resultados apresentados. A justificação é semelhante à que deu P. J. Davis no prefácio do seu livro Davis (1963) sobre interpolação e extrapolação:

“(...) I have learned that though mathematics proceeds from false starts and bungling, it is presented backwards, as a *fait accompli*. This may provide clean copy and heighten the dramatic effect, but it taxes the understanding.”

Em nossa opinião, a compreensão de um conjunto de resultados teóricos é grandemente facilitada se a sua exposição for precedida de exemplos menos gerais e menos abstractos. No mínimo, tais casos particulares ilustrarão a utilidade e facilitarão a compreensão da teoria geral. Frequentemente, transcendem o papel de mera ilustração da teoria, indo ao ponto de a *sugerir*. A ordem pela qual dispusemos os resultados que constam do presente trabalho é uma consequência deste pressuposto.

Não existe nenhum capítulo exclusivamente dedicado a síntese bibliográfica. Dada a natureza dos assuntos tratados, uma revisão sistemática dos resultados conhecidos conduziria a extensíssimas listas de referências, que teriam de abranger vários tópicos e especialidades, incluindo a geofísica, a óptica, o processamento de sinal e de imagem, a teoria da comunicação, a estimação espectral, o controlo, a teoria que estuda os chamados problemas inversos, e tantos outros exemplos.

Para além dos problemas de acessibilidade à vastíssima quantidade de publicações relevantes, seria impossível tratar muitos desses assuntos de forma menos que superficial, e, de qualquer modo, o resultado final seria parcial e desigualmente útil a quem tivesse interesses mais específicos. Cremos ainda que a relevância de tal estudo seria apenas relativa, uma vez que a nossa metodologia se afasta consideravelmente das que são utilizadas nos trabalhos do género que existem na bibliografia. Estamos ainda assim honestamente convictos de que os trabalhos que citamos são, em número e em importância, suficientes para dar ao não-especialista um panorama razoavelmente completo da área em que este trabalho se insere.

Incluimos no final de cada capítulo uma secção de notas. Nela damos conta das relações existentes entre os assuntos que virão a lume e outros, sempre que for inoportuno fazê-lo no corpo do texto; fornecemos referências bibliográficas suplementares ou complementares; e prestamos alguns esclarecimentos históricos que nos parecem pertinentes.

Inclui-se, claro está, uma lista das obras referidas no corpo do texto no final do trabalho. Está ordenada alfabeticamente com base no último nome do primeiro autor, e cronologicamente nos casos em que existem várias obras do mesmo autor.

Meios utilizados

Este trabalho foi escrito e composto pelo autor utilizando o sistema de composição \LaTeX . A lista de referências bibliográficas foi gerada automaticamente pelo programa \BIBTeX , usando definições de formatação escritas pelo autor.

Todos os programas de apoio que mencionaremos foram desenvolvidos pelo autor sob o sistema de operação **Unix**, utilizando as linguagens de programação **C**, **C++** e **PostScript**.

As figuras incluídas neste trabalho são programas escritos em **PostScript**. Estes programas são gerados por um outro, escrito em **C**, a partir do ficheiro ou ficheiros contendo os dados que se querem representar, e de um cabeçalho constituído por um conjunto de funções escritas em **PostScript**.

Todos os algoritmos mencionados foram testados pelo autor, utilizando programas desenvolvidos para o efeito, escritos em **C** e/ou **C++**, e compilados com o compilador integrado de **C**, **C++** e **Objective-C**, versão 2.1, da *Free Software Foundation*, escrito por Richard Stallman, Michael Tiemann e muitos outros contribuidores. Alguns dos programas desenvolvidos em **C++** usam classes da biblioteca de **C++** versão 2.0, escrita por Doug Lea e outros contribuidores.

Certos algoritmos de cálculo, particularmente os que dizem respeito a matrizes, baseiam-se em Press et al. (1988). Para utilização em **C++** os algoritmos foram encapsulados numa classe **Matrix**, que utiliza outra classe **MatTmp** para ultrapassar os problemas de gestão de memória habituais em aplicações deste tipo.

O compilador de **C++** mencionado reconhece já o mecanismo `template` previsto na última versão da linguagem **C++**. Antes disso, a inexistência de tal mecanismo foi contornada por um método de substituição textual automática, comandado das **Makefiles**.

Todos os algoritmos de reconstrução mencionados, bem como outros de que não falamos aqui, foram incorporados num programa único, escrito em **C**, que oferece a possibilidade de explorar e comparar interactivamente os diversos algoritmos.

A extensão total do conjunto de programas de suporte que foram realizados ascende a mais de 30 000 linhas de código.

Capítulo 1

Preliminares

Utilizaremos notação comum sempre que possível. Fazemos aqui um sumário da terminologia e conceitos mais utilizados apenas porque algumas das convenções que adoptámos são pouco divulgadas em trabalhos de engenharia apesar de perfeitamente rotineiras em certas áreas da matemática.

A notação $f(x) = O(g(x))$ significa que existe um $A > 0$ tal que $|f(x)| < A g(x)$, para valores de x suficientemente próximos de um certo limite (normalmente infinito). Por outro lado, $f(x) = o(g(x))$ significa $f(x)/g(x) \rightarrow 0$, com as mesmas considerações.

Representamos a unidade imaginária por j , e utilizamos o asterisco para designar complexo conjugado, como em z^* . Empregamos o termo *mensurável* como sinónimo de *mensurável relativamente à medida de Lebesgue*. O fim de uma demonstração ou argumento é indicado pelo símbolo ■.

1.1 Espaços de dimensão finita

Por δ_{ij} designamos o *símbolo de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Por \mathbb{C}^n designamos o espaço complexo de dimensão n , adoptando a norma e o produto interno habituais.

Chamaremos *sequências* de comprimento ou duração n aos vectores complexos $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, com componentes, ou amostras, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Assumiremos sempre que a dimensão das sequências mencionadas é n , excepto se o contrário for explicitamente indicado.

Interpretaremos os elementos de \mathbb{C}^n como séries temporais finitas, isto é, como sequências x_i em que o índice i se associa com a grandeza *tempo*.

Definimos a transformada discreta de Fourier (DFT) de \mathbf{x} , que designamos por $\hat{\mathbf{x}}$,

como o vector definido por

$$\hat{x}_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{n}mk}. \quad (1.1)$$

Todas as matrizes consideradas serão definidas sobre os complexos \mathbb{C} . Chamamos matriz de Fourier à matriz \mathbf{F} com componentes F_{ik} dadas por

$$F_{ik} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{j\frac{2\pi}{n}ik}.$$

A matriz \mathbf{F} é unitária, pelo que a DFT inversa (IDFT) se pode exprimir por

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k e^{j\frac{2\pi}{n}mk}. \quad (1.2)$$

A multiplicação da matriz de Fourier por um vector \mathbf{x} resulta evidentemente na transformada de Fourier discreta desse vector. Associando com o índice i em x_i a noção de tempo, é natural associar com o índice da sua transformada de Fourier a noção de frequência.

Muitas vezes, torna-se mais cómodo verificar relações entre vectores de interesse considerando não os próprios vectores mas as respectivas DFTs. Diremos que tais relações se situam no *domínio da frequência*. Matematicamente, o termo designa apenas um sistema coordenado em \mathbb{C}^n distinto do sistema habitual, mas perfeitamente equivalente, e cuja base de vectores é constituída pelas DFTs dos vectores base do espaço inicial, o qual, normalmente, se designa por *domínio do tempo*.

Seja \mathbf{M} uma matriz de dimensão $n \times n$ com valores próprios

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Designamos por

$$\mathbf{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

a submatriz $k \times k$ de \mathbf{M} obtida por supressão de todas as linhas e colunas de \mathbf{M} com excepção das linhas e colunas i_1, i_2, \dots, i_k . Seja $\mathbf{S} = \mathbf{M}_{1,2,\dots,n-1}$ a submatriz que se obtém por supressão da última linha e coluna de \mathbf{M} . Designemos os seus valores próprios por

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}.$$

Através do *teorema da separação* Courant e Hilbert (1953) estabelecem-se as seguintes desigualdades de *entrelaçamento*

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Este resultado pode ser generalizado para qualquer submatriz, não necessariamente de ordem $n-1$, imersível em \mathbf{M} . Na verdade, existem resultados análogos, válidos

sob condições muito mais gerais, se os conceitos de *imersão* e *entrelaçamento* forem adequadamente definidos. O teorema seguinte é, no entanto, suficiente para os nossos fins.

Sejam \mathbf{U} e \mathbf{V} duas matrizes. Diremos que \mathbf{U} é *imersível* em \mathbf{V} se e só se existir uma matriz de permutação \mathbf{P} tal que \mathbf{U} seja uma submatriz principal de \mathbf{PVP}^{-1} .

Isto significa que quando \mathbf{U} é imersível em \mathbf{V} é possível, reordenando as linhas e colunas correspondentes de \mathbf{V} , obter uma matriz da qual \mathbf{U} resulta por supressão das últimas p linhas e colunas.

Seja \mathbf{U} uma matriz imersível em \mathbf{V} . Então, os valores próprios de \mathbf{U} *separam* os de \mathbf{V} . Veja-se, por exemplo, Horn e Johnson (1990), Courant e Hilbert (1953) ou Householder (1975).

1.2 Espaços de dimensão infinita

Pela notação $C[a, b]$ ou $C(I)$ designamos o espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$ ou no conjunto I , respectivamente, com a norma

$$\|f\|_c = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{ou} \quad \|f\|_c = \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

a que às vezes se chama a norma da convergência uniforme.

Seja S um subconjunto mensurável de \mathbb{R} . Designamos por $L_p(S)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis f de uma variável real, com valores reais ou complexos, e tais que $|f(t)|^p$, com $p \geq 1$, é integrável no sentido de Lebesgue sobre S . Para aligeirar a escrita, escrevemos L_1 e L_2 em vez de $L_1(-\infty, +\infty)$ e $L_2(-\infty, +\infty)$, respectivamente. Usamos também a notação L_∞ com o significado habitual, ou seja, como designação do conjunto das funções mensuráveis f tais que

$$\text{ess sup}_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| < \infty.$$

A identificação da variável independente real com a grandeza *tempo* e a sua representação pela letra t são habituais no contexto deste trabalho. Quando nos referirmos a funções de variável complexa designaremos a variável independente pela letra z .

Os espaços L_p são na verdade espaços de Banach, relativamente às normas

$$\|f(t)\|_p = \begin{cases} \left| \int_S |f(t)|^p dt \right|^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in S} |f(x)| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

O caso especial $p = 2$ é particularmente importante. O espaço L_2 é um espaço de Hilbert separável com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt.$$

Designamos pelo símbolo $\|f\|$ a norma L_2 de f , $\|f\|_2$, isto é,

$$\|f\| = +\sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = +\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

Se f e g são funções de L_2 é válida a desigualdade de Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

muitas vezes escrita na forma

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt.$$

A desigualdade de Schwarz é um caso particular da desigualdade de Hölder. Esta, por sua vez, estabelece o seguinte. Se $f \in L_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) e $g \in L_q$, com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$fg \in L_1$ e tem-se

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lembramos que se define $q = \infty$ quando p é igual a 1, devendo então interpretar-se adequadamente a norma L_∞ . Dois números p e q relacionados desta maneira são chamados *expoentes conjugados*. Para $1 < p < \infty$ a desigualdade de Hölder pode escrever-se na forma

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right|^{1/p} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^q dt \right|^{1/q}.$$

A transformada de Fourier \hat{f} de f , definida por

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.3)$$

existe no sentido de Plancherel se $f \in L_2$, sendo válido o integral de inversão

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.4)$$

A existência de (1.3) e (1.4) deve ser entendida no sentido da convergência na norma de L_2 . Veja-se, por exemplo, Butzer e Nessel (1971) ou Chandrasekharan (1989), onde são dadas demonstrações do clássico teorema de Plancherel sobre a transformação de Fourier em L_2 .

A transformada de Fourier é uma isometria definida em L_2 , sendo válida a igualdade de Parseval

$$\|f(t)\| = \|\hat{f}(\omega)\|. \quad (1.5)$$

Alternativamente,

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle. \quad (1.6)$$

Representamos por ℓ_p os espaços de vectores v de dimensão infinita, definidos no conjunto dos complexos \mathbb{C} , e tais que

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |v_i|^p < \infty.$$

A norma de ℓ_p é definida por

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |v_i|^p \right|^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{-\infty < i < +\infty} |v_i| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Para simplificar a notação usamos também o símbolo $\|v\|$ para designar a norma de v em ℓ_2 , $\|v\|_2$. A desigualdade de Hölder continua a ser válida, tendo-se, como para o caso dos espaços L_p e L_q ,

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q,$$

ou, se $1 < p < \infty$,

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^p \right|^{1/p} \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|^q \right|^{1/q}.$$

Claro que $a \in \ell_p$, $b \in \ell_q$ e p e q são expoentes conjugados, pelo que $ab \in \ell_1$.

Julgamos que do facto de usarmos os mesmos símbolos para representar as normas de ℓ_p e L_p não resultará confusão, já que será sempre fácil decidir qual das duas normas é a apropriada a partir do contexto em que se encontra o símbolo.

É conveniente esclarecer desde já que a necessidade de introdução dos espaços ℓ_p surgirá neste trabalho como consequência do estudo de problemas ditos de amostragem, e que conduzem à consideração de conjuntos do tipo

$$\mathbf{f} = \{f(0), f(T), f(-T), f(2T), f(-2T), \dots\},$$

que se podem interpretar como vectores de dimensão infinita. Estaremos particularmente interessados no caso $p = 2$.

A cada número $f(kT)$ é habitual chamar *amostra* de f . As componentes do vector \mathbf{f} serão identificadas com os valores assumidos por f para certos valores de t , normalmente formando uma sequência ordenada $t_k < t_{k+1}$. Isto explica a denominação alternativa de *sequências*, pela qual frequentemente se designam os elementos dos espaços ℓ_p na literatura de engenharia.

1.3 O conceito de limitação em frequência

O conceito de *função limitada em frequência* surge muitas vezes em engenharia. Em termos gerais, diz-se que uma função f é limitada em frequência se puder ser representada por um operador integral linear como

$$f(t) = \int_A K(x, t)g(x) dx,$$

onde A é um conjunto compacto, a que muitas vezes se chama *banda* de f . Se A for da forma $[0, a]$ ou $[-a, a]$ diz-se que f é do tipo *passa-baixo*, enquanto que se $A = [a, a + b]$ ou $A = [-a - b, -a] \cup [a, a + b]$, com a e b positivos, f é do tipo *passa-banda*.

Variando o núcleo K e impondo condições apropriadas a g podem obter-se diversos espaços de funções limitadas em frequência.

A classe de funções limitadas em frequência que mais importância tem ao nível das aplicações obtém-se tomando para $K(x, t)$ o núcleo da transformada de Fourier. Mais precisamente, diremos que $f \in B_2(\sigma)$ se $f \in L_2$ e se a sua transformada de Fourier se anular em quase todos os pontos fora de $[-\sigma, +\sigma]$. Nesse caso,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.7)$$

Este é o caso paradigmático de limitação em frequência, e que deu origem ao termo. Tomando para K qualquer outra função que não esta deve entender-se o termo *frequência* num sentido generalizado. A classe de funções limitadas em frequência no sentido da transformação de Hankel, caracterizada por um núcleo da forma $\sqrt{xt}J_\mu(xt)$, onde J_μ designa a função de Bessel de ordem μ , constitui um exemplo bastante comum.

Exemplo 1.3.1 A função $\sin(\alpha t)/t$ pertence a $B_2(\sigma)$ para $-\sigma \leq \alpha \leq \sigma$.

Na verdade, a função $\sqrt{2/\pi} \sin(\alpha t)/t$ é a transformada inversa de Fourier da função

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| < \alpha, \\ 0 & \text{se } |\omega| > \alpha, \end{cases}$$

como se pode facilmente verificar. É habitual utilizar a notação $\text{sinc } x$ para a função

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Nesta notação a função do exemplo anterior é dada por $\sigma \sqrt{2/\pi} \text{sinc}(\alpha t/\pi)$.

Paley e Wiener estabeleceram num teorema clássico a equivalência entre o conjunto das funções inteiras de tipo exponencial pertencentes a L_2 sobre a recta real e as

funções que são transformadas inversas de Fourier de funções com suporte compacto Boas (1954), Rudin (1987).

Recorrendo à igualdade de Parseval é simples estabelecer que $B_2(\sigma)$ é um subespaço *fechado* de L_2 . De facto, sendo f_n um conjunto de funções tais que $f_n \in B_2(\sigma)$ e $f_n \rightarrow f$ na norma de L_2 , a sequência das respectivas transformadas de Fourier \hat{f}_n convergirá para \hat{f} pela igualdade de Parseval. Como $\hat{f}_n = 0$ em quase todos os pontos fora de $[-\sigma, +\sigma]$ o mesmo se passará com \hat{f} , o que equivale a afirmar que $f \in B_2(\sigma)$.

Designaremos ainda por $B_2^n(\sigma)$ o subespaço fechado de $B_2(\sigma)$ que se obtém combinando linearmente as primeiras n funções esferoidais prolatas Landau e Pollak (1961); Slepian e Pollak (1961).

É uma consequência imediata da desigualdade de Schwarz que as funções f pertencentes a $B_2(\sigma)$ são uniformemente limitadas. Na verdade, partindo de (1.7), tem-se

$$|f(t)|^2 \leq \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\sigma}^{-\sigma} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

o que implica

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t)| \leq \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f\|.$$

Em particular, qualquer sucessão de funções f_n de $B_2(\sigma)$ que seja convergente na norma de L_2 é uniformemente convergente. De facto, sendo $f \in B_2(\sigma)$ o seu limite, teremos, usando os resultados anteriores,

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t) - f_n(t)| \leq \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f - f_n\|,$$

donde se pode facilmente concluir que a convergência é uniforme.

Diremos que $f \in B_1(\sigma)$ se $f \in L_1$ e se a sua transformada de Fourier se anular em quase todos os pontos fora de $[-\sigma, +\sigma]$.

É claro que se $f \in B_1(\sigma)$ para um dado valor de σ , então $f \in B_1(\omega)$ para qualquer $\omega > \sigma$. O mesmo se passa para $f \in B_2(\sigma)$.

Os espaços $B_1(\sigma)$ e $B_2(\sigma)$ são casos particulares do espaço das funções f que são transformadas inversas de Fourier de distribuições de suporte compacto, contido em $[-\sigma, +\sigma]$, e que designaremos por $B(\sigma)$. O termo *função limitada em frequência* designará um elemento de qualquer um destes espaços.

Em \mathbb{C}^n , interessa muitas vezes considerar elementos \mathbf{x} tais que

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in A} \hat{x}_k e^{j \frac{2\pi}{n} ik},$$

onde A é um subconjunto de $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Por analogia com os casos discutidos anteriormente, chamaremos a tais vectores *limitados em frequência*.

1.4 Amostragem

Para certas classes de funções limitadas em frequência é válido o *teorema da amostragem*, ou teorema WKS Jerri (1977), assim chamado por constituir o resultado central de uma teoria para a qual contribuíram de maneira decisiva E. T. Whittaker, J. M. Whittaker, Kotelnikov e Shannon, entre outros. O teorema fundamental, que enunciaremos de seguida, formaliza a possibilidade de interpolação exacta da classe de funções $f \in L_2$ limitadas em frequência, a partir do vector \mathbf{f} constituído pelas amostras de f .

Teorema 1.4.1 (WKS) *Seja f uma função limitada em frequência, pertencente a $B_2(\sigma)$. Seja $T = \pi/\sigma$. Então,*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T} - n \right)$$

sendo a série absoluta e uniformemente convergente.

Consideraremos daqui em diante que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ significa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k.$$

É hábito chamar-se à quantidade $T = \pi/\sigma$ *período de amostragem*, e à grandeza $f_a = 1/T$ *frequência de amostragem*. Esta última é normalmente medida em Hertz quando se associa com t a grandeza *tempo*. Devido à definição de transformada de Fourier que adoptámos, no nosso caso tem mais interesse a quantidade $\omega_a = 2\pi/T$, medida em radianos por segundo, e que se pode interpretar como uma frequência de amostragem *angular*. Omitiremos a designação *angular* sempre que isso não causar confusão.

Chamaremos *frequência angular máxima* ou simplesmente *frequência máxima* de $f \in B_2(\sigma)$ a σ , subentendendo que f não pertence a $B_2(\omega)$ para nenhum $\omega < \sigma$.

O teorema da amostragem garante a possibilidade de interpolação exacta, em teoria, de qualquer função f cujo valor seja conhecido nos pontos $kT = k\pi/\sigma$. Por outras palavras, a interpolação será exacta se a frequência angular de amostragem ω_a não for inferior ao dobro da frequência máxima de f .

A convergência em norma da série cardinal

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T} - n \right) \quad (1.8)$$

para f pode ser facilmente estabelecida sob diversas hipóteses. Nalguns casos também não é difícil verificar que a convergência é de facto uniforme. Em $B_2(\sigma)$ isso é até

particularmente simples uma vez que a convergência em norma implica, como vimos, a convergência uniforme.

Partindo do teorema de Parseval para séries de Fourier Chandrasekharan (1989) pode estabelecer-se que o vector \mathbf{f} constituído pelas amostras $f(nT)$ de $f \in B_2(\sigma)$ pertence a ℓ_2 . Com base neste facto é fácil concluir que a convergência é absoluta, invocando a desigualdade de Schwarz. Pode proceder-se de maneira bastante semelhante no caso em que a transformada de Fourier de f pertence a L_p com $p > 1$, apelando para a desigualdade de Hölder.

Para uma introdução a algumas das questões relacionadas com o teorema de amostragem, segundo uma perspectiva de engenharia, veja-se Marks II (1991). Das muitas generalizações conhecidas deste teorema Jerri (1977) destacamos a que se deve a Kramer Kramer (1959), e que se pode enunciar como se segue.

Teorema 1.4.2 (Kramer) *Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t , e tal que $K(\omega, t)$, como função de ω , pertence a $L_2(I)$ para um certo intervalo I . Seja $\{t_n\}$ um conjunto ordenado de reais distintos, tal que o conjunto de funções $K(\omega, t_n)$ resulte completo e ortogonal em I . Então, para qualquer função f tal que*

$$f(t) = \int_I g(\omega) K(\omega, t) d\omega,$$

tem-se

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) S(t_n, t),$$

onde

$$S(t_n, t) = \frac{\int_I K(\omega, t) K^*(\omega, t_n) d\omega}{\int_I |K(\omega, t_n)|^2 d\omega}.$$

O termo *amostragem*, tal como usado até aqui, refere-se a um processo *instantâneo*, já que a única informação retida sobre a função f amostrada, excluindo o facto de ser limitada em frequência, é o seu valor para um conjunto de instantes t_i , os tempos de amostragem.

Existem outros sentidos para o termo. Algumas vezes, por exemplo, usa-se a mesma terminologia para designar um processo de amostragem em que o valor da função amostrada é retido numa certa vizinhança ϵ de cada t_i . Distinguiremos este processo de amostragem do primeiro designando-o por amostragem *contínua*.

1.5 Notação abreviada

Introduziremos agora uma notação para certas operações frequentemente usadas, e que se revelará mais conveniente em certos contextos. Dado um conjunto A , definimos o

operador T_A através de

$$(T_A g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Se preferirmos, $T_A g$ pode obter-se multiplicando g pela função $\alpha(x)$ *indicadora* de A , ou seja, pela função

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

que é igual à unidade para todos os elementos do domínio pertencentes a A , e zero noutros pontos.

Para simplificar a escrita, escreveremos T em vez de T_A quando possível. Pelo mesmo motivo, a função $(T_A g)(x)$ será abreviadamente designada por Tg . Na linguagem de processamento de sinal e teoria de sistemas, os operadores deste tipo são normalmente designados por *janelas*. Apesar disso, nós utilizaremos preferencialmente a designação *operador de truncatura*.

A transformação de Fourier, encarada como um operador definido em L_2 , será designada por F , pelo que

$$(Fx)(\omega) = \hat{x}(\omega).$$

Simplificaremos a notação para Fx quando disso não resultar nenhuma ambiguidade. O operador inverso será designado por F^{-1} . Entende-se, claro, que u e $F^{-1}Fu$ são funções equivalentes no sentido de L_2 , e que, portanto, não diferem uma da outra em mais do que um conjunto de medida nula.

Para um dado conjunto C , definimos o operador B_C como um operador de truncatura no domínio da frequência, isto é, $B_C g$ designará a função $F^{-1}T_C Fg$. É comum, para operadores deste tipo, a designação de *filtros*. A transformada de Fourier do sinal filtrado, $y = B_C g$, é

$$(Fy)(\omega) = \begin{cases} \hat{g}(\omega) & \text{se } \omega \in C, \\ 0 & \text{se } \omega \notin C. \end{cases}$$

Esta notação será também utilizada para designar as operações análogas em espaços de dimensão finita. Assim, a DFT de \mathbf{x} será designada por $\mathbf{F}\mathbf{x}$, identificando-se, sem qualquer perigo de confusão, o operador \mathbf{F} com a matriz de Fourier. De igual modo se definiriam significados precisos para as operações de truncatura e filtragem.

Falta apenas esclarecer, que, como é habitual, I designa o operador identidade, que se identifica com a matriz \mathbf{I} , de elementos δ_{jk} , para o caso de \mathbb{C}^n .

1.6 Notas

Omitiram-se, naturalmente, todas as noções elementares sobre medida e integral de Lebesgue. Para uma introdução moderna ao assunto, veja-se por exemplo Pitt (1987), onde são também estudadas várias aplicações. Para um tratamento mais completo veja-se Rudin

(1987). Em Wiener (1933) dá-se um resumo dos resultados clássicos sobre medida e integral de Lebesgue mais frequentemente necessários na prática. Várias obras de carácter geral, como Titchmarsh (1968), discutem de forma sucinta este assunto, imprescindível em qualquer estudo rigoroso da teoria das séries e, sobretudo, do integral de Fourier. Para um exposição avançada da teoria de medida veja-se Halmos (1951).

A teoria da transformada e da série de Fourier vem tratada em numerosas obras, tanto a nível introdutório como a nível avançado. De entre as obras que abordam em extensão esses tópicos, seguindo a perspectiva habitual em engenharia, salientamos Papoulis (1987). De entre as obras matematicamente mais avançadas citamos Chandrasekharan (1989), Wiener (1933) e Rudin (1987), onde se podem encontrar resultados importantes tanto em L_1 como em L_2 , o teorema de Plancherel, e outros tópicos de interesse. O tratado de Titchmarsh Titchmarsh (1948) é uma obra clássica e uma referência obrigatória sobre a teoria do integral de Fourier. Citamos ainda o tratado de Butzer e Nessel Butzer e Nessel (1971) onde são abordados de modo bastante geral diversos tópicos relacionados com análise harmónica, incluindo aplicações à teoria das equações diferenciais parciais e a teoria das transformadas de Fourier multidimensionais. É um complemento mais actualizado e de acordo com a perspectiva moderna do livro de Titchmarsh Titchmarsh (1948). O livro de Körner Körner (1988) é único no sentido de procurar transmitir ao leitor uma amostra das ideias e resultados mais notáveis da análise de Fourier, seja pela sua elegância, utilidade, ou alcance.

Acerca de limites e outras características das funções limitadas em frequência, veja-se, por exemplo, Papoulis (1987). A convergência uniforme de sucessões de funções de $B_2(\sigma)$ e o seu carácter uniformemente limitado são resultados elementares mas úteis que foram notados por vários autores. Veja-se por exemplo Landau (1960) e Landau e Miranker (1961). Note-se no entanto que $B_2(\sigma)$ é um espaço de Hilbert com *reproducing kernel*, e que em tais espaços a convergência forte implica convergência uniforme.

Sobre o teorema da amostragem, a referência básica é o artigo de Jerri Jerri (1977), que contém um resumo do estado da teoria e de muitas das suas aplicações até 1977. Posteriormente, apareceram outros artigos de revisão, como Butzer (1983) ou Higgins (1985), este último particularmente interessante para o estabelecimento da história da teoria, já que contém novas descobertas nesse sentido.

Para os leitores mais curiosos sobre a origem do teorema da amostragem aqui ficam alguns comentários. Existem repetidas referências na literatura que creditam Cauchy (1848) como um pioneiro da teoria. No entanto, Higgins em Higgins (1985) provou que tal afirmação é no mínimo duvidosa, e que os primeiros trabalhos em que existem referências mais claras a resultados do tipo do teorema da amostragem são algo posteriores. Contudo, a situação não está completamente esclarecida. Veja-se por exemplo Rawn (1989), que contém uma citação de uma afirmação de Cauchy, contida num trabalho datado de 1841. Butzer Butzer (1983) e Higgins colocam entre os pioneiros da teoria Borel (1898), Hadamard (1901), de la Vallée Poussin (1908), Steffensen (1914) e outros. Nalguns destes casos é mais correcto referir o resultado interpolatório em causa como próximo em espírito do teorema de amostragem actual. Noutros, pelo contrário, existem indesmentíveis semelhanças.

Curiosamente estes autores não citam o trabalho de H. Nyquist de 1928 Nyquist (1928). No entanto são bastante comuns na literatura as referências ao teorema da amostragem como o teorema de Nyquist, e o uso dos termos “frequência de Nyquist”, “ritmo de Nyquist”, etc.

No referido trabalho de 1928, Nyquist considera o problema da transmissão em telegrafia,

partindo de um modelo matemático discreto, cujas características principais se assemelham bastante às dos modelos actualmente em uso. Em primeiro lugar, Nyquist considera o eixo temporal dividido em unidades iguais, a que chama unidades temporais. Em segundo lugar, assume que a informação transmitida em cada unidade temporal corresponde a um número finito de alternativas. A telegrafia baseada no código Morse é um exemplo deste tipo, e que Nyquist considera em detalhe. Os sistemas de transmissão digital actuais podem também ser encarados como casos particulares deste modelo.

Nyquist introduz também o conceito de *velocidade de transmissão*, e que corresponde no caso da telegrafia em Morse ao número de *pontos* transmitidos por segundo. Assumindo que o sinal de telegrafia é finito e repetido periodicamente, Nyquist observa que existe proporcionalidade entre a velocidade de transmissão e a largura de banda necessária. Em seguida determina os coeficientes da série de Fourier do sinal telegráfico em função das unidades de informação transmitidas em cada unidade de tempo. Para o caso do telégrafo de corrente contínua a unidade de informação corresponde a uma de duas alternativas possíveis, conforme há ou não há transmissão de corrente eléctrica. Para outros casos mais gerais o número de opções pode ser maior. Note-se que o sistema considerado pode apropriadamente ser descrito como digital.

Um dos resultados deste trabalho é que é necessário e suficiente conhecer-se um número de componentes sinusoidais da série de Fourier do sinal telegráfico igual a metade do número de unidades temporais que constituem um período desse sinal. Para o caso em que a hipótese de periodicidade do sinal telegráfico f é abandonada em favor da hipótese $f \in L_1$, o que implica que f seja constituído por um número finito de símbolos com valor não nulo, é adiantado que é suficiente assumir uma largura de banda não superior à velocidade de transmissão.

A leitura do artigo de Nyquist revela alguns pontos interessantes. Em primeiro lugar o conceito de *limitação em frequência* não surge nem poderia surgir, já que as funções que correspondem aos sinais telegráficos periódicos podem ter um número infinito de componentes sinusoidais. No caso em que $f \in L_1$ é mesmo assumido que o intervalo em que o sinal telegráfico pode ser diferente de zero tem duração finita, o que imediatamente exclui a possibilidade da transformada de Fourier de f ter suporte compacto.

Provavelmente a principal inovação contida no trabalho é o estudo das relações entre a resposta do sistema de transmissão em regime permanente e a possibilidade de transmissão a um certo ritmo. Até então o desempenho dos sistemas era analisado com base na sua resposta transitória. Os termos “ritmo de Nyquist” ou “frequência de Nyquist” e a sua associação com a largura de banda de um sistema de transmissão têm provavelmente origem neste facto.

Um dos primeiros trabalhos onde a ideia principal do teorema de amostragem é introduzida de forma mais clara é da autoria de E. T. Whittaker (1915), e foi escrito em 1915. O seu filho J. M. Whittaker usava já uma terminologia semelhante à actual, por volta de 1920, introduzindo o termo *série cardinal*. Ambos parecem ter sido precedidos por F. J. W. Whipple, o qual, num manuscrito de 1910, se referia às funções soma de séries cardinais como *slowly swinging* Higgins (1985), um nome tão singular quanto sugestivo.

Mesmo em trabalhos de matemática dita pura é possível encontrar o teorema de amostragem e outros temas relacionados. Citamos apenas o trabalho de um dos mais importantes matemáticos deste século, G. H. Hardy, que sobre este assunto deixou, em 1941, resultados

de grande elegância e alcance. A chamada *fórmula de interpolação de Hardy* Chandrasekharan (1989) não é mais do que a série cardinal no plano complexo, para funções inteiras de tipo exponencial. É mais um exemplo de um resultado obtido no âmbito da matemática pura e que depois se vem a revelar de grande importância prática.

É irónico contrastar o interesse actual destes resultados de Hardy com a perspectiva que o autor tinha da sua obra, e que expôs admiravelmente em Hardy (1967).

“I have never done anything useful. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world.”

Remetemos o leitor interessado nas ligações entre certos tópicos comuns em engenharia e outras ciências aplicadas e tópicos normalmente classificados como matemática pura para o interessante artigo de Auslander e Tolimieri Auslander e Tolimieri (1979).

Na literatura de engenharia, temos, entre os pioneiros da teoria da amostragem, V. A. Kotelnikov (1933), H. Raabe (1939), I. Someya (1949) e C. Shannon (1949). Entre 1950 e 1977 apareceram pelo menos 250 artigos assinados por mais de 170 autores, focando diversas questões de alguma maneira ligadas ao teorema da amostragem.

Uma vez que utilizamos neste trabalho a generalização do teorema da amostragem que se deve a Kramer, por ele publicada em 1959 Kramer (1959), entendemos que devemos esclarecer que esta foi precedida por uma algo semelhante, mas menos geral, da autoria de P. Weiss. Este nunca publicou o resultado na sua total extensão, limitando-se a publicar um resumo do mesmo Weiss (1957) em 1957.

Existem, claro, generalizações do teorema para sinais multi-dimensionais, isto é, para funções de \mathbb{C}^n em \mathbb{C} . Para uma introdução recente à teoria, que inclui também esses aspectos, veja-se o livro de Marks Marks II (1991).

É possível generalizar o teorema de amostragem em várias direcções. O leitor interessado poderá encontrar alguns desses resultados mais gerais nos artigos de revisão já citados. A dissertação de Sousa Pinto Sousa Pinto (1983) contém tratamentos matematicamente rigorosos do teorema da amostragem em diversos espaços, incluindo generalizações que dependem da teoria das distribuições.

Capítulo 2

Séries de amostragem incompletas

Neste capítulo estudaremos séries de amostragem válidas para funções reais ou complexas de variável real. Prestaremos especial atenção às séries de amostragem parcialmente conhecidas, isto é, séries das quais se desconhece um número finito não nulo de coeficientes. Do ponto de vista das aplicações este problema tem considerável interesse, uma vez que é frequente desconhecer um subconjunto das amostras de um sinal.

2.1 Séries de amostragem clássicas incompletas

Diremos que um conjunto ordenado de reais $S = \{t_0, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots\}$ é um *conjunto amostrador* relativamente às funções

$$K(x, t_n) = e^{jxt_n} \tag{2.1}$$

se existir um real positivo σ tal que as funções $K(x, t_n) = e^{jxt_n}$ resultem completas e ortogonais em $(-\sigma, +\sigma)$.

Um conjunto amostrador $S = \{t_n\}$ relativamente às funções (2.1) *sobre-amostra* $f \in B_2(\sigma)$ se o conjunto de funções (2.1) for completo e ortogonal num intervalo que contenha $[-\sigma, +\sigma]$.

Como exemplo de um conjunto amostrador, citamos o conjunto \mathbb{Z} dos inteiros positivos e negativos, juntamente com zero. É bem conhecido que o conjunto de funções (2.1) com $t_n = n$ é completo e ortogonal em $(-\pi, \pi)$, deixando de o ser se algum dos n for omitido. Consequentemente, \mathbb{Z} sobre-amostra qualquer elemento de $B_2(\sigma)$ se $\sigma < \pi$.

É fácil verificar que o único conjunto amostrador que existe para o caso em que $K(x, t_n) = e^{jxt_n}$ fica determinado a menos de uma permutação por $t_n = nT$, onde $T = \pi/\sigma$. Para isso notemos que a ortogonalidade das funções $K(x, t_i)$ implica

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{jx(t_n - t_m)} dx = 0$$

para $n \neq m$, donde se conclui

$$\frac{\sin[\sigma(t_n - t_m)]}{t_n - t_m} = 0.$$

Logo $t_n - t_m$ é da forma kT , com k inteiro, sendo sempre possível renumerar os instantes de amostragem t_n de modo que $t_n = nT$.

A verdadeira razão de ser da introdução dos conceitos de conjunto amostrador e sobre-amostrador reside na hipótese de generalização desses conceitos para outras funções que não as exponenciais complexas (2.1).

Segundo o teorema de amostragem Jerri (1977) qualquer sinal $f \in B_2(\sigma)$ é determinado pelo conjunto das suas amostras equidistantes, tomadas de T em T , desde que $T \leq \pi/\sigma$.

Considerando $T = \pi/\Omega$, introduzamos o parâmetro

$$r = \frac{\sigma T}{\pi} = \frac{\sigma}{\Omega},$$

cujo valor não pode exceder o da unidade se quisermos que o teorema de amostragem se aplique.

É conhecido Marks II (1983) que quando $r < 1$ as amostras $\{f(nT)\}$ são redundantes, no sentido de que qualquer subconjunto de $\{f(nT)\}$ de cardinal finito pode ser determinado a partir das restantes amostras.

Neste capítulo daremos uma demonstração elementar da redundância referida, muito mais simples do que as existentes na bibliografia. Em seguida generalizaremos as nossas conclusões para séries de amostragem mais gerais, no sentido de Kramer. Para prosseguir nesta última direcção substituiremos a transformada de Fourier (1.4) por uma relação integral genérica, o que nos obrigará, como veremos, a generalizar de modo compatível o conceito de conjunto amostrador.

Veremos posteriormente que a perspectiva adoptada neste capítulo é susceptível de generalização noutras direcções. Uma das possibilidades é a extensão dos resultados que descreveremos a sinais multidimensionais, a qual não levanta quaisquer problemas. Seria por isso mais interessante estudar a possibilidade de aplicação de métodos análogos a problemas de reconstrução em espaços de dimensão finita, bem como a problemas de extrapolação, interpolação e amostragem para funções de $B_2(\sigma)$. Deixaremos esse estudo para capítulos posteriores.

2.1.1 A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ em ℓ_2

Considere-se o conjunto das amostras de uma função $f \in B_2(\sigma)$, tomadas a intervalos $T = \pi/\Omega$ inferiores a π/σ . Nestas circunstâncias é frequente dizer-se que existe *sobre-amostragem*.

É fácil ver que a série de amostragem é nesse caso equivalente a

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin[\sigma(t - kT)]}{\Omega(t - kT)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin[r\Omega(t - kT)]}{\Omega(t - kT)} \\
 &= r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin\left[\pi r\left(\frac{t}{T} - k\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)} \\
 &= r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \operatorname{sinc}\left[r\left(\frac{t}{T} - k\right)\right]. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Esta equação é válida para $t = nT$, o que conduz ao conjunto de equações

$$f(nT) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \operatorname{sinc}[r(n - k)],$$

o qual se pode representar por $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$, com o significado óbvio para os símbolos \mathbf{f} e \mathbf{B} .

2.1.2 Solução não-iterativa

Designemos por U um conjunto de cardinal finito, contendo todos os índices (distintos) das amostras de $f(t)$ que se desconhecem, e só esses:

$$U = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}.$$

Assumimos que os i_n estão dispostos por ordem crescente, de modo que a quantidade $i_n - i_1$ é proporcional à duração do menor intervalo que contém todas as amostras desconhecidas. Propomo-nos determinar o valor dessas amostras, supondo todas as outras conhecidas.

Podemos resolver este problema utilizando a equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ e a seguinte metodologia. Se tomarmos $t = mT$ em (2.2), e se nos limitarmos a valores de m que pertencem a U , obtemos

$$f(i_j T) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \operatorname{sinc}[r(i_j - k)] \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.3}$$

O processo de recuperação das amostras desconhecidas é agora claro. Suponha-se, por exemplo, que $U = \{0\}$. A amostra $f(0)$ pode ser determinada a partir de (2.3) já que $0 < r < 1$, e portanto

$$f(0) = \frac{r}{1 - r} \sum_{k \neq 0} f(kT) \operatorname{sinc} rk.$$

O caso geral pode ser tratado de maneira idêntica. Separando no somatório (2.3) os termos conhecidos dos desconhecidos, obtém-se um conjunto de n equações lineares

$$\begin{aligned} f(i_j T) &= r \sum_{k=1}^n f(i_k T) \operatorname{sinc}[r(i_k - i_j)] \\ &+ r \sum_{k \notin U} f(kT) \operatorname{sinc}[r(i_j - k)] \end{aligned}$$

válidas para $j = 1, 2, \dots, n$, as quais, aliás, podem escrever-se mais concisamente em forma matricial da seguinte maneira

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}. \quad (2.4)$$

Nesta equação \mathbf{u} é um vector coluna de dimensão n , constituído inteiramente pelas amostras desconhecidas, e \mathbf{h} é um vector coluna da mesma dimensão, cujas componentes são

$$h_j = r \sum_{k \notin U} f(kT) \operatorname{sinc}[r(i_j - k)],$$

e que depende apenas das amostras conhecidas. Por \mathbf{S} designámos a matriz $n \times n$ com componentes dadas por

$$S_{jk} = r \operatorname{sinc}[r(i_j - i_k)].$$

O vector procurado, \mathbf{u} , pode ser calculado resolvendo o sistema de equações

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{h}, \quad (2.5)$$

se a matriz $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ não for singular, o que adiante se demonstrará.

Apesar de uma afirmação incorrecta em contrário Marks II (1983), a matriz $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$ com componentes

$$A_{jk} = \delta_{jk} - r \operatorname{sinc}[r(i_j - i_k)]$$

não é Toeplitz, a não ser em circunstâncias especiais. Isto pode confirmar-se considerando o seguinte exemplo. Tome-se $U = \{0, 1, 3\}$. Então, \mathbf{A} será dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - r & -r \operatorname{sinc}(r) & -r \operatorname{sinc}(3r) \\ -r \operatorname{sinc}(r) & 1 - r & -r \operatorname{sinc}(2r) \\ -r \operatorname{sinc}(3r) & -r \operatorname{sinc}(2r) & 1 - r \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{sinc}(r) \neq \operatorname{sinc}(2r)$, a matriz não é Toeplitz. É fácil ver que \mathbf{A} será Toeplitz se e só se as amostras desconhecidas forem equidistantes, isto é,

$$i_k - i_m = h(k - m) \quad k, m = 1, 2, \dots, n,$$

onde h é um inteiro positivo.

O facto de não parecer existir nenhuma simetria especial da matriz \mathbf{A} que facilite a solução do sistema de equações (2.5) coloca algumas questões interessantes ao nível das aplicações. Para aprofundar o conhecimento dessas questões, e para avaliar o próprio carácter singular ou não-singular da matriz \mathbf{A} , tem interesse determinar limites para a localização dos seus valores próprios.

Como \mathbf{A} é invariante para translações do eixo temporal, podemos assumir sem perda de generalidade que $i_1 = 0$. Seja \mathbf{M} uma matriz quadrada, simétrica, Toeplitz, com elementos

$$M_{jk} = \delta_{jk} - r \operatorname{sinc}[r(j - k)],$$

onde j e k percorrem os inteiros de 0 a $i_n - 1$. Esta matriz surgiria na recuperação de i_n amostras consecutivas desconhecidas de f , começando com a amostra zero.

É claro que \mathbf{A} é imersível em \mathbf{M} , e logo os valores próprios de \mathbf{A} separam os de \mathbf{M} Courant e Hilbert (1953). Ora é conhecido Slepian (1978) que todos os valores próprios de

$$B_{jk} = r \operatorname{sinc}[r(j - k)]$$

pertencem ao intervalo $(0, 1)$. Note-se que se λ designar um valor próprio de \mathbf{B} , $1 - \lambda$ será um valor próprio de $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$. Por outro lado, se μ designar um valor próprio de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$, $1 - \mu$ será um valor próprio de \mathbf{S} . Logo os valores próprios de \mathbf{M} pertencerão também ao intervalo $(0, 1)$.

Como os valores próprios de \mathbf{PMP}^{-1} são os mesmos de \mathbf{M} , e como \mathbf{A} é uma submatriz principal de \mathbf{PMP}^{-1} , concluímos, pelas desigualdades de entrelaçamento, que os valores próprios de \mathbf{A} pertencem também a $(0, 1)$. Logo \mathbf{A} é uma matriz não-singular com raio espectral $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Chegámos assim ao seguinte resultado.

Teorema 2.1.1 *Seja U um conjunto de n inteiros distintos $U = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}$. Se \mathbf{S} designar a matriz quadrada de ordem n com elementos*

$$S_{jk} = r \operatorname{sinc}[r(i_j - i_k)],$$

e se $0 < r < 1$, então \mathbf{S} e, logo, $\mathbf{I} - \mathbf{S}$, serão matrizes não-singulares, definidas positivamente e com raios espectrais estritamente inferiores à unidade.

Veremos posteriormente que este teorema é um caso particular de um resultado semelhante mas que se aplica a funções limitadas em frequência num sentido mais geral.

Discutiremos também alguns métodos iterativos com características mais favoráveis para a solução do sistema de equações (2.5), uma vez que este pode ser bastante difícil de manejar devido à possibilidade de existência de valores próprios de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ arbitrariamente pequenos.

2.1.3 O teorema de unicidade

O resultado que se segue aparece como uma consequência directa do teorema 2.1.1. Só mais tarde poderemos apreciar o papel que ele desempenha numa abordagem unificada de certos problemas de reconstrução.

Teorema 2.1.2 *Considere-se o conjunto das amostras de uma função $f \in B_2(\sigma)$, tomadas a intervalos $T = \pi/\Omega$ inferiores a π/σ . Se um número finito de amostras de f forem desconhecidas, sendo todas as outras nulas, então f é a função nula.*

O teorema não é mais do que um problema especial de recuperação de amostras, do tipo que temos vindo a estudar, e que conduz à equação já conhecida

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}.$$

Neste caso as amostras conhecidas são todas nulas, pelo que o vector \mathbf{h} é o vector nulo. Como $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ é uma matriz não-singular, a única solução desta equação é a solução trivial. Logo todas as amostras da função f são nulas, e pelo teorema de amostragem conclui-se que f é a função nula. ■

Este resultado não se pode obviamente generalizar para o caso $r = 1$ em que $\Omega = \sigma$. Considere-se, por exemplo, $\text{sinc}(t/T)$.

A generalização incondicional é também impossível quando um número infinito de amostras é desconhecido, como se pode ver pelo seguinte exemplo. Tomemos $\sigma < \Omega < 2\sigma$, e consideremos a função

$$g(t) = \text{sinc}(t/2T),$$

onde $T = \pi/\Omega$ como habitualmente. Um cálculo simples mostra que g pertence a $B_2(\sigma)$ (ver exemplo 1.3.1) e que o parâmetro r pertence ao intervalo $(0.5, 1)$. Por outro lado as amostras $g(kT)$ são nulas para qualquer $k \neq 0$ tal que $k = \pm 2n$. No entanto g , obviamente, não é a função nula.

2.1.4 Soluções iterativas

O sistema de equações lineares (2.5) pode ser resolvido directamente ou recorrendo a métodos iterativos. É interessante notar que uma investigação da aplicabilidade a este caso de métodos iterativos conduz a algoritmos iterativos do tipo discutido na primeira das demonstrações dadas em Marks II (1983), sobre a redundância das amostras de funções sobre-amostradas.

Note-se que a própria natureza da equação (2.4) sugere a utilização do método das aproximações sucessivas. Este é baseado na iteração directa de (2.4) e conduz à iteração

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{S}\mathbf{u}_n + \mathbf{h}. \quad (2.6)$$

Dos resultados publicados em Slepian (1978) infere-se que os valores próprios de \mathbf{S} podem assumir valores muito próximos de 0 e 1, mesmo para matrizes de ordem relativamente moderada (por exemplo, ordem das dezenas). Isto significa que o raio espectral da matriz de iteração em (2.6) pode aproximar-se da unidade, o que implica uma taxa assintótica de convergência baixa. Veja-se, por exemplo, Varga (1962) ou Young (1971).

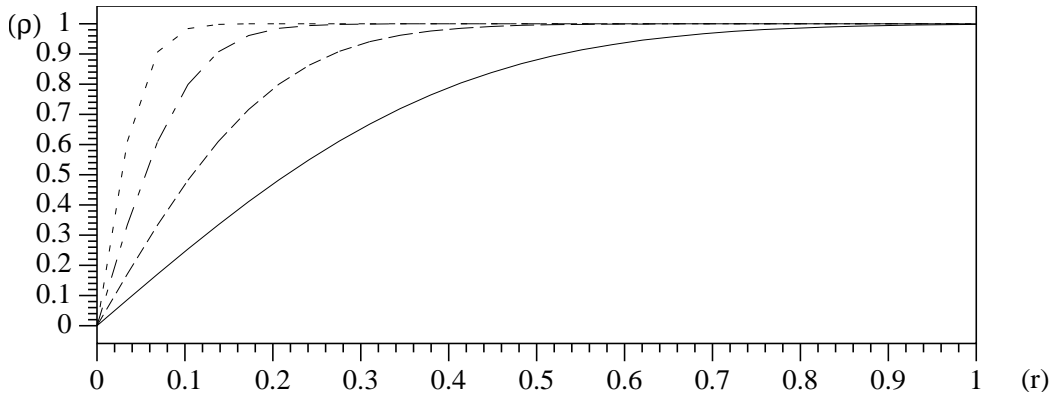


Figura 2.1: Raio espectral ρ versus factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 5, 10, 20 e 40.

Na figura 2.1 mostramos o raio espectral $\rho(\mathbf{S})$ da matriz \mathbf{S} , como função do factor de sobre-amostragem r , para várias ordens de \mathbf{S} . O crescimento de $\rho(\mathbf{S})$ em direcção à unidade pode na verdade ser bastante rápido.

Este facto torna difícil a utilização prática de métodos numéricos baseados nestes princípios, quer por causa da possível convergência lenta do método (2.6), quer devido aos erros causados pela incerteza no conhecimento das amostras conhecidas e sua propagação.

Somos assim levados a tentar substituir o método iterativo (2.6) por outro de convergência mais rápida, que simultaneamente convirja para a solução de (2.5). Apresentamos em seguida algumas das possibilidades.

2.1.4.1 Solução pelo método de Jacobi

Começamos pelo método de Jacobi. Consideremos o sistema de equações $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{h}$ e decomponhamos a matriz \mathbf{M} na diferença $\mathbf{D} - \mathbf{A}$. A matriz \mathbf{D} é definida por

$$D_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (2.7)$$

o que implica

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ -M_{ij} & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Substituindo $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ em $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{h}$ chega-se à equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{h},$$

assumindo que nenhum dos elementos da diagonal de \mathbf{M} era nulo. O método de Jacobi obtém-se por iteração desta equação, isto é, gera uma sequência de aproximações à solução de $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{h}$ definidas por

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}_n + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}.$$

Para abreviar a escrita escreveremos esta relação na forma

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}_1 \mathbf{u}_n + \mathbf{a}_1,$$

onde \mathbf{J}_1 e \mathbf{a}_1 designam, respectivamente, a matriz de iteração $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ e o vector $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}$ do método de Jacobi.

2.1.4.2 Solução pelo método JOR

O método de Jacobi com sobre-relaxação (JOR) pode obter-se por combinação linear das estimativas \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_{n+1} fornecidas pelo método de Jacobi. É definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mu \left(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}_n + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{h} \right) + (1 - \mu)\mathbf{u}_n \\ &= \left[(1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \right] \mathbf{u}_n + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}, \end{aligned}$$

onde μ é uma constante real.

Tal como no caso anterior daremos preferência à representação mais cómoda

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}_\mu \mathbf{u}_n + \mathbf{a}_\mu,$$

onde \mathbf{J}_μ e \mathbf{a}_μ designam, respectivamente, a matriz de iteração $[(1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}]$ e o vector $\mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}$ do método JOR com constante de relaxação μ .

Note-se que quando $\mu = 1$ o método JOR se reduz ao de Jacobi, pelo que a notação \mathbf{J}_1 e \mathbf{a}_1 para as quantidades que intervêm nos dois métodos não é ambígua.

2.1.4.3 Solução pelo método de Gauss-Seidel

Os métodos que vimos podem ser caracterizados pela natureza do termo de correcção, que conduz a *correcções simultâneas*, isto é, as componentes de cada nova aproximação à solução são calculadas em simultâneo, no sentido de que dependem apenas da aproximação então existente.

Como alternativas existem os métodos de Gauss-Seidel sem e com sobre-relaxação (SOR), que diferem destes pelo facto de as correcções serem aplicadas *sucessivamente*, isto é, cada componente do vector que vai conter a nova aproximação à solução é calculada usando o valor das componentes da nova aproximação porventura já conhecidas.

Mais precisamente, o método de Gauss-Seidel parte da decomposição $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, onde a matriz \mathbf{D} é definida por (2.7). A matriz \mathbf{L} é uma matriz estritamente triangular inferior, com diagonal nula, enquanto que \mathbf{U} é estritamente triangular superior, também com diagonal nula. É claro que estas condições chegam para as definir: \mathbf{L} e \mathbf{U} correspondem, respectivamente, ao negativo das partes triangular inferior e superior de \mathbf{M} .

Tomando a equação $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$ e fazendo $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ chega-se a

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{h}.$$

Se nenhum dos elementos da diagonal de \mathbf{M} for nulo podemos escrever

$$\mathbf{x} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{h}.$$

O método de Gauss-Seidel consiste na iteração

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_n + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{h},$$

que facilmente se verifica ser equivalente à iteração do método de Jacobi, mas usando a técnica das correcções sucessivas.

No caso do método de Gauss-Seidel empregaremos a notação mais compacta

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}_1\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_1.$$

É claro que $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ e $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{h}$.

2.1.4.4 Solução pelo método SOR

O método SOR baseia-se na combinação linear da estimativa \mathbf{x}_i dada pelo método de Gauss-Seidel com a estimativa $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$ definida por

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{U}\mathbf{x}_i + \mathbf{h},$$

o que resulta na iteração

$$\mathbf{x}_{i+1} = (1 - \mu)\mathbf{x}_i + \mu\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}.$$

Esta pode escrever-se como

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{G}_\mu\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_\mu,$$

onde \mathbf{G}_μ designa a matriz de iteração do método SOR,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\mu &= (\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})^{-1} [(1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}] \\ &= (\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1} [(1 - \mu)\mathbf{D} + \mu\mathbf{U}]. \end{aligned}$$

O vector \mathbf{b}_μ , por seu lado, é dado por

$$\mathbf{b}_\mu = \mu(\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h} = \mu(\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1}\mathbf{h}.$$

Uma vez mais chamamos a atenção para o facto de que o método SOR se reduz ao de Gauss-Seidel quando $\mu = 1$, pelo que não há ambiguidade na notação \mathbf{G}_1 e \mathbf{b}_1 para as quantidades que intervêm nos dois métodos.

2.1.5 Resumo dos resultados

Nos teoremas seguintes resumimos de forma precisa os resultados sobre reconstrução que acabámos de obter. Começamos pelo método não-iterativo.

Teorema 2.1.3 *Seja $U = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}$ um conjunto de n inteiros distintos, e seja \mathbf{S} a matriz quadrada de ordem n com elementos*

$$S_{jk} = r \operatorname{sinc} [r(i_j - i_k)].$$

Então, as amostras de qualquer função $f \in B_2(\sigma)$ cujos índices pertençam ao conjunto U e que tenham sido recolhidas com um espaçamento $T = \pi/\Omega$ tal que $r = \sigma/\Omega < 1$ podem determinar-se a partir das restantes amostras através de

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{h},$$

onde \mathbf{u} é o vector de dimensão n que contém todas as amostras desconhecidas, e \mathbf{h} é dado por

$$h_j = r \sum_{k \notin U} f(kT) \operatorname{sinc} [r(i_j - k)].$$

É possível obter aproximações para o vector de amostras desconhecidas utilizando um dos métodos iterativos mencionados no teorema que se segue.

Teorema 2.1.4 *Verificando-se as condições do teorema 2.1.3, os métodos iterativos seguintes definem uma sequência de aproximações \mathbf{u}_i convergente para \mathbf{u} .*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{S}\mathbf{u}_n + \mathbf{h} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{G}_1\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{G}_\mu\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_\mu \end{aligned}$$

O mesmo é verdade para o método

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}_1\mathbf{u}_n + \mathbf{a}_1$$

se, adicionalmente, $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{S}) < 2(1 - r)$. Se \mathbf{J}_1 for convergente então o método

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}_\mu\mathbf{u}_n + \mathbf{a}_\mu$$

converge se o menor valor próprio de \mathbf{J}_1 exceder $1 - 2/\mu$. Nestas condições tem-se para qualquer método

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u},$$

independentemente da aproximação inicial.

<i>Método</i>	<i>Matriz</i>	<i>Vector</i>
Jacobi	$\mathbf{J}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{a}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}$
JOR	$\mathbf{J}_\mu = (1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{a}_\mu = \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}$
Gauss-Seidel	$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$	$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{h}$
SOR	$\mathbf{G}_\mu = (\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1}[(1 - \mu)\mathbf{D} + \mu\mathbf{U}]$	$\mathbf{b}_\mu = \mu(\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1}\mathbf{h}$

Tabela 2.1: Matrizes e vectores das iterações de Jacobi, JOR, Gauss-Seidel e SOR.

As matrizes e vectores de iteração dos quatro últimos métodos referidos estão definidas, para facilitar a consulta, na tabela 2.1.

Não faremos um estudo detalhado da convergência destes métodos porque em termos práticos é impossível formar o vector \mathbf{h} que surge em (2.5), e que lembramos depender de um número infinito de amostras supostamente conhecidas. É claro que as limitações da instrumentação existente põem de lado tal hipótese. Veremos posteriormente como se pode contornar esta dificuldade prática e será então que detalharemos um pouco mais a análise. Concluiremos que a utilização destes algoritmos possibilita a obtenção de velocidades de convergência mais elevadas. Para detalhes sobre os métodos consulte-se Young (1971) ou Varga (1962).

Esboçamos em seguida uma demonstração do teorema. A convergência dos métodos de Gauss-Seidel e SOR pode ser estabelecida com toda a facilidade recorrendo ao teorema de Ostrowski-Reich Varga (1962). Ocupemo-nos por isso do método de Jacobi. É fácil verificar que a respectiva iteração é dada por

$$\mathbf{u}_{n+1} = \frac{1}{1-r}\mathbf{A}\mathbf{u}_n + \frac{1}{1-r}\mathbf{h},$$

uma vez que a matriz \mathbf{D} da decomposição $\mathbf{I} - \mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ se reduz a $(1-r)\mathbf{I}$.

Como $\mathbf{I} - \mathbf{S} = (1-r)\mathbf{I} - \mathbf{A}$, λ é um valor próprio de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ correspondente ao vector próprio \mathbf{v} se e só se $1-r-\lambda$ for um valor próprio de \mathbf{A} para o mesmo vector próprio.

A função $f(\lambda)$ que aplica um valor próprio λ de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ num valor próprio $f(\lambda)$ da matriz de iteração $\mathbf{J}_1 = \mathbf{A}/(1-r)$ do método de Jacobi é dada por $f(\lambda) = (1-r-\lambda)/(1-r)$. Note-se que decresce linearmente quando $\lambda \rightarrow 1$, tendo-se $f(1) = -r/(1-r)$. Recorde-se que $0 < r < 1$.

Calculando o valor de λ para o qual $f(1)$ atinge -1 obtém-se $\lambda = 2(1-r)$. Se o maior dos valores próprios de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ não exceder este valor é claro que o método será convergente. Em particular, o método será sempre convergente se $r > 1/2$.

Tendo analisado a questão da convergência do método de Jacobi, ocupemo-nos do método JOR. Como a matriz \mathbf{J}_μ do método JOR é dada por

$$\mathbf{J}_\mu = (1-\mu)\mathbf{I} - \mu\mathbf{J},$$

se λ for um valor próprio de \mathbf{J} , $g(\lambda) = 1 - \mu + \mu\lambda$ será um valor próprio de \mathbf{J}_μ . Isto permite estabelecer a convergência do método JOR se $0 < \mu < 1$ e se o método de

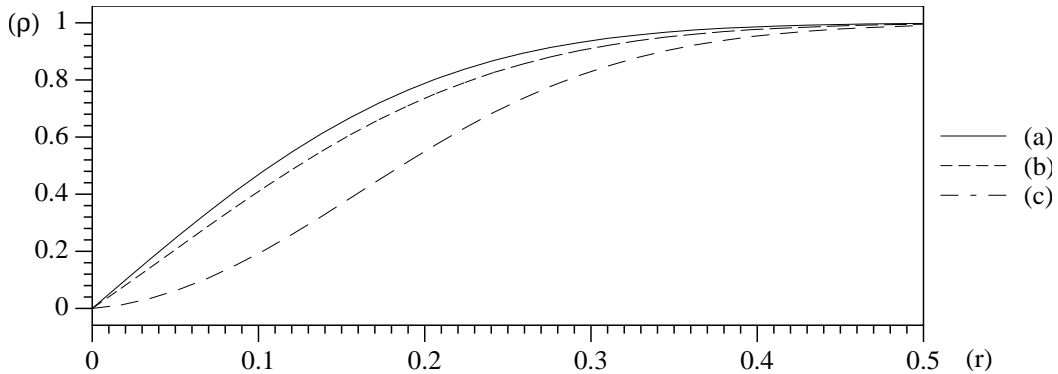


Figura 2.2: Raio espectral ρ versus factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 5 modificadas de acordo com os métodos (a) equação (2.6), (b) Jacobi, (c) Gauss-Seidel.

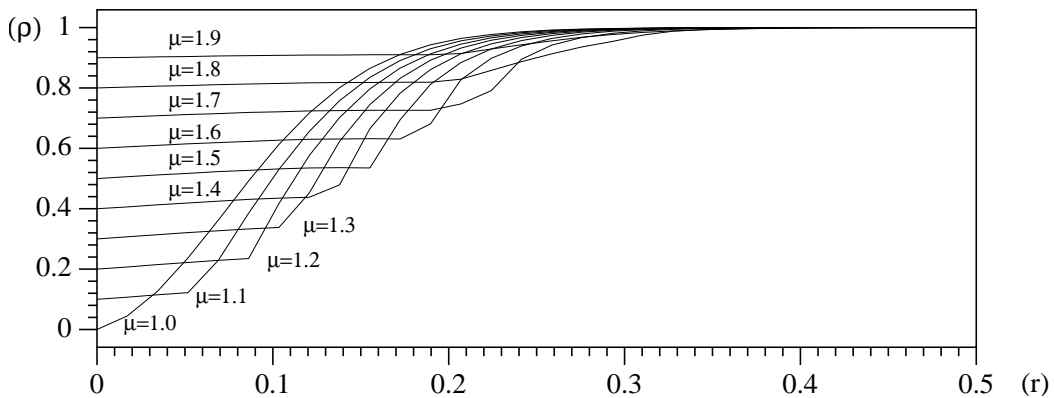


Figura 2.3: Raio espectral ρ versus factor de sobre-amostragem r para matrizes de reconstrução de ordem 10 modificadas de acordo com o método SOR, para vários valores do parâmetro μ .

Jacobi convergir. Não é difícil ver que a conclusão se mantém se $1 < \mu < 2$ desde que o menor dos valores próprio de \mathbf{J}_1 exceda $1 - 2/\mu$. Isto conclui a demonstração do teorema. ■

Na figura 2.2 mostramos a variação do raio espectral das matrizes de reconstrução \mathbf{S} , \mathbf{J}_1 e \mathbf{G}_1 , em função do factor de sobre-amostragem.

Na figura 2.3 é patente o efeito da variação de μ para o método SOR. Repare-se que à medida que o factor de sobre-amostragem r aumenta o valor de μ deve aumentar também para que a velocidade de convergência seja óptima. No entanto, se r é baixo, um aumento de μ pode até diminuir a velocidade de convergência do método.

2.2 Séries de amostragem generalizadas incompletas

As conclusões a que chegámos são susceptíveis de diversas generalizações. Iremos explorar uma dessas possibilidades considerando séries de amostragem generalizadas no sentido de Kramer. Para tal é necessário modificar os conceitos de conjunto amostrador e de sobre-amostragem de maneira compatível com o nosso fim.

Definição 2.2.1 (conjunto amostrador) *Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t tal que $K(\omega, t)$ como função de ω pertence a $L_2(I)$ para um certo conjunto I . Diremos que um conjunto ordenado de reais $\{t_n\}$ distintos é um conjunto amostrador relativamente às funções $K(\omega, t)$ se o conjunto de funções $\{K(x, t_i)\}$ for completo e ortogonal sobre um subconjunto de \mathbb{R} com medida positiva.*

Vale a pena notar que do teorema de Kramer nada se pode concluir sobre a dependência ou independência das amostras da função expandida, já que $S(t_i, t_j) = \delta_{ij}$. Devido a este facto, assumiremos daqui em diante que os conjuntos amostradores sobre-amostram as funções expandidas em série de amostragem, segundo o expresso na definição seguinte.

Definição 2.2.2 (sobre-amostragem) *Diremos que o conjunto amostrador $\{t_n\}$ sobre-amostra a função f dada por*

$$f(t) = \int_J g(\omega) K(\omega, t) d\omega$$

se o conjunto de funções $K(\omega, t_n)$ for completo e ortogonal sobre um conjunto I que estritamente contenha o suporte J de g .

Sob estas condições é possível demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t , tal que $K(\omega, t)$ como função de ω pertence a $L_2(I)$. Seja f uma função pertencente a L_2 , dada por*

$$f(t) = \int_J g(\omega) K(\omega, t) d\omega \quad (J \subset I) \quad (2.8)$$

sendo $g \in L_2(J)$ e a inclusão de J em I entendida no sentido estrito. Seja $\{t_n\}$ um conjunto amostrador sobre I , que sobre-amostra f . Então, se a função de t

$$\int_J |K(x, t)|^2 dx$$

for uniformemente limitada, temos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) S(t_n, t)$$

uniformemente em t , e onde

$$S(t_n, t) = \frac{\int_J K(\omega, t)K^*(\omega, t_n) d\omega}{\int_I |K(\omega, t_n)|^2 d\omega}.$$

Para demonstrar o teorema começamos por considerar a expansão de g em I segundo a série

$$g(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i K^*(x, t_i), \quad (2.9)$$

convergente na norma de L_2 . Recorde-se que isto significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |g(x) - g_n(x)|^2 dx = 0, \quad (2.10)$$

onde

$$g_n(x) = \sum_{i=-n}^n c_i K^*(x, t_i). \quad (2.11)$$

Dado um inteiro i qualquer, $K(x, t_i)$ é uma função de x pertencente a $L_2(I)$, pelo que o produto $g_n(x)K(x, t_i)$ pertencerá a $L_1(I)$ e

$$\int_I g_n(x)K(x, t_m) dx = \sum_{i=-n}^n c_i \int_I K^*(x, t_i)K(x, t_m) dx = c_m \int_I |K(x, t_m)|^2 dx. \quad (2.12)$$

Por aplicação da desigualdade de Schwarz conclui-se que

$$\left| \int_I [g(x) - g_n(x)]K(x, t_m) dx \right|^2 \leq \int_I |g(x) - g_n(x)|^2 dx \int_I |K(x, t_m)|^2 dx$$

o que implica, usando (2.10), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(x)K(x, t_m) dx = \int_I g(x)K(x, t_m) dx = f(t_m).$$

Logo

$$c_m = \frac{f(t_m)}{\int_I |K(x, t_m)|^2 dx},$$

usando (2.12). Substituindo este resultado em (2.11) obtemos

$$g_n(x) = \sum_{i=-n}^n \frac{f(t_i)K^*(x, t_i)}{\int_I |K(x, t_i)|^2 dx}.$$

Multiplicando por $K(x, t)$ e integrando sobre J obtemos

$$\int_J g_n(x)K(x, t) dx = \sum_{i=-n}^n f(t_i) \frac{\int_J K(x, t)K^*(x, t_i) dx}{\int_I |K(x, t_i)|^2 dx}.$$

Tomando o limite e justificando como no caso anterior obtemos

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(t_i)S(t_i, t),$$

no sentido da convergência na norma de L_2 .

Para provar que a convergência é uniforme nas condições do teorema, observe-se que

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \int_J g_n(x)K(x, t) dx \right|^2 &= \left| \int_J [g(x) - g_n(x)]K(x, t) dx \right|^2 \\ &\leq \int_J |g(x) - g_n(x)|^2 dx \int_J |K(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Se a função

$$\alpha(t) = \int_J |K(x, t)|^2 dx$$

for uniformemente limitada podemos escrever

$$\left| f(t) - \int_J g_n(x)K(x, t) dx \right|^2 \leq M \int_J |g(x) - g_n(x)|^2 dx$$

onde M é uma constante apropriada. Isto estabelece que

$$\int_J g_n(x)K(x, t) dx \rightarrow f(t)$$

uniformemente, já que $g_n(x) - g(x)$ tende para zero na norma de L_2 . ■

2.2.1 A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ generalizada em ℓ_2

Tomando $t = t_n$ na expansão dada no teorema 2.2.1 chega-se à equação

$$f(t_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_k)S(t_k, t_n),$$

a qual é da forma $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$, com os significados óbvios para \mathbf{f} e \mathbf{B} .

2.2.2 Solução não-iterativa

A interdependência das amostras de f é uma consequência da forma de $S(t_n, t)$, e a generalização dos resultados apresentados anteriormente é agora imediata. A única diferença é a substituição de $r \operatorname{sinc} [2\sigma(t_k - t_n)]$ por $S(t_k, t_n)$ na matriz \mathbf{A} .

No entanto, para que a recuperação das amostras seja possível, é necessário mostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$ é não-singular. O teorema seguinte permite-nos responder afirmativamente a esta questão, de um modo bastante geral.

Teorema 2.2.2 *Se as funções $K(x, t_i)$ forem ortonormais em I e analíticas, a matriz \mathbf{S} com elementos $S_{ij} = S(t_i, t_j)$ dados por*

$$S(t_i, t_j) = \frac{\int_J K(\omega, t_j) K^*(\omega, t_i) d\omega}{\int_I |K(\omega, t_i)|^2 d\omega}$$

é definida positiva, e todos os seus valores próprios são estritamente inferiores à unidade.

A forma quadrática $\mathbf{v}^H \mathbf{S} \mathbf{v}$ associada a \mathbf{S} é dada pela expressão

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j^* \int_J K(x, t_i) K^*(x, t_j) dx$$

a qual se pode facilmente reduzir a

$$\int_J \left| \sum_{i=1}^n v_i K(x, t_i) \right|^2 dx, \quad (2.13)$$

uma expressão claramente não-negativa. Nas condições do teorema pode inclusivamente mostrar-se que esta expressão é estritamente positiva. Para isso, repare-se que o seu anulamento em J implicaria, pela analiticidade das funções $K(x, t_i)$, o seu anulamento em I . Mas isso, por sua vez, implicaria

$$\sum_{i=1}^n v_i K(x, t_i) = 0,$$

para qualquer $x \in I$. É claro que isso compromete a independência linear das funções $K(x, t_i)$, bem como a sua ortonormalidade.

Tendo assim estabelecido o carácter definido positivo da matriz \mathbf{S} , investiguemos os seus valores próprios. Para isso, notemos que como I contém J em sentido estrito,

$$\mathbf{v}^H \mathbf{S} \mathbf{v} < \int_I \left| \sum_{i=1}^n v_i K(x, t_i) \right|^2 dx = \sum_{i=1}^n |v_i|^2.$$

Como \mathbf{S} é uma matriz hermitica, nenhum dos seus valores próprios pode exceder o valor máximo assumido pela forma quadrática $\mathbf{v}^H \mathbf{S} \mathbf{v}$ em $\|\mathbf{v}\| = 1$, pelo que o teorema está demonstrado. ■

Averiguemos agora um pouco mais profundamente o papel que a hipótese de analiticidade das funções $K(x, t_i)$ desempenha no estabelecimento da não-singularidade da matriz \mathbf{S} . Nesse sentido, apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.3 *Existem sistemas ortonormais e completos de funções $\{f_i(x)\}$, definidas sobre um conjunto I , tais que a matriz \mathbf{S} de ordem n com elementos*

$$S_{ij} = \int_J f_i(x) f_j^*(x) dx$$

é singular para um certo subconjunto próprio J de I .

Daremos um exemplo no qual intervém a base de Haar, um conjunto ortonormal de funções reais não analíticas $f_i(x)$ que é completo no intervalo $[0, 1]$. Como é bem conhecido, as funções f_i são seccionalmente constantes e anulam-se, para valores de i apropriados, em certos subintervalos de $[0, 1]$.

Tomemos para I o intervalo $[0, 1]$, e seja J um subintervalo de I sobre o qual uma das funções da base de Haar seja zero. Designemos essa função por f_k . A matriz \mathbf{S} de ordem $n > k$ é dada por

$$S_{ij} = \int_J f_i(x) f_j(x) dx, \quad (2.14)$$

Formemos um vector \mathbf{v} pertencente a \mathbb{C}^n , $n > k$, com componentes

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k, \end{cases}$$

e consideremos a forma quadrática $\mathbf{v}^H \mathbf{S} \mathbf{v}$, a qual é dada por

$$\int_J \left| \sum_{i=1}^n v_i f_i(x) \right|^2 dx = \int_J |f_k(x)|^2 dx,$$

e que obviamente se anula para esta escolha de \mathbf{v} , como pretendíamos demonstrar.

Podemos chegar-se à mesma conclusão de forma mais simples notando que o integral (2.14) se anula para todos os valores de i ou j iguais a k , isto é, $S_{ki} = S_{jk} = 0$, donde \mathbf{S} é singular. ■

Estas observações mostram que é de facto necessário impor algumas restrições às funções f para se conseguirem estabelecer resultados do tipo do teorema 2.2.2.

2.2.3 Um exemplo com a transformação de Hankel

A transformação de Hankel surge em muitos contextos nas ciências aplicadas e tem considerável importância teórica e prática. Ocorre de forma natural em problemas que incluam transformadas de Fourier bidimensionais de funções com simetria radial. Veja-se Papoulis (1987) ou Hochstadt (1973), por exemplo.

Designaremos por $J_\mu(x)$ a função de Bessel de ordem μ Spanier e Oldham (1987), utilizando a notação universalmente aceita.

Partindo do integral

$$\int_0^\alpha t J_\mu(at) J_\mu(bt) dt = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2} [J_\mu^2(a\alpha) - J_{\mu-1}(a\alpha) J_{\mu+1}(a\alpha)] & \text{se } a = b, \\ \frac{\alpha}{b^2 - a^2} [a J_\mu(b\alpha) J'_\mu(a\alpha) - b J_\mu(a\alpha) J'_\mu(b\alpha)] & \text{se } a \neq b, \end{cases}$$

tomando $\alpha = 1$ para simplificar, e supondo que a e b são zeros de $J_\mu(x)$ conclui-se que

$$\int_0^1 t J_\mu(at) J_\mu(bt) dt = \begin{cases} -\frac{1}{2} J_{\mu-1}(a) J_{\mu+1}(a) = \frac{[J'_\mu(a)]^2}{2} & \text{se } a = b, \\ 0 & \text{se } a \neq b. \end{cases}$$

Daqui se infere que as funções $\sqrt{x} J_\mu(z_k x)$ são um conjunto de funções ortogonais em $[0, 1]$, sendo z_k o k -ésimo zero de $J_\mu(x)$. É também conhecido Courant e Hilbert (1953) que o mesmo conjunto de funções é completo em $[0, 1]$. Note-se que

$$\int_0^1 t J_\mu(z_i t) J_\mu(z_k t) dt = \begin{cases} -\frac{1}{2} J_{\mu-1}(z_i) J_{\mu+1}(z_k) = \frac{[J'_\mu(z_i)]^2}{2} & \text{se } i = k, \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Considere-se o núcleo

$$K(x, t) = \sqrt{xt} J_\mu(xt),$$

e seja f a função

$$f(t) = \int_0^\sigma g(x) \sqrt{xt} J_\mu(xt) dx,$$

onde $0 < \sigma < 1$. Estamos obviamente em condições de fazer uso do teorema 2.2.1, já que os z_i são um conjunto sobre-amostrador para f (as funções $K(x, z_i)$ são um conjunto completo e ortogonal em $[0, 1]$). Isto justifica a expansão

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(z_i) S(z_i, t),$$

onde

$$S(z_k, t) = \frac{\int_0^\sigma K(x, t) K(x, z_k) dx}{\int_0^1 K^2(x, z_k) dx}$$

$$= \begin{cases} \frac{2t\sigma}{z_k [J'_\mu(z_k)]^2 (z_k^2 - t^2)} [tJ_\mu(z_k\sigma)J'_\mu(t\sigma) - z_kJ_\mu(t\sigma)J'_\mu(z_k\sigma)] & \text{se } t \neq z_k, \\ \frac{\sigma^2}{[J'_\mu(t)]^2} [J_\mu^2(t\sigma) - J_{\mu-1}(t\sigma)J_{\mu+1}(t\sigma)] & \text{se } t = z_k. \end{cases}$$

A matriz de reconstrução é dada por $S_{kj} = S(z_k, z_j)$, isto é,

$$S_{kj} = \begin{cases} \frac{2z_j\sigma}{z_k [J'_\mu(z_k)]^2 (z_k^2 - z_j^2)} [z_jJ_\mu(z_k\sigma)J'_\mu(z_j\sigma) - z_kJ_\mu(z_j\sigma)J'_\mu(z_k\sigma)] & \text{se } j \neq k, \\ \frac{\sigma^2}{[J'_\mu(z_k)]^2} [J_\mu^2(z_k\sigma) - J_{\mu-1}(z_k\sigma)J_{\mu+1}(z_k\sigma)] & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Remetemos o leitor interessado noutros exemplos de séries de amostragem generalizadas para as notas no final do capítulo, e para o artigo de Jerri Jerri (1977).

2.2.4 O teorema de unicidade

O teorema 2.1.2 pode ser generalizado de modo a incluir as séries de amostragem generalizadas que considerámos. A demonstração pode fazer-se com toda a facilidade seguindo as linhas de demonstração do teorema 2.1.2. Este resultado e outros do mesmo tipo ocuparão um lugar de certo relevo na teoria unificada de reconstrução que será tratada posteriormente, pelo que não nos dispensamos de esboçar a demonstração apesar das semelhanças com a anterior.

Teorema 2.2.4 *Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t . Suponhamos que $K(\omega, t)$, como função de ω apenas, pertence a $L_2(I)$ para qualquer t . Seja f uma função de L_2 tal que*

$$f(t) = \int_J g(\omega) K(\omega, t) d\omega, \quad (J \subset I)$$

para $g \in L_2(J)$, e J estritamente incluído em I . Se as funções $K(\omega, t_n)$ forem ortonormais, analíticas e completas em I , e se um número finito de amostras $f(t_i)$ de f forem desconhecidas sendo todas as outras nulas, f é a função nula.

Após considerações idênticas às que fizemos para a demonstração do teorema 2.1.2 chegamos à equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}.$$

onde o vector \mathbf{h} é o vector nulo, já que todas as amostras conhecidas são nulas. Devido à não-singularidade da matriz $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ a única solução desta equação é a solução trivial. Invocando o teorema 2.2.1 conclui-se que $f = 0$. ■

2.3 Nota sobre polinómios trigonométricos

A validade dos métodos de reconstrução que estudámos foi estabelecida apenas para certas classes de funções, mas pode estender-se a outras situações sem grandes dificuldades. Daremos aqui um exemplo simples mas de considerável importância prática, e que deixa antever as possibilidades de utilização do método que temos vindo a usar no estudo de problemas análogos em espaços de dimensão finita, problemas esses que serão estudados detalhadamente no capítulo seguinte.

Consideremos o conjunto das funções da forma

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.15)$$

Note-se que a máxima frequência angular presente nas funções deste tipo é $n\omega_0$, e que f é uma função periódica com período fundamental $\tau = 2\pi/\omega_0$.

Com excepção da função nula, as funções desta forma não pertencem a L_2 . Conservam no entanto a propriedade fundamental da limitação em frequência porque são transformadas de Fourier inversas de distribuições de suporte compacto.

É bem conhecido que os resultados clássicos sobre amostragem não são incondicionalmente aplicáveis às transformadas de Fourier inversas de distribuições de suporte compacto. No entanto, podem generalizar-se de modo a incluir todas as funções para as quais seja válida a representação (2.15), isto é, todos os polinómios trigonométricos. Neste caso particularmente simples é até possível deduzir um teorema de amostragem sem apelar para a teoria das distribuições. Para isso podem utilizar-se diversos métodos. Passamos a apresentar as linhas gerais de dois desses métodos.

2.3.1 Série de amostragem infinita

Consideremos a função

$$\phi(a) = \begin{cases} e^{jat} & \text{se } |a| \leq \sigma, \\ 0 & \text{se } |a| > \sigma, \end{cases}$$

e a respectiva extensão periódica ϕ_p , com período 2Ω . Assumiremos que $\sigma \leq \Omega$ e definiremos $r = \sigma/\Omega$. Por expansão em série de Fourier obtém-se a representação

$$\phi_p(a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{\Omega t}{\pi} - k \right) \right] e^{jka \frac{\pi}{\Omega}} \quad (2.16)$$

que é uniformemente convergente em $[-\sigma, \sigma]$ uma vez que a função ϕ_p é de variação limitada e contínua nesse intervalo.

Consideremos de novo a equação (2.15). A expansão (2.16) é claramente válida para $a = m\omega_0$, com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, desde que $\sigma \geq n\omega_0$. Logo,

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{\Omega t}{\pi} - m \right) \right] e^{jkm\omega_0 \frac{\pi}{\Omega}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{jkm\omega_0 \frac{\pi}{\Omega}} \right] r \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{\Omega t}{\pi} - m \right) \right] \\
&= r \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(mT) \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - m \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

resultado que coincide com a série de amostragem (2.2). Como habitualmente, $T = \pi/\Omega$.

Repare-se que a condição de sobre-amostragem $r = \sigma/\Omega < 1$ juntamente com $\sigma \geq n\omega_0$ conduz a

$$T = \frac{\pi}{\Omega} < \frac{\pi}{\sigma} \leq \frac{1}{2n} \frac{2\pi}{\omega_0},$$

ou seja, o período de amostragem deve ser inferior ao período fundamental de f , dividido por $2n$. Isto implica que o número de amostras de f por período deve exceder $2n + 1$. Tolerando $r = 1$ e $\sigma = n\omega_0$ o número de amostras pode igualar $2n + 1$, que é o número de coeficientes c_i que definem f em (2.15). É claro que neste caso o número de amostras não pode ser reduzido, pelo que o teorema da amostragem fornece uma condição necessária e suficiente para a interpolação sem erro de f .

A ideia de usar a expansão em série de Fourier da exponencial complexa para chegar a uma série de amostragem não é original. Campbell Campbell (1968) usou um artifício semelhante para o caso mais simples em que não há sobre-amostragem, isto é, quando $r = 1$.

2.3.2 Série de amostragem finita

As funções que estamos a considerar são periódicas e completamente definidas pelo conhecimento do período $\tau = 2\pi/\omega_0$ e dos $2n + 1$ coeficientes c_k , o que sugere que a série infinita que aparece em (2.17) possa ser substituída por uma soma finita.

Retomemos por isso essa série, assumindo que o período de amostragem T é um submúltiplo do período de f , ou seja, $\tau = 2\pi/\omega_0 = mT$. Deste modo, $f(kT)$ será uma função periódica do inteiro k , com período m . Em face dos resultados anteriores, cada período de f deve conter pelo menos $2n + 1$ amostras, pelo que $m \geq 2n + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
f(t) &= r \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} f(imT + kT) \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - im - k \right) \right] \\
&= r \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - im - k \right) \right] \\
&= r \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - im - k \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) D(t - kT),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde D designa a função

$$D(t) = r \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - im \right) \right] \quad (2.19)$$

que é claramente periódica com período $\tau = 2\pi/\omega_0 = mT$. Note-se que

$$r = \frac{\sigma}{\Omega} = \frac{n\omega_0 T}{\pi} = \frac{2n}{m}.$$

A equação (2.18) é uma série de amostragem finita, em que intervêm apenas um número finito ℓ de amostras $f(kT)$. Pode obter-se uma expressão fechada para D pelo processo que se segue.

Considere-se a função U_n definida por

$$U_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin[(2n+1)\omega_0 t/2]}{(2n+1)\sin(\omega_0 t/2)} & \text{se } t \not\equiv 0 \pmod{2\pi/\omega_0}, \\ 1 & \text{se } t \equiv 0 \pmod{2\pi/\omega_0}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Esta função é periódica, com período $2\pi/\omega_0$, e pertence à classe de polinómios (2.15), uma vez que

$$\frac{\sin[(2n+1)\alpha/2]}{\sin(\alpha/2)} = \sum_{k=-n}^n e^{jk\alpha}.$$

Tomando $m = 2n + 1$ amostras por período e aplicando o desenvolvimento (2.17) a U_n obtém-se

$$U_n(t) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_n(kT) \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - k \right) \right]. \quad (2.21)$$

onde $r = 2n/(2n+1)$. Como $\omega_0 T = 2\pi/m$, temos

$$U_n(kT) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \not\equiv 0 \pmod{m}, \\ 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod{m}. \end{cases}$$

Voltando a (2.21) obtemos

$$U_n(t) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} \left[r \left(\frac{t}{T} - km \right) \right]. \quad (2.22)$$

Comparando esta equação com (2.19) conclui-se que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) \frac{\sin [m\omega_0(t - kT)/2]}{m \sin [\omega_0(t - kT)/2]} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) \frac{\sin \left[\pi \left(\frac{t}{T} - k \right) \right]}{m \sin \left[\frac{\pi}{m} \left(\frac{t}{T} - k \right) \right]} \end{aligned} \quad (2.23)$$

que é o resultado procurado, uma série de amostragem finita.

2.3.3 Um método mais simples

Apresentaremos em seguida um método mais simples de obter resultados de amostragem para polinómios trigonométricos, e que se relaciona directamente com o teorema de Kramer.

Os coeficientes c_k do polinómio trigonométrico (2.15) são dados por

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

onde, novamente, $\tau = 2\pi/\omega_0$. Por substituição chega-se facilmente à bem conhecida equação

$$f(t) = \int_0^\tau f(x) \frac{1}{\tau} \frac{\sin [(2n+1)\omega_0(t-x)/2]}{\sin [\omega_0(t-x)/2]} dx, \quad (2.24)$$

a qual se poderia também deduzir do integral de Dirichlet. Sublinhamos que esta relação continua a ser válida se n for substituído por outro inteiro que lhe seja superior.

O resultado (2.24), escrito sob a forma

$$f(t) = \int_0^\tau f(x) K(x, t) dx,$$

com o significado óbvio para $K(x, t)$,

$$K(x, t) = \frac{1}{\tau} \frac{\sin [(2n+1)\omega_0(t-x)/2]}{\sin [\omega_0(t-x)/2]}, \quad (2.25)$$

lembra a condição

$$f(t) = \int_J g(x) K(x, t) dx$$

do teorema de Kramer e do teorema 2.2.1. Isto levanta a questão da aplicabilidade desses teoremas a este problema, e conseqüentemente da existência de conjuntos sobre-amostradores $\{t_i\}$ para f , relativamente à função K .

Para chegar ao teorema de amostragem, procuremos um conjunto de funções $\phi_i(x) = K(x, t_i)$ ortogonais em $[0, \tau]$. Notando que a função $K(x, t)$ é um polinómio da forma (2.15) em $t-x$, obtém-se imediatamente a relação

$$\int_0^\tau K(x, y) K(x, t) dx = K(t, y),$$

que foi usada por Brown Brown (1985) na demonstração de um teorema de amostragem válido para polinómios trigonométricos do tipo dado por (2.15). Esta relação permite concluir imediatamente que o conjunto de funções

$$K(x, t_i) = K\left(x, i \frac{\tau}{2n+1}\right) = \frac{1}{\tau} \frac{\sin [(2n+1)\omega_0(t_i-x)/2]}{\sin [\omega_0(t_i-x)/2]}$$

é ortogonal em $[0, \tau]$, uma vez que

$$\int_0^\tau K(x, t_i)K(x, t_j) dx = K(t_j, t_i) = \begin{cases} \frac{2n+1}{\tau} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Kramer resulta

$$S(t_i, t) = \frac{\int_0^\tau K(x, t)K(x, t_i) dx}{\int_0^\tau |K(x, t_i)|^2 dx} = \frac{\tau}{2n+1} K(t_i, t),$$

e portanto

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(t_i) \frac{\sin[(2n+1)\omega_0(t-t_i)/2]}{\sin[\omega_0(t-t_i)/2]} \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(kT) \frac{\sin[(2n+1)\omega_0(t-kT)/2]}{\sin[\omega_0(t-kT)/2]}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(kT) \frac{\sin[\pi(\frac{t}{T} - k)]}{\sin[\frac{\pi}{2n+1}(\frac{t}{T} - k)]}.$$

Este processo de obter a série de amostragem para polinómios do tipo (2.15) foi sugerido por Brown em Brown (1985).

2.4 Notas

O artigo Marks II (1983) contém duas demonstrações da redundância do conjunto de amostras de funções sobre-amostradas de $B_2(\sigma)$, mas bastante mais complexas do que a apresentada. O método que adoptámos apresenta, para além de uma muito maior simplicidade, a vantagem de ser facilmente generalizável para o caso de séries de amostragem de Kramer. No livro Marks II (1991) é dada uma demonstração semelhante à apresentada, mas da qual não se tira partido no que diz respeito a eventuais generalizações. A demonstração aqui apresentada foi publicada pelo autor Ferreira (1992b). A questão da necessidade da analiticidade das funções K para a não-singularidade da matriz \mathbf{S} (teorema 2.2.3) foi levantada por um dos *reviewers* de Ferreira (1992b).

A comparação dos resultados aqui expostos com os que se apresentam em Marks II (1983) e Ferreira (1992b) deve ser feita tendo em conta as diferenças entre a definição de transformada de Fourier adoptada no presente trabalho e nesses outros. No caso dos dois trabalhos citados a definição usada é

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt$$

sendo o parâmetro r definido por $r = 2\pi\sigma/\Omega$.

Demos no texto um exemplo de sobre-amostragem generalizada para o caso da transformada de Hankel-Bessel. Já Kramer, no trabalho onde introduziu as séries generalizadas Kramer (1959), deu um exemplo baseado numa transformada semelhante à de Hankel-Bessel, com núcleo $K(x, t) = \sqrt{x}J_n(x\sqrt{t})$, para o caso em que não há sobre-amostragem, isto é, $r = 1$.

O leitor interessado noutras séries de amostragem poderá consultar os trabalhos de Jerri Jerri (1977) e de Higgins Higgins (1985), onde são dados vários exemplos. Existe na literatura um número de trabalhos adicionais dedicados ao estudo das séries de amostragem generalizadas. Além dos trabalhos citados, o leitor poderá ainda consultar Jerri (1976), onde se discute uma série de amostragem baseada nas funções de Laguerre L_p^α . O trabalho Jerri (1969) contém um número de exemplos onde aparecem funções associadas de Legendre, funções de Gegenbauer, funções de Tchebychev e funções esferoidais prolatas. Em Jerri e Kreisler (1975) estudam-se séries baseadas na transformada de Hankel-Bessel com um núcleo que depende da função de Bessel de ordem zero, $J_0(x)$. O exemplo dado no presente trabalho, ao contrário daqueles que constam dos trabalhos citados, contempla a situação de sobre-amostragem, caracterizada por $r < 1$.

As técnicas de solução de sistemas de equações lineares são antigas, sendo já referidas no *Chui-Chang Suan-Shu*, ou *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, um dos mais antigos tratados matemáticos conhecidos. Nesta obra, escrita na China provavelmente três séculos antes de Cristo, discutem-se mais de duas centenas de problemas diversos. Um dos capítulos aborda os sistemas de equações lineares Boyer (1985), terminando com um problema que se pode exprimir matematicamente por um conjunto de 4 equações e 5 incógnitas.

Os determinantes foram introduzidos no Japão antes da sua divulgação na Europa, por intermédio de Leibnitz. A referência mais antiga que o autor conhece é a carta de Leibnitz ao marquês de L'Hospital, datada de 28 de Abril de 1693 Smith (1929). A regra de Cramer só foi formulada por Cramer em 1750, e por Bézout em 1764. Um e outro foram precedidos nessa descoberta por Maclaurin, que conhecia o resultado em 1729. Em finais do século XVIII a estrutura dos sistemas de equações lineares era compreendida na Europa ao ponto de existirem métodos sistemáticos para a sua solução. Quando Gauss descreveu em 1809 o método que hoje é conhecido por *eliminação gaussiana* afirmou que este constituía uma melhoria em relação ao "método comum" então em uso. Sobre estes assuntos veja-se Boyer (1985) e Stewart (1987).

São conhecidas referências na correspondência de Gauss com um aluno à possibilidade de utilização de métodos iterativos para a solução de sistemas de equações lineares. Gauss sugeriu inclusivamente algumas possibilidades. Embora não seja de todo certo que tenha utilizado o método iterativo que hoje é conhecido pelo seu nome, é sabido que usava uma técnica iterativa com relaxação, anulando em cada iteração o maior dos erros Householder (1975). Introduziu algoritmos de cálculo que foram redescobertos muito depois, como o algoritmo de Crout para decomposição LU, e o método rápido de cálculo da transformada de Fourier discreta que hoje é universalmente conhecido por FFT Cooley (1992).

A disponibilização de meios automáticos de cálculo nas décadas de 1940 a 1960 estimulou consideravelmente a investigação no domínio da análise numérica, tendo dado origem a numerosos e importantes resultados. Muitos desses resultados encontram-se descritos nas obras fundamentais de Varga Varga (1962), Wilkinson Wilkinson (1978), Householder

Householder (1975) e Young Young (1971). Todos os resultados sobre teoria de métodos iterativos que utilizamos neste trabalho podem encontrar-se em Varga (1962) ou Young (1971).

A ideia de usar a expansão em série de Fourier da exponencial complexa para chegar a um teorema de amostragem válido para polinômios trigonométricos consta de um trabalho de Campbell Campbell (1968). Veja-se também Higgins Higgins (1985). Contudo, o resultado é bastante anterior. Titchmarsh Titchmarsh (1948) cita as funções trigonométricas como exemplos de funções que satisfazem a equação integral de Bateman mas que não pertencem a L_2 . Em termos modernos, são funções limitadas em frequência, num sentido lato, mas não têm energia finita. Hardy deu em 1941 a série cardinal para funções trigonométricas. É um exemplo de que a existência de uma série de amostragem convergente para uma certa função não implica que essa função seja limitada em frequência no sentido estrito, isto é, pertencente a L_2 .

Capítulo 3

Séries de amostragem incompletas em \mathbb{C}^n

Neste capítulo estudaremos problemas análogos aos que vimos anteriormente mas tomando como *sinais* os vectores de \mathbb{C}^n .

Este assunto tem interesse prático por duas razões principais. Em primeiro lugar, muitos dos problemas de reconstrução que surgem apresentam características que à partida se adaptam bem a estes modelos. É o caso, por exemplo, da maioria dos problemas de processamento digital de sinal. Em segundo lugar, os modelos matemáticos formulados em espaços de dimensão infinita não podem ser directamente utilizados na prática, sendo normalmente necessária a formulação de um modelo de dimensão finita que aproxime o modelo original. Nos problemas em que a análise harmónica desempenha um papel importante isto implica quase sempre a consideração de um conjunto finito de valores possíveis para as variáveis tempo e frequência, o que conduz de novo ao estudo dos modelos em \mathbb{C}^n .

Veremos que os métodos usados no caso anterior continuarão a possibilitar a obtenção de resultados válidos, apesar das diferenças entre os problemas aqui abordados e os anteriormente examinados. A natural e importante questão da possibilidade de tratamento unificado dos dois problemas só posteriormente poderá ser respondida.

3.1 Definição do problema e terminologia

O problema que abordamos neste capítulo resume-se ao seguinte. Seja \mathbf{x} um vector pertencente a um certo subespaço B de \mathbb{C}^n , que definiremos utilizando a transformada de Fourier discreta (DFT) de \mathbf{x} , e que desempenhará em \mathbb{C}^n um papel análogo ao que desempenhou $B_2(\sigma)$ no capítulo anterior. Supondo que se conhece um subconjunto dos elementos, componentes ou amostras x_i de \mathbf{x} , pretende-se determinar as amostras restantes.

Para resolver este problema seguiremos um método semelhante ao que seguimos anteriormente, ou seja, daremos uma representação em série de amostragem de \mathbf{x} , da

qual extrairemos soluções directas e soluções iterativas.

Antes de prosseguirmos é conveniente definirmos a terminologia utilizada.

Definição 3.1.1 (equivalência) *Seja S um subconjunto de k elementos distintos do conjunto $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, isto é,*

$$S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

com $i_j \neq i_k$ para $j \neq k$. Dois conjuntos deste tipo dizem-se equivalentes se tiverem a mesma cardinalidade e se os elementos de um se puderem obter por adição módulo n de um certo inteiro aos elementos do outro.

Definição 3.1.2 (contiguidade) *Diremos que o conjunto S de cardinalidade k é contíguo se for equivalente a*

$$E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

Utilizaremos repetidas vezes os conceitos de operador de amostragem e operador de filtragem definidos em \mathbb{C}^n . Estes são na verdade projecções definidas em \mathbb{C}^n , e cujas matrizes serão designadas por \mathbf{D} e \mathbf{B} , respectivamente.

Por definição, a matriz de um operador de amostragem é uma matriz diagonal contendo apenas 0 ou 1. Chamaremos a uma tal matriz *matriz de amostragem*. De igual modo, chamaremos *matriz de filtragem* à matriz de um operador de filtragem. Uma matriz de filtragem é da forma $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{F}$, sendo $\mathbf{\Gamma}$ uma matriz de amostragem e \mathbf{F} a matriz de Fourier. Note-se que a operação de filtragem é uma operação de amostragem no domínio da frequência.

Na prática, os vectores limitados em frequência surgem muitas vezes em consequência de sobre-amostragem e/ou filtragem. Isto equivale a afirmar que o conjunto formado pelos índices das componentes não-nulas da diagonal principal de $\mathbf{\Gamma}$ é contíguo. Assumiremos que isto é verdade daqui em diante.

O conjunto formado pelos vectores \mathbf{x} tais que $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x}$, para uma matriz de amostragem \mathbf{D} , é um subespaço de \mathbb{C}^n que designaremos por D . De igual modo, o conjunto formado pelos vectores \mathbf{x} tais que $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, para uma matriz de filtragem \mathbf{B} , é um subespaço de \mathbb{C}^n que designaremos por B .

Seja \mathbf{x} um vector arbitrário e $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ o resultado da amostragem de \mathbf{x} . Seja U o conjunto dos índices das componentes de \mathbf{x} alteradas pela amostragem, e que traduzem, em certo sentido, a potencial perda de informação imposta pela passagem de \mathbf{x} a $\mathbf{D}\mathbf{x}$. Designaremos por \bar{U} o complemento de U em E_n . É claro que o cardinal de \bar{U} é igual ao número de entradas unitárias da matriz \mathbf{D} .

Definição 3.1.3 *Seja $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ um vector amostrado obtido a partir de $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Seja \bar{U} o conjunto dos índices das amostras de \mathbf{x} que estão em \mathbf{y} . A densidade do vector amostrado \mathbf{y} é por definição s/n , sendo s o cardinal de \bar{U} .*

Seja \mathbf{u} um elemento de \mathbb{C}^n . Se $\mathbf{u} \in B$ então um certo número de amostras \hat{u}_i da DFT $\hat{\mathbf{u}}$ de \mathbf{u} serão nulas. Seja $I = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ o conjunto constituído pelos índices das amostras *não-nulas* de \hat{u}_i . O cardinal de I iguala o máximo número de harmónicas não nulas presentes em qualquer elemento de B .

Designaremos por \bar{I} o complemento em E_n de $I = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$.

Definição 3.1.4 *Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ um vector limitado em frequência, $\mathbf{x} \in B$. Seja I o conjunto dos índices das amostras não-nulas da DFT dos vectores de B . A largura de banda do vector $\mathbf{x} \in B$ é por definição q/n , sendo q o cardinal de I .*

O facto de a largura de banda no sentido da definição 3.1.4 ser igual a b significa, para vectores reais passa-baixo, que a mais alta frequência normalizada presente no vector é $b/2$. Para vectores reais passa-banda o conceito de largura de banda expresso pela definição 3.1.4 é equivalente ao conceito habitual de largura de banda. O mesmo se passa, em qualquer dos casos, para vectores *analíticos*, termo pelo qual é frequente designar em engenharia aqueles elementos de \mathbb{C}^n cuja DFT se anula para todos os índices superiores a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. O paralelo em modelos de variável real seriam os espaços de Hardy H_p .

Definição 3.1.5 *Seja \mathbf{D} uma matriz de amostragem associada a um subespaço D de \mathbb{C}^n . Define-se densidade de \mathbf{D} , ou de D , como a densidade dos vectores da forma $\mathbf{D}\mathbf{u}$.*

Definição 3.1.6 *Seja \mathbf{B} um operador de filtragem, associado à matriz $\mathbf{\Gamma}$, e a um subespaço B de \mathbb{C}^n . Define-se densidade de \mathbf{B} , ou de $\mathbf{\Gamma}$, ou de B , como a densidade dos vectores da forma $\mathbf{B}\mathbf{u}$.*

3.2 O teorema de unicidade

Vimos no capítulo anterior que uma função sobre-amostrada, sujeita a condições suficientemente gerais para muitas aplicações, é determinada por um subconjunto das suas amostras desde que o conjunto excluído tenha cardinal finito. Os teoremas de unicidade que então apresentámos afirmam precisamente que se todas as amostras de uma função sobre-amostrada forem nulas, com excepção possível de qualquer número finito, então a função é nula.

Estes resultados podem ser interpretados da maneira que apresentamos de seguida. A discussão não pretende ser rigorosa, mas apenas introduzir uma perspectiva que será útil posteriormente.

Representemos por D o operador que aplica o elemento x de ℓ_2

$$x = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

no elemento $y \in \ell_2$ definido por

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \in U, \\ 0 & \text{se } i \notin U, \end{cases}$$

onde U designa um subconjunto dos inteiros \mathbb{Z} com cardinal finito. O conjunto dos $x \in \ell_2$ tais que $x = (I - D)x$ constitui um subespaço de ℓ_2 , formado por todos os elementos x tais que $x_i = 0$ para $i \in U$. Designaremos este espaço por $\perp D$, uma vez que ele é de facto o complemento ortogonal do espaço D dos vectores x tais que $x = Dx$.

Seja B um operador de filtragem definido em ℓ_2 , e consideremos o conjunto dos $x \in \ell_2$ para os quais é válida a relação

$$x = Bx.$$

O subespaço formado pelos x que verificam esta condição será designado por B . Esta relação é verificada, por exemplo, para o subespaço de ℓ_2 constituído pelos vectores de amostras $\{f(t_i)\}$ de funções f sobre-amostradas por um dado conjunto amostrador $\{t_i\}$.

Os teoremas de unicidade que vimos no capítulo anterior estabelecem que a intersecção dos subespaços B e $\perp D$ se reduz ao vector nulo, ou seja, o único elemento de ℓ_2 que verifica $x = Bx$, e cujas componentes x_i são nulas para todos os i com excepção de um conjunto U de cardinal finito, é o vector nulo $x = 0$.

Em \mathbb{C}^n , existem resultados análogos cuja validade facilmente se estabelece. Apresentamos de seguida um teorema que nos fornece uma condição suficiente para a intersecção dos subespaços $\perp D$ e B de \mathbb{C}^n se reduzir ao vector nulo.

Teorema 3.2.1 *Seja \mathbf{D} um operador de amostragem de densidade d e \mathbf{B} um operador de filtragem com largura de banda w , no sentido das definições 3.1.5 e 3.1.6. Então, se $d \geq w$, a intersecção dos subespaços $\perp D$ e B é o vector nulo, isto é, se $d \geq w$, $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, então $\mathbf{x} \equiv 0$.*

A demonstração pode ser efectuada da seguinte maneira. Como $\mathbf{x} \in B$,

$$\hat{x}_i = 0 \quad \text{para todos os } i \in \bar{I}. \quad (3.1)$$

Logo, $n - q$ amostras de $\hat{\mathbf{x}}$ são nulas. De modo semelhante, como $\mathbf{x} \in \perp D$, s amostras de \mathbf{x} verificarão

$$x_i = 0 \quad \text{para todos os } i \in \bar{U}. \quad (3.2)$$

Usando (3.2), as n equações $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ reduzem-se a

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i \in U} \mathbf{F}_i x_i$$

onde \mathbf{F}_i designa a coluna i de \mathbf{F} . Usando (3.1) chegamos a

$$\sum_{i \in U} F_{ki} x_i = 0 \quad \text{para todos os } k \in \bar{I}. \quad (3.3)$$

Como $F_{kl} = (1/\sqrt{n})e^{-j2\pi kl/n}$ e \bar{I} é um conjunto contíguo, a submatriz de \mathbf{F} que surge em (3.3) pode ser reduzida a uma matriz Vandermonde de ordem $(n - q) \times (n - s)$.

Se $d \geq w$, $(n - q) \geq (n - s)$, e, logo, as colunas de \mathbf{F}_i são linearmente independentes, pelo que os únicos valores x_i que satisfazem (3.3) são $x_i = 0$, e \mathbf{x} é o vector nulo, como pretendíamos demonstrar. ■

Ficou estabelecida a impossibilidade de existência de vectores não-nulos e limitados em frequência no espaço $\perp D$, sob certas condições. Qualquer vector pertencente a $\perp D$ tem componentes nulas em \bar{U} , pelo que o teorema 3.2.1 implica também que um vector limitado em frequência não se pode anular em \bar{U} sem se reduzir ao vector nulo, desde que se cumpram as condições de densidade exigidas.

Corolário 3.2.1 *Seja \mathbf{D} um operador de amostragem de densidade d e \mathbf{B} um operador de filtragem com largura de banda w , no sentido das definições 3.1.5 e 3.1.6. Então, se $d \geq w$, quaisquer vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} limitados em frequência e iguais em D serão iguais em \mathbb{C}^n .*

O corolário é uma consequência do que acabámos de dizer. De facto, como $\mathbf{x} = \mathbf{Bx}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{By}$, a diferença $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ é limitada em frequência, verificando $\mathbf{a} = \mathbf{Ba}$. Por outro lado, o vector \mathbf{a} é simultaneamente nulo em \bar{U} , pertencendo por isso a $\perp D$. Mas pelo teorema 3.2.1 isso implica que \mathbf{a} seja o vector nulo. ■

Um vector limitado em frequência \mathbf{x} fica portanto completamente especificado se as suas amostras forem conhecidas em D , e se as condições de densidade que temos imposto se cumprirem. Este resultado apresenta certas semelhanças com o clássico teorema de amostragem, semelhanças essas que estão longe de serem acidentais, e que ficam ainda mais claras com o seguinte enunciado.

Corolário 3.2.2 *Qualquer vector \mathbf{x} de largura de banda w é completamente determinado pelas suas amostras em qualquer conjunto de densidade $d \geq w$.*

A semelhança seria ainda maior se restringíssemos o vector ao tipo passa-baixo, caso em que poderíamos identificar o dobro da frequência máxima normalizada com a largura de banda.

3.3 Sobre a necessidade da contiguidade

A hipótese de contiguidade não é necessária para o estabelecimento dos resultados anteriores, como é fácil ver considerando certos casos particulares de espaços B . Por exemplo, conclui-se por dualidade que o teorema fundamental 3.2.1 mantém a sua validade para subespaços B arbitrários, desde que a matriz associada ao subespaço D seja contígua. Isto equivale evidentemente a um problema de extrapolação temporal pura.

Existem outros casos que permitem concluir que não é necessária contiguidade em nenhum dos subespaços. Examinaremos em seguida um desses casos, provavelmente o mais interessante. Será necessário recorrer a um determinado grupo de permutações que comuta com a matriz de Fourier.

3.3.1 Permutações que comutam com a matriz de Fourier

Começamos por esclarecer a notação utilizada. Seja E_n o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Uma permutação definida em E_n é uma aplicação bijectiva $P : E_n \rightarrow E_n$. O conjunto das permutações de n símbolos forma com a operação de composição um grupo normalmente representado por S_n . Uma permutação pode representar-se por uma tabela

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

que às vezes se abrevia para (i_1, i_2, \dots, i_n) . Com qualquer permutação π pode associar-se uma matriz de permutação de ordem n , obtida permutando as colunas da matriz identidade de ordem n de acordo com π . Por exemplo, a matriz de permutação associada com a permutação $(2, 3, 1)$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de permutação de ordem n formam um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo das permutações de n símbolos com a operação de composição.

As linhas ou colunas de qualquer matriz de permutação \mathbf{P} são obviamente ortogonais, pelo que

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$$

e $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$. Se π é a permutação isomorfa a \mathbf{P} , e π^{-1} é a inversa de π , então \mathbf{P}^T é a matriz de permutação associada com π^{-1} .

Após estes preliminares podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1 *Para qualquer $n > 2$ existe um grupo não-trivial C_n de matrizes de permutação de ordem n que comutam com a matriz de Fourier da mesma ordem.*

A demonstração é elementar. Sejam \mathbf{P} e \mathbf{Q} matrizes de permutação que comutam com \mathbf{F} . É evidente que os produtos $\mathbf{P}\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}\mathbf{P}$ possuirão essa mesma propriedade, o que prova que o conjunto de matrizes com tal propriedade forma de facto um grupo relativamente à operação de multiplicação matricial.

Para provar a existência de tais matrizes consideremos a equação

$$\mathbf{P}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{P},$$

ou, alternativamente, as permutações σ tais que o vector

$$\sigma(\mathbf{x}) = \{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}\}$$

tenha por DFT

$$\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \{\hat{x}_{\sigma(0)}, \hat{x}_{\sigma(1)}, \dots, \hat{x}_{\sigma(n-1)}\}.$$

Seguindo por exemplo a primeira hipótese chega-se a

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_{ik} e^{-j2\pi k\ell/n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-j2\pi ik/n} P_{k\ell}.$$

Seja k um inteiro tal que $0 \leq k < n$. Designaremos por $\sigma(k)$ e $\sigma^{-1}(k)$ as imagens de k dadas pela permutação σ e pela sua inversa, respectivamente. A coluna k da matriz \mathbf{P} é a coluna $\sigma(k)$ da matriz identidade, pelo que

$$P_{ik} = \delta_{i\sigma(k)}.$$

Logo,

$$\exp\left(-j2\pi\sigma^{-1}(i)\ell/n\right) = \exp\left(-j2\pi i\sigma(\ell)/n\right),$$

ou seja,

$$\ell\sigma^{-1}(i) \equiv i\sigma(\ell) \pmod{n}. \quad (3.4)$$

Pondo $\sigma^{-1}(i) = k$ chega-se à forma alternativa

$$\sigma(\ell)\sigma(k) \equiv \ell k \pmod{n}.$$

Estas condições são evidentemente necessárias e suficientes para a comutatividade.

Fazendo $i = 1$ chegamos a

$$\sigma(\ell) \equiv \sigma^{-1}(1)\ell \pmod{n}, \quad (3.5)$$

o que implica que $\sigma(0) = 0$. A permutação identidade definida por $\sigma(i) = i$ é uma solução óbvia de (3.5). Uma outra solução é dada pela permutação definida por

$$\sigma(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ n - i & \text{se } i \neq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

É claro que $n - i \equiv (n - 1)i \pmod{n}$. Encontrámos assim duas soluções para o problema da comutatividade, válidas para qualquer $n > 2$. ■

Pondo $\ell = 1$ na equação (3.4) chega-se a

$$\sigma^{-1}(i) \equiv \sigma(1)i \pmod{n}, \quad (3.7)$$

donde se conclui, tomando $i = 1$, que $\sigma^{-1}(1) = \sigma(1)$. Este facto e as equações (3.5) e (3.7) implicam que a permutação σ é de ordem 2, isto é, é a sua própria inversa. Isto significa que qualquer matriz \mathbf{P} que comute com a matriz de Fourier é necessariamente involutória, isto é, satisfaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$.

Esta condição só por si não é suficiente para a comutatividade. Pode obter-se um conjunto de condições necessárias e suficientes exigindo também que $\sigma(k) = \sigma(1)k \pmod{n}$. Chega-se assim ao seguinte teorema.

Teorema 3.3.2 (Chao) *Uma matriz de permutação \mathbf{P} comuta com a matriz de Fourier se e só se for uma involução e se a permutação σ associada a \mathbf{P} satisfizer $\sigma(k) = \sigma(1)k \pmod n$.*

Este resultado encontra-se em Chao (1973), enunciado da seguinte maneira sinónima: uma matriz de permutação comuta com a matriz de Fourier se e só se a permutação isomorfa for um automorfismo de ordem 2 do grupo aditivo dos inteiros módulo n .

A ordem do grupo de permutações está relacionada com o número de raízes quadradas da unidade, módulo n , de acordo com o resultado seguinte.

Teorema 3.3.3 *O número de permutações que comutam com a matriz de Fourier de ordem n é igual ao número de raízes quadradas da unidade, módulo n .*

Para a demonstração retomemos a equação (3.7), que implica

$$\sigma(\sigma(k)) = k \equiv \sigma^2(1)k \pmod n,$$

o que prova que $\sigma^2(1) \equiv 1 \pmod n$. Logo cada raíz quadrada da unidade módulo n corresponde a uma permutação σ . ■

Para qualquer ordem n existem sempre pelo menos duas matrizes de permutação que comutam com a matriz de Fourier. Uma dessas permutações é a identidade. A outra é a matriz correspondente à permutação definida pela equação (3.6), isto é,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se facilmente que esta matriz é o quadrado da matriz de Fourier, donde imediatamente se infere a comutatividade referida. Se considerarmos um elemento de \mathbb{C}^n como uma sequência de n amostras dispostas ao longo de n posições num eixo temporal e repetidas periodicamente, a permutação \mathbf{J} pode interpretar-se como uma inversão do eixo temporal, expressa pela mudança de variável $t' = -t$. A transformada de Fourier para funções de variável real apresenta uma propriedade de invariância semelhante. De facto, se $\hat{f}(\omega)$ for a transformada de Fourier de $f(t)$, então $\hat{f}(-\omega)$ será a transformada de Fourier de $f(-t)$.

Repare-se que $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ pelo que as permutações $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}\}$ formam de facto um grupo.

Existem outras maneiras de interpretar estes resultados. Observemos que existem sempre duas raízes quadradas da unidade, módulo n , para qualquer n . Uma é a própria unidade, claro, e a outra é $(-1) \pmod n$, que é congruente com $n - 1$ para o módulo n . Alternativamente, se n for um primo ímpar então 2 dividirá $n - 1$, pelo que o número de soluções de $x^2 \equiv 1 \pmod n$ será exactamente 2, pelo teorema de Lagrange Rose (1988).

As duas soluções de $x^2 \equiv 1 \pmod n$ que existem sempre, independentemente do valor de n , correspondem às permutações \mathbf{I} e \mathbf{J} que acabámos de descrever. Quando n é

<i>Ordem</i>	<i>Número de soluções</i>	<i>Soluções</i>
4	2	1,3
5	2	1,4
6	2	1,5
7	2	1,6
8	4	1,3,5,7
9	2	1,8
10	2	1,9
11	2	1,10
12	4	1,5,7,11
13	2	1,12
14	2	1,13
15	4	1,4,11,14
16	4	1,7,9,15
17	2	1,16
18	2	1,17
19	2	1,18
20	4	1,9,11,19
21	4	1,8,13,20
22	2	1,21
23	2	1,22
24	8	1,5,7,11,13,17,19,23

Tabela 3.1: Raízes quadradas da unidade módulo n , para vários valores de n .

um primo estas duas permutações são as únicas que existem, e o grupo de permutações C_n reduz-se a $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}\}$.

O menor módulo n para o qual existem mais de duas raízes da unidade é $n = 8$, sendo as raízes 1, 3, 5, e 7. Por curiosidade, as permutações correspondentes a 3 e 5 são as seguintes:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

O número de permutações deste tipo, isto é, a ordem do grupo C_n , é uma quantidade com algum interesse. A tabela 3.3.1 dá conta desse número para vários valores de n .

Existe a possibilidade de calcular com alguma facilidade o número de raízes quadradas da unidade módulo n , e logo a ordem do grupo C_n . Primeiro, porém, são necessárias algumas definições. Pelo símbolo (m, n) designaremos o máximo divisor comum dos inteiros m e n .

Definição 3.3.1 *Uma função ψ é multiplicativa se aplicar os inteiros positivos num conjunto fechado para a operação produto e se $(m, n) = 1$ implicar $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$.*

A função multiplicativa trivial é a função nula. Note-se que se uma função ψ é multiplicativa e não nula então $\psi(1) = 1$.

Considere-se a equação

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}, \quad (3.8)$$

onde f é um polinómio em x de grau pelo menos unitário, com coeficientes inteiros. Seja

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

a decomposição de n em factores primos.

É conhecido que a equação (3.8) tem solução se e só se cada uma das equações $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ possuir solução. De facto, admita-se que é possível determinar x_i ($1 \leq i \leq k$) tal que $f(x_i) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Utilizando um resultado bem conhecido Rose (1988) chega-se à conclusão de que existe um e um só x tal que $x = x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, e que portanto é uma solução de (3.8). Esta solução é determinada pelo conjunto dos x_i , no sentido de que cada uma das soluções x_i de $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ dá origem a uma solução diferente de (3.8).

Pode provar-se esta última afirmação por redução ao absurdo. Suponha-se que existem duas soluções não congruentes x_{k_1} e x_{k_2} da equação $f(x) \equiv 0 \pmod{p_k^{\alpha_k}}$ e um x tal que

$$x = \begin{cases} x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} & \text{se } i \neq k, \\ x_{k_1} \pmod{p_k^{\alpha_k}}, \end{cases}$$

e

$$x = \begin{cases} x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} & \text{se } i \neq k, \\ x_{k_2} \pmod{p_k^{\alpha_k}}. \end{cases}$$

Isto implica $x_{k_1} \equiv x_{k_2} \pmod{p_k^{\alpha_k}}$, uma contradição.

Vemos assim que o número de soluções de (3.8) é uma função multiplicativa. Tomando o caso particular $f(x) = x^2 - 1$ chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 3.3.4 *O número de matrizes de permutação de ordem n que comutam com a matriz de Fourier é uma função multiplicativa não trivial de n .*

A confirmação é fácil de fazer para os valores de n tabelados na figura 3.3.1. Tome-se por exemplo $n = 24$. Nesse caso $n = 2^3 3^1$ e $\psi(8) = \psi(3)\psi(8) = 2 \times 4 = 8$.

É ainda possível determinar as soluções de

$$f(x) \equiv 0 \pmod{2^{k+1}} \quad (3.9)$$

com base nas soluções de

$$f(x) \equiv 0 \pmod{2^k}. \quad (3.10)$$

Este é um caso particular de um problema estudado em Rose (1988). O resultado que nos interessa resume-se ao seguinte. Seja x uma solução de (3.10). O inteiro

$$x + t 2^k \quad (3.11)$$

é uma solução de (3.9) se e só se

$$2tx + \frac{x^2 - 1}{2^k} \equiv 0 \pmod{2}. \quad (3.12)$$

Um exemplo tornará mais clara a utilização deste resultado. Suponhamos que se pretendem as soluções de

$$x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

sabendo-se que as soluções da mesma equação são, para o módulo 4, os inteiros 1 e 3. Como é fácil ver, a equação (3.12) reduz-se a $2t \equiv 0 \pmod{2}$, neste caso. Tomando $t = 1$ e substituindo em (3.11) obtêm-se imediatamente as soluções 5 e 7.

3.3.2 Necessidade da contiguidade

Estamos agora em condições de demonstrar que a contiguidade dos operadores de filtragem não é necessária para o estabelecimento dos resultados de reconstrução estudados neste capítulo.

Seja \mathbf{B} uma matriz de filtragem não-contígua mas da forma $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}\mathbf{F}$, em que \mathbf{P} é uma matriz de permutação que comuta com a matriz de Fourier, e $\mathbf{\Gamma}$ é tal que $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{F}$ é um operador de filtragem contíguo.

É claro que \mathbf{B} equivale a $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{F}\mathbf{P}$, ou seja, a uma permutação seguida de filtragem contígua. Os resultados anteriores, válidos para operadores contíguos, continuam a ser válidos para esta classe de operadores não-contíguos.

3.4 Uma perspectiva diferente

O essencial da demonstração do teorema 3.2.1 é mais facilmente apreendido se formalizarmos um pouco mais alguns dos conceitos envolvidos.

Definição 3.4.1 *Diremos que um subespaço X de $C[a, b]$ de dimensão finita n satisfaz a condição de Haar quando qualquer $x \neq 0$ pertencente a X tiver no máximo $n - 1$ zeros em $[a, b]$.*

Seja X um subespaço de $C[a, b]$ de dimensão finita n e tal que satisfaz a condição de Haar. Abreviaremos tal facto dizendo que X é um subespaço de Haar. Se f for um elemento de X , e $f(t_i) = 0$ para n ou mais reais t_i distintos pertencentes ao intervalo $[a, b]$, então $f = 0$.

Damos de seguida alguns exemplos de espaços de $C[a, b]$ de dimensão finita n que satisfazem a condição de Haar.

Exemplo 3.4.1 *O espaço formado pelos polinómios de grau $n - 1$ tem dimensão n e satisfaz a condição de Haar em qualquer intervalo $[a, b]$.*

Exemplo 3.4.2 *O espaço formado pelos polinómios da forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2k}$$

tem dimensão n e satisfaz a condição de Haar em qualquer intervalo $[0, a]$.

Exemplo 3.4.3 *O espaço formado pelos polinómios trigonométricos*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{j\alpha x k}$$

tem dimensão n e satisfaz a condição de Haar em $[0, 2\pi/\alpha]$.

Seja b_i uma base de funções para um subespaço de Haar X de dimensão n . Então, para qualquer $f \in X$ existem constantes a_k tais que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k b_k(x).$$

A matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1(x_1) & b_2(x_1) & \cdots & b_n(x_1) \\ b_1(x_2) & b_2(x_2) & \cdots & b_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1(x_n) & b_2(x_n) & \cdots & b_n(x_n) \end{bmatrix}$$

não é singular. Se o fosse uma das colunas seria uma combinação linear não-trivial das restantes colunas, o que conduziria às equações

$$\sum_{i=1}^n c_i b_i(x_j) = 0,$$

válidas para $j = 1, 2, \dots, n$. Designámos por c_i os coeficientes da combinação linear. Mas esta equação significa que existe uma função $g(x)$ no subespaço de Haar considerado, dada por

$$g(x) = \sum_{i=1}^n c_i b_i(x),$$

com n zeros x_1, x_2, \dots, x_n . Isto é uma contradição, pelo que a matriz \mathbf{M} não pode ser singular. Seja $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto de n reais distintos, e considerem-se os vectores

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Como \mathbf{M} não é singular são válidas as equações

$$\mathbf{f} = \mathbf{Ma}$$

e

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}.$$

Suponhamos que $n - q$ das componentes do vector \mathbf{a} são nulas, e designemos por A o conjunto dos q índices i tais que $a_i = 0$.

O conjunto de todos os elementos b de X tais que $b_i = 0$ ($i \notin A$) forma um subespaço Y de X com dimensão q , qualquer que tenha sido a escolha dos a_i nulos.

É claro que se Y for um espaço de Haar de dimensão q então qualquer f não-nulo e pertencente a Y pode ter, no máximo, q zeros. Logo, se conhecermos que $f(x_i) = 0$ para q ou mais x_i distintos concluímos imediatamente que $f = 0$.

Por outro lado, se para qualquer escolha de q ou mais x_i distintos se tiver

$$f(x_i) = \sum_{k \in A} a_k b_k(x_i) = 0,$$

isso significa que qualquer $f \neq 0$ de Y tem no máximo $q - 1$ zeros, pelo que Y é um espaço de Haar de dimensão q .

Resumimos estas observações no seguinte teorema.

Teorema 3.4.1 *Seja X um subespaço de $C[a, b]$ de dimensão finita n que satisfaz a condição de Haar, e Y um subespaço arbitrário de X com dimensão $q < n$. Então, qualquer elemento f de Y fica completamente especificado por q coordenadas ou amostras*

$$\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_q)\}$$

se e só se Y for um subespaço de Haar de dimensão q .

O teorema de unicidade que vimos anteriormente, teorema 3.2.1, é uma consequência deste resultado, para o caso particular em que a base de funções é

$$\{1, e^{j\alpha x}, e^{j2\alpha x}, \dots, e^{j(n-1)\alpha x}\}.$$

3.5 A equação $\mathbf{f} = \mathbf{Bf}$ em \mathbb{C}^n

Seja $\mathbf{x} \in B$. Procuremos exprimir a condição imposta sobre \mathbf{x} , relativa à sua largura de banda, através de uma equação da forma $\mathbf{x} = \mathbf{Bx}$. Para isso basta notar que $\mathbf{x} \in B$ implica

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m \in I} \hat{x}_m e^{j\frac{2\pi}{n}mi},$$

e logo, exprimindo os \hat{x}_i em função dos x_k usando a expressão da IDFT (1.1), chegamos a

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{m \in I} \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{n}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{n}mi}, \quad (3.13)$$

donde resulta

$$x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \left[\frac{1}{n} \sum_{m \in I} e^{j \frac{2\pi}{n} (i-k)m} \right]. \quad (3.14)$$

Como I é contíguo, existe um inteiro r tal que

$$I = \{r, r+1, \dots, r+q-1\},$$

de modo que se pode simplificar (3.14), resultando

$$x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \left[\frac{1}{n} e^{j \frac{2\pi}{n} (i-k)r} \sum_{i=0}^{q-1} e^{j \frac{2\pi}{n} (i-k)i} \right], \quad (3.15)$$

que é o resultado pretendido. Para vectores reais, do tipo passa-baixo, para as quais I é da forma

$$\{0, 1, \dots, m-1, n-m+1, n-m+2, \dots, n-1\}$$

a equação (3.15) reduz-se a

$$x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_k L(i-k), \quad (3.16)$$

onde

$$L(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{\sin[\pi x(2m+1)/n]}{\sin[\pi x/n]} & \text{se } x \not\equiv 0 \pmod{n}, \\ (2m+1)/n & \text{se } x \equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Se pusermos

$$B_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{m \in I} e^{j \frac{2\pi}{n} (i-k)m}, \quad (3.17)$$

a condição de limitação em frequência pode ser expressa no domínio do tempo por $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$.

Segue-se uma maneira alternativa de obter este resultado. A DFT $\hat{\mathbf{x}}$ de um vector de B pode ser expressa recorrendo a um outro vector \hat{u}_i , e a um operador de truncatura \mathbf{W} com diagonal \hat{w}_i dada por

$$\hat{w}_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in I, \\ 0 & \text{se } i \notin I. \end{cases}$$

Tem-se $\hat{x}_i = \hat{w}_i \hat{u}_i$, pelo que x_i será a convolução circular de w_i e u_i . Mas a IDFT de \hat{w}_i é dada por

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin[\pi(2m+1)i/n]}{\sin[\pi i/n]},$$

como é fácil verificar. Invocando o teorema da convolução para as transformações de Fourier discretas Papoulis (1987), conclui-se que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k w_{i-k} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \frac{\sin[\pi(2m+1)(i-k)/n]}{\sin[\pi(i-k)/n]} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{u}_k \hat{w}_k e^{-j \frac{2\pi}{n} ki} = \sqrt{n} x_i. \end{aligned} \quad (3.18)$$

É claro que esta relação será também satisfeita se substituirmos \mathbf{u} por outro qualquer vector de B . Em particular, fazendo $u_n = x_n$ em (3.18), chegaríamos outra vez a (3.16).

Estas duas abordagens, apesar de completamente elementares, revestem-se de alguma importância pelas razões seguintes. Em primeiro lugar, o primeiro método pode aplicar-se no caso de L_2 , situação em que conduz à equação de Bateman, como veremos. Em segundo lugar, o segundo método possibilita a obtenção imediata de informação acerca dos valores próprios da matriz \mathbf{B} . Foram estes os motivos pelos quais nos decidimos a incluí-las, aos quais ainda juntamos um outro: o desejo de tornar o assunto tão claro quanto possível a quem não esteja familiarizado com as técnicas e linguagem de processamento de sinal.

3.5.1 Propriedades da matriz \mathbf{B}

As propriedades da matriz \mathbf{B} que se resumem em seguida serão úteis posteriormente.

Propriedade 3.5.1 *Seja q o cardinal de I . A matriz \mathbf{B} é real, simétrica, circulante, positiva semidefinida, idempotente, tem raio espectral unitário, $n - q$ valores próprios nulos e q valores próprios iguais à unidade. Pode ser escrita sob a forma $\mathbf{B} = \beta\mathbf{I} + \mathbf{A}$, onde $\beta = q/n$ é a largura de banda normalizada de \mathbf{B} e \mathbf{A} é uma matriz com diagonal principal nula.*

Pode verificar-se facilmente que $L(x)$ é uma função periódica com período n , (real e par, claro). Logo $L(k) = L(k \bmod n)$ e

$$B_{i+1,k} = L(i - k + 1) = L[(i - k + 1) \bmod n],$$

donde se deduz que a linha $i+1$ de \mathbf{B} se obtém da linha i por meio de um deslocamento circular de uma posição para a direita. Logo \mathbf{B} é circulante. Podemos chegar à mesma conclusão notando que (3.16) ou (3.18) são de facto convoluções circulares.

Finalmente, e como para $\mathbf{x} \in B$ se tem $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, temos, para qualquer \mathbf{u} ,

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}^2\mathbf{u},$$

o que implica $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$. Alternativamente, poderíamos observar que a convolução circular $\mathbf{B}\mathbf{x}$ corresponde no domínio da frequência a uma operação de filtragem passa-baixo, operação esta que é claramente idempotente. Logo \mathbf{B} é idempotente.

Finalmente, devido ao carácter idempotente de \mathbf{B} , os únicos valores possíveis para os seus valores próprios não-nulos são $+1$ or -1 . Logo o raio espectral de \mathbf{B} é unitário.

A multiplicidade dos valores próprios pode deduzir-se pelo seguinte raciocínio. Como \mathbf{B} é circulante, os respectivos valores próprios são iguais aos coeficientes da DFT de qualquer das suas linhas. Mas sabemos que a primeira linha de \mathbf{B} é a IDFT do vector $\hat{\mathbf{w}}$. Logo os valores próprios de \mathbf{B} são as amostras \hat{w}_i , donde se inferem as multiplicidades referidas.

Examinando a equação (3.17) vê-se que os elementos da diagonal principal de \mathbf{B} são todos iguais a q/n , donde se conclui que $\mathbf{B} = \beta\mathbf{I} + \mathbf{A}$ sendo a diagonal principal de \mathbf{A} nula. ■

3.6 O problema de reconstrução em \mathbb{C}^n

3.6.1 Primeiro método

A equação (3.16) é o ponto de partida para a construção de séries de amostragem incompletas nos espaços \mathbb{C}^n .

Seja U o conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ dos índices das amostras desconhecidas de \mathbf{x} . Supomos que os i_k são distintos e que estão ordenados por ordem crescente, de modo que $i_s - i_1$ é uma quantidade proporcional à duração do intervalo durante o qual se perderam amostras.

Fazendo $n = i_k$ em (3.16) obtém-se

$$x_{i_m} = \sum_{k=1}^n x_{i_k} L(i_m - i_k) + \sum_{k \notin U} x_k L(i_m - k) \quad (3.19)$$

que se pode escrever sob forma matricial como

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}, \quad (3.20)$$

onde \mathbf{u} é o vector de dimensão s que contém as amostras desconhecidas, \mathbf{S} é uma submatriz $s \times s$ de \mathbf{B} , e \mathbf{h} é um vector de dimensão s , e que depende apenas do valor das amostras conhecidas. Esta equação pode resolver-se directamente se a matriz $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ não for singular.

Tal como no caso em que considerámos vectores de amostras de funções pertencentes a $B_2(\sigma)$, também aqui a própria forma da equação (3.20) sugere a utilização do método das aproximações sucessivas, que resulta na iteração

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{S}\mathbf{x}_k + \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

Repare-se que $\mathbf{S} = \mathbf{A}_{i_1, \dots, i_n}$ é uma submatriz de \mathbf{A} , e portanto o seu raio espectral não pode exceder a unidade. Esta conclusão não é suficiente para garantir a convergência da sequência definida por (3.21), sem condições adicionais. Essa questão será abordada mais tarde.

3.6.2 Segundo método

Considerem-se os vectores

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{D}\mathbf{x}.$$

O vector \mathbf{a} pode obter-se partindo de \mathbf{x} mantendo aqueles x_i que consideramos desconhecidos, e colocando os restantes a zero. Mais precisamente,

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin U, \\ x_i & \text{se } i \in U. \end{cases}$$

O vector \mathbf{b} é ortogonal a \mathbf{a} e é evidentemente dado por

$$b_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \notin U, \\ 0 & \text{se } i \in U. \end{cases}$$

Em termos práticos \mathbf{b} seria a quantidade observável, sendo todas os seus elementos conhecidos. Em termos de amostragem pode entender-se como o resultado da amostragem de \mathbf{x} com \mathbf{D} .

Como $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ podemos escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b},$$

que é equivalente a

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y},$$

se designarmos por \mathbf{y} o vector observado. Esta equação sugere a utilização do método iterativo

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (3.22)$$

que é uma maneira alternativa de obter o terceiro algoritmo mencionado em Ferreira (1994b), com $\mu = 1$. Pode reintroduzir-se a constante μ definindo

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{y},$$

e considerando a combinação de \mathbf{v}_i e \mathbf{x}_i

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mu\mathbf{v}_i + (1 - \mu)\mathbf{x}_i,$$

onde μ é um real, tipicamente pertencente ao intervalo $(0, 2)$. Se repararmos que os \mathbf{x}_i são limitados em frequência (satisfazem $\mathbf{x}_i = \mathbf{B}\mathbf{x}_i$) chegamos a

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{D})\mathbf{x}_i + \mu\mathbf{B}\mathbf{y}. \quad (3.23)$$

Pode também obter-se este algoritmo usando a abordagem apresentada em Schafer et al. (1981). Isso obriga à definição de operadores de condicionamento e distorção. É fácil verificar que as equações $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{x}$, correspondentes aos operadores \mathbf{B} e $\mathbf{B}\mathbf{D}$, conduzem ao resultado pretendido. O estudo da convergência do algoritmo resultante foi efectuado em Ferreira (1988), e, mais recentemente, em Ferreira (1994b). Neste último trabalho determina-se, entre outras quantidades de interesse, o valor de μ que conduz a uma velocidade de convergência óptima.

3.6.3 Terceiro método

O algoritmo que acabámos de descrever apresenta uma característica que complica desnecessariamente a sua análise, e que tem ao mesmo tempo reflexos negativos do ponto de vista prático. Em primeiro lugar a matriz de iteração não é hermítica. Em segundo lugar a dimensão dos vectores e matrizes envolvidos é n , independentemente do número de amostras desconhecidas, isto é, da densidade de \mathbf{D} .

Vejamus como se pode vencer as duas dificuldades, caindo directamente num algoritmo semelhante a (3.21). Tomemos de novo a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b},$$

e analisemos não o seu membro direito, como fizemos anteriormente, mas sim o esquerdo. Usando $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ chegamos a

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{b},$$

e tomando destas n equações apenas aquelas que correspondem às amostras perdidas ficamos com

$$u_i = \sum_{j \in U} B_{ij}u_j + \sum_{j \notin U} B_{ij}v_j$$

para $i \in U$, que, tal como queríamos provar, é equivalente à iteração (3.21).

3.6.4 Relações entre os métodos

Para esclarecer o relacionamento entre os métodos abordados falta apenas estabelecer a relação entre os métodos de dimensão n do tipo (3.22) ou (3.23) e o método de dimensão reduzida (3.21). Para simplificar a notação mostraremos apenas que a equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}$$

se pode obter de

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{D})\mathbf{x} + \mu\mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Se tivermos o cuidado de preservar a identidade dos membros esquerdo e direito das equações, isto equivale a provar que a iteração

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{D})\mathbf{x}_i + \mu\mathbf{B}\mathbf{y}.$$

é equivalente a

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{u}_i + \mathbf{h}.$$

Comecemos por escrever

$$x_i = \mu \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij}y_j + \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij}x_j$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{D})$. Isto conduz a

$$x_i = \mu \sum_{j \notin U} B_{ij} y_j + \sum_{j \notin U} A_{ij} x_j + \sum_{j \in U} A_{ij} x_j,$$

uma vez que $y_i = 0$ para $i \in U$. Como os dois primeiros termos da equação são conhecidos e $y_i = x_i$ para $i \notin U$ resulta

$$x_i = \sum_{j \notin U} (\mu B_{ij} + A_{ij}) y_j + \sum_{j \in U} A_{ij} x_j.$$

Como $\mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{y}$ para todos os \mathbf{y} tais que $y_i = 0$ para $i \in U$ segue-se que

$$(\mu\mathbf{B} + \mathbf{A})\mathbf{y} = (\mu\mathbf{B} + \mathbf{B} + \mu\mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Logo,

$$x_i = \sum_{j \notin U} B_{ij} y_j + \sum_{j \in U} A_{ij} x_j.$$

Tomando apenas as equações que correspondem a amostras desconhecidas, isto é, aquelas para as quais $i \in U$, chegamos ao resultado pretendido.

3.7 O problema de convergência

Vimos que é necessário caracterizar de algum modo a classe de submatrizes \mathbf{S} de \mathbf{B} que têm raio espectral *inferior* à unidade. Ora, se designarmos por λ_i os valores próprios de \mathbf{S} , os valores próprios de $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ serão da forma $1 - \lambda_i$. Logo, se o maior valor próprio de \mathbf{S} for inferior à unidade, $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ será não-singular.

Começamos o estudo da convergência apresentando a definição seguinte.

Definição 3.7.1 *Uma matriz circulante \mathbf{B} tem k valores próprios contíguos iguais a λ se a matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ definida por $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{F}^H$ contiver k elementos Λ_{ii} contíguos e iguais a λ .*

Note-se que a relação $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{F}^H$ não restringe a matriz \mathbf{B} porque \mathbf{F} diagonaliza todas as matrizes circulantes Davis (1979).

Um exemplo de uma matriz circulante com $k = 2m + 1$ valores próprios contíguos é a matriz que corresponde a um filtro passa-baixo com banda passante

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}.$$

Teorema 3.7.1 *Seja \mathbf{B} uma matriz circulante, semidefinida positiva, de dimensão $n \times n$, com k valores próprios contíguos e nulos. Então, qualquer submatriz de \mathbf{B} de ordem inferior ou igual a $n - k$ é definida positiva.*

Como dissemos atrás, a matriz de Fourier \mathbf{F} diagonaliza todos os circulantes. Os valores próprios de um circulante são os coeficientes da DFT de uma das linhas. A matriz de Fourier reduz uma forma quadrática de matriz circulante à sua forma canónica. Consideremos então a forma quadrática associada a \mathbf{B} . Temos

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{F}^H \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{D} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.24)$$

onde \mathbf{D} é diagonal e tem elementos não-negativos, os quais são as amostras da DFT da primeira linha de \mathbf{B} . Exactamente m destas amostras são nulas, já que \mathbf{B} tem m valores próprios nulos.

Em vez da forma quadrática associada com cada submatriz de ordem $(n - m) \times (n - m)$ de \mathbf{B} , optamos por considerar a restrição da forma (3.24) a subespaços de dimensão $(n - m) \times (n - m)$, caracterizados pelas m equações

$$x_i = 0.$$

Assuma-se que existe um vector \mathbf{v} não-nulo contido neste subespaço, e tal que $f(\mathbf{v}) = 0$. Isto significa, em face de (3.24), que a respectiva DFT se anulava de acordo com as $n - m$ equações

$$\hat{x}_i = 0.$$

Pelo teorema 3.2.1 isto implica $\mathbf{v} = 0$, uma contradição. ■

Teorema 3.7.2 *Seja \mathbf{B} uma matriz de filtragem com k valores próprios contíguos e iguais a 1, e seja \mathbf{x} um vector tal que $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Seja U um subconjunto de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ de cardinalidade não superior a $n - k$. Seja \mathbf{S} a matriz de ordem no máximo $n - k$ que se obtém removendo de \mathbf{B} as linhas e colunas cujos índices não pertencem a U . Designem-se por \mathbf{h} e \mathbf{u} os vectores de dimensão $n - k$ dados por*

$$h_i = \sum_{j \notin U} x_j B_{ij}, \quad u_i = x_i, \quad \text{para } i \in U.$$

Então, as componentes desconhecidas de x_i podem recuperar-se a partir das restantes de forma não-iterativa através de

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \mathbf{h}.$$

Em alternativa podem ser determinadas tomando o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i$$

onde

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{S} \mathbf{u}_i + \mathbf{h},$$

e o limite é independente de $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Como \mathbf{B} tem k valores próprios unitários e contíguos $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ terá obviamente k valores próprios contíguos nulos. Note-se que $\mathbf{B} = \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$ equivale a $\mathbf{I} - \mathbf{B} = \mathbf{F}^H (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \mathbf{F}$.

Pelo teorema 3.7.1 qualquer submatriz principal de $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ de ordem não superior a $n - k$ é definida positiva. A matriz $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ satisfaz esta condição e conseqüentemente é definida positiva. O método não-iterativo de reconstrução está assim justificado.

Para a convergência do método iterativo é necessário e suficiente que $\rho(\mathbf{S}) < 1$. Como $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ é uma submatriz principal de uma matriz hermítica idempotente e definida não-negativa os seus valores próprios só poderiam pertencer ao intervalo $[0, 1]$. Mas acabámos de ver que $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ não é singular, o que exclui a possibilidade de \mathbf{S} ter valores próprios iguais a 1. Mas isto equivale à afirmação $\rho(\mathbf{S}) < 1$, como queríamos provar. ■

3.8 Algoritmos rápidos de reconstrução

Nesta secção procuramos melhorar a convergência do algoritmo iterativo de reconstrução (3.21). Para isso empregaremos os algoritmos baseados nos métodos de Jacobi, JOR, Gauss-Seidel e SOR, que foram já introduzidos no capítulo anterior. Queremos deixar claro que estes não são de forma alguma os únicos métodos utilizáveis com vantagem sobre (3.21). No entanto, por brevidade, e por o assunto se encontrar um pouco fora do âmbito deste trabalho, não nos deteremos sobre o assunto senão o suficiente para provar os resultados mais simples.

A tabela 2.1 resume as características principais dos métodos iterativos que veremos. Mais uma vez remetemos para Varga (1962) ou Young (1971) os leitores interessados nestes e noutros métodos gerais para a solução iterativa de equações.

3.8.1 Solução pelo método de Jacobi

Recorrendo à tabela 2.1 e ao facto de que

$$\mathbf{I} - \mathbf{S} = (1 - \beta)\mathbf{I} - (\mathbf{S} - \beta\mathbf{I})$$

podemos escrever a iteração de Jacobi na forma

$$\mathbf{u}_{i+1} = \frac{1}{1 - \beta}(\mathbf{S} - \beta\mathbf{I})\mathbf{u}_i + \frac{1}{1 - \beta}\mathbf{h}. \quad (3.25)$$

Com os resultados seguintes pretendemos avaliar e comparar a velocidade de convergência do método de Jacobi com o método (3.21).

Lema 3.8.1 *O vector \mathbf{v} é um vector próprio da matriz \mathbf{S} relativamente ao valor próprio λ se e só se for um vector próprio da matriz de Jacobi relativamente ao valor próprio $f(\lambda) = (\lambda - \beta)/(1 - \beta)$.*

Recordemos que β é a largura de banda normalizada da matriz \mathbf{B} da qual \mathbf{S} é uma submatriz principal. É claro que $\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ implica

$$\frac{1}{1-\beta}(\mathbf{S} - \beta\mathbf{I})\mathbf{v} = \frac{\lambda - \beta}{1-\beta}\mathbf{v}.$$

Reciprocamente,

$$\frac{1}{1-\beta}(\mathbf{S} - \beta\mathbf{I})\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$$

pelo que

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = [(1-\beta)\mu + \beta]\mathbf{v}.$$

Invertendo a função $g(\mu) = (1-\beta)\mu + \beta$ obtemos de novo $f(\lambda)$, o que completa a demonstração. ■

O resultado seguinte é uma condição necessária e suficiente para a convergência do método de Jacobi, assumindo que o método (3.21) converge. Uma condição suficiente para tal é dada pelo teorema 3.7.2.

Lema 3.8.2 *Seja β a largura de banda normalizada de \mathbf{B} e seja \mathbf{S} uma submatriz principal convergente de \mathbf{B} . Designemos por λ_{\min} e λ_{\max} o menor e o maior valor próprio de \mathbf{S} , respectivamente. O raio espectral da matriz de Jacobi \mathbf{J} é determinado como se segue.*

(i) *Se os valores próprios de \mathbf{S} são superiores a β o método de Jacobi converge e o raio espectral da matriz de Jacobi é dado por*

$$\rho(\mathbf{J}) = \frac{\lambda_{\max} - \beta}{1 - \beta}.$$

(ii) *Se \mathbf{S} tem valores próprios inferiores a β o raio espectral da matriz de Jacobi é dado por*

$$\rho(\mathbf{J}) = \max \left\{ \frac{\beta - \lambda_{\min}}{1 - \beta}, \frac{\lambda_{\max} - \beta}{1 - \beta} \right\}$$

e o método é convergente se e só se $\beta < (\lambda_{\min} + 1)/2$.

Se $\lambda < 1$ é um valor próprio de \mathbf{S} então $f(\lambda)$ será um valor próprio da matriz de Jacobi. Esta será convergente se e só se $|f(\lambda)| < 1$ para todos os λ . Notemos que $|f|$ se anula para $\lambda = \beta$ e que cresce linearmente quando $\lambda \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow 1$.

Suponha-se em primeiro lugar que todos os valores próprios de \mathbf{S} satisfazem $\lambda > \beta$. Nesse caso a desigualdade $|f(\lambda)| < 1$ é válida sem mais restrições, e o maior dos valores próprios da matriz de Jacobi é dado por $(\lambda_{\max} - \beta)/(1 - \beta)$. Esta quantidade é claramente inferior à unidade. Logo, o método de Jacobi convergirá com raio espectral $(\lambda_{\max} - \beta)/(1 - \beta)$.

Assuma-se agora que alguns dos valores próprios λ de \mathbf{S} satisfazem $\lambda < \beta$. Como $|f|$ cresce quando $\lambda \rightarrow 0$, é suficiente considerar $\lambda = \lambda_{\min}$. Neste caso a condição $|f(\lambda)| < 1$ equivale a $\lambda_{\min} > 2\beta - 1$. ■

O resultado seguinte relaciona a velocidade de convergência do método de Jacobi com a do método do teorema 3.7.2.

Teorema 3.8.1 *Seja \mathbf{B} uma matriz de filtragem com largura de banda normalizada β e \mathbf{S} uma submatriz principal de \mathbf{B} com valores próprios mínimos e máximos $0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < 1$.*

(i) *Se $\beta \leq \lambda_{\min}$ o método de Jacobi associado com \mathbf{S} converge mais rapidamente que a iteração proposta no teorema 3.7.2.*

(ii) *Se $\lambda_{\min} < \beta < (1 + \lambda_{\min})/2$ o método de Jacobi converge. Será mais rapidamente convergente que a iteração do teorema 3.7.2 se e só se*

$$\beta < \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{1 + \lambda_{\max}}.$$

O raio espectral do método do teorema 3.7.2 é λ_{\max} e o da matriz de Jacobi \mathbf{J} é dado pelo lema 3.8.2. Subtraindo um do outro obtemos

$$\lambda_{\max} - \rho(\mathbf{J}) = \frac{\beta}{1 - \beta}(1 - \lambda_{\max}),$$

uma quantidade que é claramente positiva já que $0 < \lambda_{\max} < 1$. Isto prova a primeira proposição. Para demonstrar a segunda suponha-se primeiro que

$$\max \left\{ \frac{\beta - \lambda_{\min}}{1 - \beta}, \frac{\lambda_{\max} - \beta}{1 - \beta} \right\} \quad (3.26)$$

é dado por $(\lambda_{\max} - \beta)/(1 - \beta)$. Como vimos esta expressão é inferior a λ_{\max} . Assuma-se que (3.26) é dado por $(\lambda_{\max} - \beta)/(1 - \beta)$. Então, a expressão

$$\lambda_{\max} - \frac{\beta - \lambda_{\min}}{1 - \beta} = (\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) - \beta(1 + \lambda_{\max})$$

é positiva se e só se $\beta < (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(1 + \lambda_{\max})$. ■

Esta condição é necessária no sentido de não estar contida na condição de convergência $\lambda_{\min} < \beta < (1 + \lambda_{\min})/2$. Note-se que

$$\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{1 + \lambda_{\max}} < \frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2} < \frac{1 + \lambda_{\min}}{2}.$$

3.8.2 Solução pelo método JOR

Este método resulta da combinação linear das estimativas \mathbf{u}_{i+1} e \mathbf{u}_i fornecidas pelo método de Jacobi. Se

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{J}_1 \mathbf{u}_i + \mathbf{a}_1$$

for uma iteração de Jacobi então

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mu (\mathbf{J}_1 \mathbf{u}_i + \mathbf{a}_1) + (1 - \mu) \mathbf{u}_i$$

será, por definição, a iteração do método JOR com constante de relaxação μ . Isto equivale a

$$\mathbf{u}_{i+1} = [(1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{J}] \mathbf{u}_i + \mu\mathbf{h}.$$

Aplicando o método JOR a (3.25) obtém-se imediatamente

$$\mathbf{u}_{i+1} = \left[\left(1 - \mu - \frac{\mu\beta}{1 - \beta} \right) \mathbf{I} + \frac{\mu}{1 - \beta} \mathbf{S} \right] \mathbf{u}_i + \frac{\mu}{1 - \beta} \mathbf{h}. \quad (3.27)$$

Designaremos a matriz de iteração do método JOR por \mathbf{J}_μ .

É fácil relacionar os valores próprios de \mathbf{J}_μ e de \mathbf{S} .

Lema 3.8.3 *O vector \mathbf{v} é um vector próprio de \mathbf{S} para o valor próprio λ se e só se for um vector próprio da matriz de \mathbf{J}_μ para o valor próprio*

$$1 - \mu + \mu \frac{\lambda - \beta}{1 - \beta}.$$

Como anteriormente, β designa a largura de banda normalizada da matriz \mathbf{B} da qual \mathbf{S} é uma submatriz principal. Por outras palavras, um valor próprio λ da matriz de Jacobi corresponde a um valor próprio $1 - \mu + \mu\lambda$ da matriz \mathbf{J}_μ . As situações que podem acontecer são as seguintes.

1. $\mu < 0$. Desinteressante porque corresponde a um aumento do raio espectral com possibilidade de divergência.
2. $\mu = 0$. Desinteressante porque o raio espectral é unitário.
3. $0 < \mu \leq 1$. Resulta num método que converge mais lentamente.
4. $1 < \mu \leq 2$. Este é o caso interessante. Corresponde a métodos convergentes que podem ou não ser mais rápidos que o original.
5. $\mu > 2$. Existe a possibilidade de divergência.

Na prática o valor óptimo de μ determina-se por tentativa e erro. É seguro incrementar μ partindo de $\mu = 1$ até que a velocidade de convergência seja óptima.

3.8.3 Solução pelo método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é semelhante ao de Jacobi mas usando no cálculo de \mathbf{u}_{i+1} os elementos de \mathbf{u}_i porventura já conhecidos.

O método de Gauss-Seidel para as equações $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$ pode exprimir-se em forma matricial como

$$\mathbf{x}_{i+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}\mathbf{x}_i + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{h}.$$

Exige-se que $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{U} - \mathbf{L}$, sendo \mathbf{U} e \mathbf{L} , respectivamente, matrizes estritamente triangulares inferior e superior. A matriz \mathbf{D} é diagonal e a sua diagonal principal é igual à de \mathbf{M} . Designaremos a matriz do método de Gauss-Seidel por \mathbf{G}_1 ,

$$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}.$$

Como todos os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ são dados por $1 - \beta$ podemos identificar $(1 - \beta)\mathbf{I}$ com \mathbf{D} , e as partes triangular inferior e superior de $-\mathbf{S}$ com \mathbf{L} and \mathbf{U} , respectivamente. Logo

$$\mathbf{x}_{i+1} = [(1 - \beta)\mathbf{I} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_i + [(1 - \beta)\mathbf{I} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{h}.$$

Não analisaremos a convergência do método de Gauss-Seidel porque este é um caso particular do método SOR que discutimos de seguida.

3.8.4 Solução pelo método SOR

O método SOR para a solução iterativa das equações $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$ resulta da combinação linear das estimativas $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$ e \mathbf{x}_i fornecidas pelo método de Gauss-Seidel. A estimativa $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$ é definida por

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{U}\mathbf{x}_i + \mathbf{h}.$$

A estimativa \mathbf{x}_{i+1} do método SOR é, por definição,

$$\mathbf{x}_{i+1} = (1 - \mu)\mathbf{x}_i + \mu\tilde{\mathbf{x}}_{i+1},$$

o que equivale a

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{G}_\mu\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_\mu.$$

onde \mathbf{G}_μ designa a matriz de iteração do método SOR, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\mu &= (\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})^{-1} [(1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}] \\ &= (\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1} [(1 - \mu)\mathbf{D} + \mu\mathbf{U}] \end{aligned} \quad (3.28)$$

e \mathbf{k}_μ designa o vector

$$\mathbf{k}_\mu = \mu (\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})^{-1} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{h} = \mu (\mathbf{D} - \mu\mathbf{L})^{-1} \mathbf{h}.$$

O método SOR reduz-se ao método de Gauss-Seidel quando $\mu = 1$.

Para as equações do teorema 3.7.2 tem-se $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$, sendo a diagonal de \mathbf{M} dada por $(1 - \beta)\mathbf{I}$, o que implica que

$$\mathbf{G}_\mu = \left(\mathbf{I} - \frac{\mu}{1 - \beta}\mathbf{L} \right)^{-1} \left[(1 - \mu)\mathbf{I} + \frac{\mu}{1 - \beta}\mathbf{U} \right].$$

A análise de convergência do método SOR é complexa. No entanto, no caso que nos interessa a matriz \mathbf{M} é hermítica, e todos os elementos da sua diagonal principal são positivos. Isto torna possível a aplicação directa do teorema seguinte.

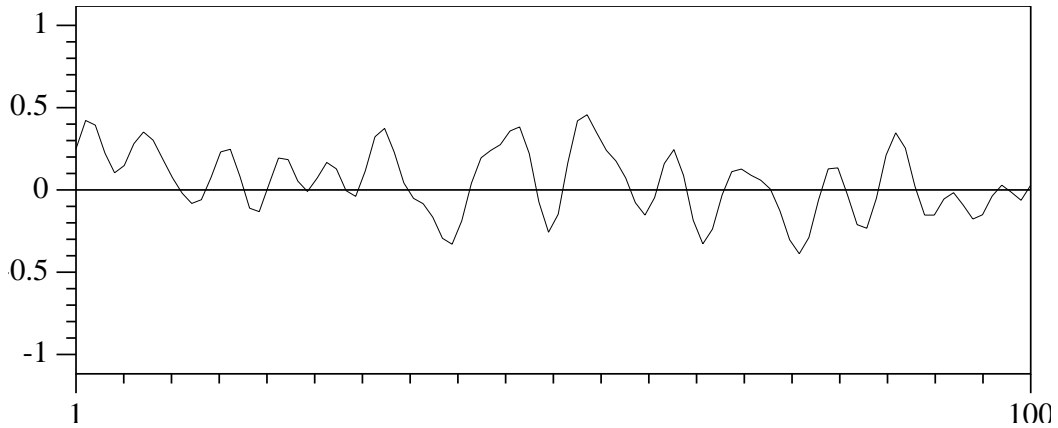


Figura 3.1: Vector de dimensão 100 gerado aleatoriamente e limitado em frequência de modo a ter uma largura de banda normalizada igual a 0.41.

Teorema 3.8.2 (Ostrowski) *Seja $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{E}^H$ uma matriz hermitica $n \times n$. Assuma-se que \mathbf{D} é hermitica e definida positiva, enquanto que $\mathbf{D} - \mu\mathbf{E}$ é não-singular para $0 \leq \mu \leq 2$. Seja $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E})^{-1} [\mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}^H + (1 - \mu)\mathbf{I}]$. Então $\rho(\mathbf{H}) < 1$ se e só se \mathbf{M} for definida positiva e $0 < \mu < 2$.*

Este importante resultado deve-se a Ostrowski e a Reich Varga (1962). O corolário seguinte é uma consequência directa.

Corolário 3.8.1 *Seja \mathbf{B} uma matriz de filtragem com largura de banda normalizada β , e seja \mathbf{S} uma submatriz principal de \mathbf{B} tal que $\rho(\mathbf{S}) < 1$. O método SOR aplicado à solução de $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{h}$ é convergente se e só se $0 < \mu < 2$.*

Notemos que a decomposição de \mathbf{M} em que se baseia o método SOR satisfaz todas as condições do teorema 3.8.2. Comparando (3.29) e o teorema 3.8.2 vemos que \mathbf{H} pode substituir-se pela matriz \mathbf{G}_μ . O corolário é uma mera tradução destes factos.

3.9 Exemplos

Um vector de dimensão 100 foi aleatoriamente gerado e em seguida filtrado, usando um filtro passa-baixo com largura de banda normalizada 0.41. O vector resultante está representado na figura 3.1.

Foi também gerado um vector aleatório binário, isto é, contendo apenas os valores 0 ou 1, com dimensão 100. Este vector determinou os pontos de amostragem, ou seja, quais as amostras do vector representado na figura 3.1 que seriam mantidas e quais as que seriam removidas (anuladas), considerando que as amostras nulas determinam as posições das amostras desconhecidas. A densidade do vector foi fixada em 0.6, o que equivale a 40 por cento de amostras perdidas. O vector está representado na figura 3.2.

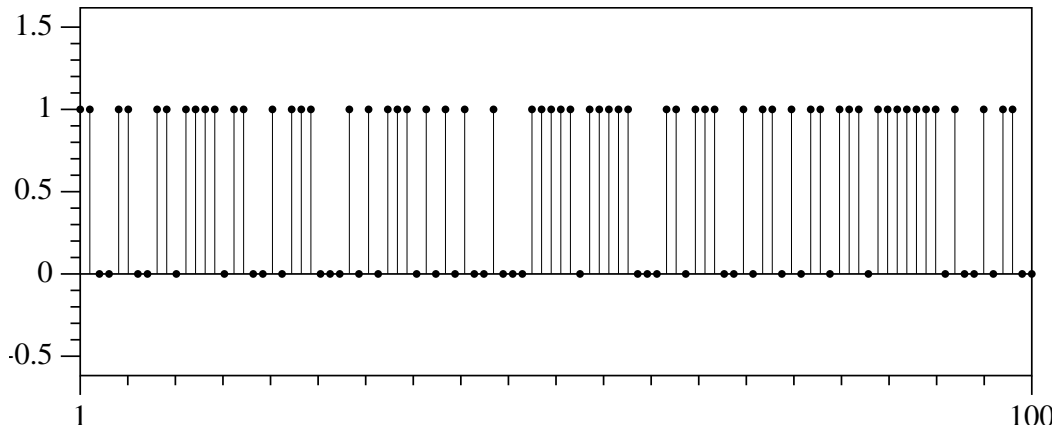


Figura 3.2: Vector amostrador de densidade normalizada 0.6. O processo de amostragem correspondente introduz uma perda de amostras de 40 por cento.

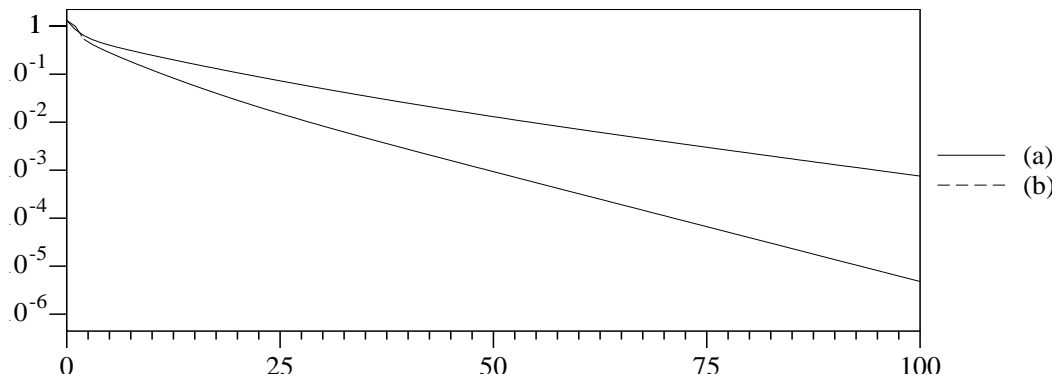


Figura 3.3: Erro *versus* número de iterações para os algoritmos de dimensionalidade n e k , (a) para $\mu = 1$ e (b) para o valor óptimo de μ .

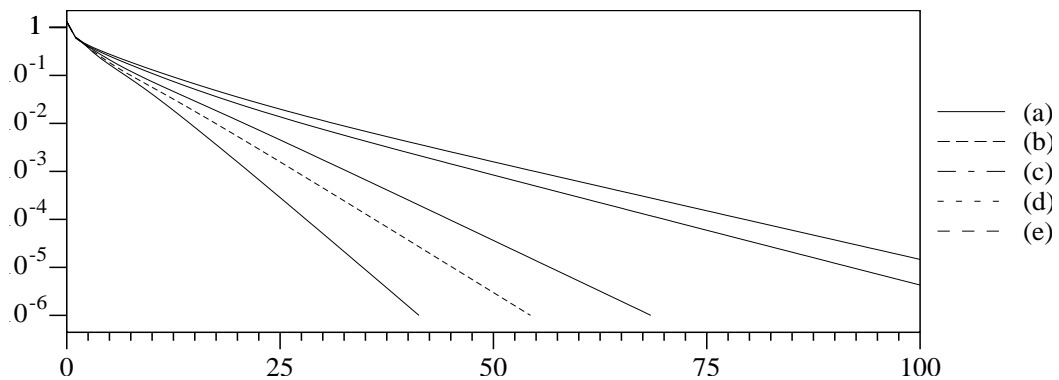


Figura 3.4: Erro *versus* número de iterações para os métodos (a) Jacobi, (b) JOR com $\mu = 1.1$, (c) Gauss-Seidel, (d) SOR com $\mu = 1.1$, (e) SOR com $\mu = 1.2$.

Método	Erro (norma euclideana)				
	20 iterações	40 iterações	60 iterações	80 iterações	100 iterações
a	1.07×10^{-1}	2.49×10^{-2}	7.10×10^{-3}	2.27×10^{-3}	7.54×10^{-4}
b	2.86×10^{-2}	2.72×10^{-3}	3.23×10^{-4}	3.93×10^{-5}	4.79×10^{-6}
c	3.55×10^{-2}	4.15×10^{-3}	6.16×10^{-4}	9.48×10^{-5}	1.46×10^{-5}
d	2.58×10^{-2}	2.46×10^{-3}	2.90×10^{-4}	3.50×10^{-5}	4.28×10^{-6}
e	1.16×10^{-2}	2.54×10^{-4}	5.19×10^{-6}	1.05×10^{-7}	2.13×10^{-9}
f	5.38×10^{-3}	3.71×10^{-5}	2.40×10^{-7}	1.54×10^{-9}	9.92×10^{-12}
g	1.57×10^{-3}	1.56×10^{-6}	1.43×10^{-9}	1.30×10^{-12}	2.58×10^{-15}

Tabela 3.2: Erro após 20, 40, 60, 80 e 100 iterações dos métodos (a) Papoulis-Gerchberg, (b) Papoulis-Gerchberg com relaxação óptima ($\mu = 1.9$), (c) JOR, (d) JOR com relaxação óptima ($\mu = 1.13$), (e) SOR, (f) SOR com $\mu = 1.1$, (g) SOR com $\mu = 1.2$.

A evolução do erro para o algoritmo de dimensão n e para o algoritmo de dimensão igual ao número de amostras desconhecidas é mostrada na figura 3.3. O erro é, por definição a distância euclideana entre os vectores original e reconstruído.

Usando os resultados que apresentámos em Ferreira (1994b) deduzimos em seguida o valor óptimo de μ . A evolução do erro para o algoritmo resultante pode achar-se também na figura 3.3. Tal como é de esperar a taxa de convergência é superior neste caso.

As curvas de erro para os métodos de Jacobi, JOR, Gauss-Seidel e SOR são dadas na figura 3.4, para alguns valores da constante μ . A convergência do método SOR é claramente superior, conduzindo a erros inferiores em várias ordens de grandeza aos métodos representados na figura 3.3. O efeito de μ é claramente visível. Para uma ideia mais precisa dos valores numéricos em causa consulte-se a tabela 3.9.

3.10 Notas

O método iterativo de reconstrução para o caso de \mathbb{C}^n foi pela primeira vez apresentado em Ferreira (1988), onde, no entanto, o contexto e a metodologia são algo diferentes. De facto, nesse trabalho adopta-se a visão patente em artigos anteriores, onde se tratava o caso de funções de $B_2(\sigma)$, e que assentavam em princípios expostos, de maneira bastante geral, em Schafer et al. (1981). A convergência de vários algoritmos dessa classe é estudada em Tom et al. (1981). Na análise o carácter contractivo ou pelo menos não-expansivo dos operadores envolvidos desempenha um papel fundamental.

Acerca dos operadores desse tipo são conhecidos muitos resultados, que desempenham papéis importantes em vários ramos de matemática pura e aplicada. O precursor dos teoremas deste tipo, ditos de *contração*, ou de *ponto fixo*, foi Banach Banach (1922), que introduziu o conceito de operador contractivo em 1920 na sua tese de doutoramento, tendo em vista aplicações à teoria das equações integrais.

Até aos nossos dias, descobriram-se numerosas generalizações Smart (1980) e aplicações destes resultados, pelos quais se obtêm com certa facilidade teoremas de existência, e, no caso de operadores contractivos, teoremas de existência e unicidade. Em qualquer dos casos este princípios conduzem a soluções iterativas, ou aproximações sucessivas, condicionadas pelo conhecimento existente *a priori* acerca das possíveis soluções. Aparentemente, não se revelam muito úteis para o estabelecimento de soluções não-iterativas.

Sobre matrizes circulantes existe um vasto conjunto de resultados. Este facto deve-se por um lado à relativa simplicidade estrutural das matrizes circulantes, que permite a resolução de muitos problemas matriciais clássicos e a sua apresentação em forma explícita. Por outro lado essas matrizes têm vindo a desempenhar um importante papel ao nível das aplicações, em análise numérica e processamento de sinal. O livro de Davis Davis (1979) é uma referência interessante sobre o assunto.

O grupo de permutações que comuta com a matriz de Fourier de ordem n foi descoberto pelo autor antes de ter conhecimento do trabalho muito anterior de C.-Y. Chao Chao (1973). Isto aconteceu por coincidência numa altura em que o autor estudava um tipo generalizado de circulantes no qual o mesmo grupo de permutações desempenha um papel importante.

O teorema 3.4.1 e os resultados citados na secção 3.4 estão obviamente relacionados com o problema geral da interpolação com base num número finito de pontos, e sobre o qual existe um vasto corpo teórico. O problema pode enunciar-se de forma mais geral da seguinte maneira. Seja X um espaço linear de dimensão n e L_1, L_2, \dots, L_n um conjunto de n funcionais lineares definidos em X . Dados $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, existirá algum elemento $f \in X$ tal que

$$L_i(f) = a_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n$? A resposta é afirmativa se os L_i forem independentes no espaço conjugado X^* , ou seja, se o determinante de Gram generalizado $\det[L_i(b_j)]$ não for nulo. No caso particular da secção 3.4 os funcionais L_i são definidos por $L_i(f) = f(a_i)$. Sobre estes assuntos ver Davis (1963).

Capítulo 4

Problemas de interpolação e extrapolação

Neste capítulo estudaremos problemas de extrapolação e interpolação para funções de $B_2(\sigma)$. Mais precisamente, sendo dados os valores que a função $f \in B_2(\sigma)$ assume num dado subconjunto de \mathbb{R} , estudaremos métodos para a determinar para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Apesar da natureza deste problema ser aparentemente distinta da dos problemas anteriormente tratados, utilizaremos na sua abordagem uma metodologia em tudo semelhante à que temos vindo a empregar.

4.1 O método de reconstrução

Seja f uma função de $B_2(\sigma)$, conhecida para todos os valores de t à excepção dos pertencentes a um certo conjunto U . Representaremos por \bar{U} o complemento, em \mathbb{R} , do conjunto U . Pretendemos determinar $\{f(t) : t \in U\}$ partindo apenas do conhecimento de $\{f(t) : t \in \bar{U}\}$ e do facto de que $f \in B_2(\sigma)$.

Assumiremos que se pode exprimir a condição $f \in B_2(\sigma)$ através de uma equação funcional linear da forma

$$f = Bf.$$

Decomponhamos f em duas componentes u e v , de tal modo que $f = u + v$, correspondendo u à parte desconhecida de f e v à parte conhecida. Em termos mais precisos, u e v serão dados pelas expressões $u = T_U f$ e $v = T_{\bar{U}} f$, onde T_U e $T_{\bar{U}}$ designam os operadores de truncatura associados aos conjuntos U e ao seu complemento, respectivamente. Isto significa simplesmente que

$$u(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in U, \\ 0 & \text{se } t \notin U, \end{cases} \quad \text{e} \quad v(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in \bar{U}, \\ 0 & \text{se } t \notin \bar{U}. \end{cases}$$

Esta decomposição é semelhante à que fizemos para os casos de séries de amostragem incompletas em $B_2(\sigma)$ e \mathbb{C}^n , nas quais v corresponderia ao vector de amostras

conhecidas.

Como B é por hipótese um operador linear, é possível exprimir Bf como soma de duas componentes, Bu e Bv , da maneira óbvia

$$u + v = Bu + Bv. \quad (4.1)$$

Note-se que Bu depende apenas da parte desconhecida de f , e Bv da parte conhecida.

Da relação (4.1) resulta, formalmente, uma solução iterativa do problema, obtida pela sequência de aproximações sucessivas definida por

$$u_{n+1} = Bu_n + h,$$

onde $h = Bv - v$ é conhecido. Se o operador inverso de $I - B$ existir resulta imediatamente

$$u = (I - B)^{-1}(B - I)v,$$

o que fornece uma solução directa não-iterativa para o problema.

Acabámos de delinear uma metodologia de solução do problema de reconstrução considerado, à qual não podemos ainda atribuir outra utilidade que não seja a de mera orientação na busca de soluções. Veremos neste capítulo que o princípio esboçado pode ser justificado de forma rigorosa. Porém, a sua utilidade não se esgota com o problema atrás proposto. Logo que formulada de forma suficientemente geral, a metodologia que esboçámos pode inclusivamente servir de plataforma unificadora para uma classe bastante geral de problemas de reconstrução.

4.2 Reconstrução em $B_2(\sigma)$

Retomemos o problema da reconstrução em $B_2(\sigma)$. Seja f uma função de $B_2(\sigma)$, conhecida para todos os valores de t pertencentes a \bar{U} . Partindo apenas do conhecimento de f em \bar{U} e do facto de que $f \in B_2(\sigma)$, existirá uma solução para o problema da reconstrução total de f ?

No caso geral a resposta é obviamente negativa. Considere-se por exemplo o caso em que \bar{U} consiste num único ponto. No entanto, a resposta é afirmativa se \bar{U} contiver um intervalo de medida não-nula, uma vez que f é a restrição à recta real de uma função inteira. Aliás, por um teorema clássico de Paley e Wiener, não só as funções de $B_2(\sigma)$ são restrições à recta real de funções inteiras com certas características, mas a recíproca também é verdadeira. Como o conhecimento de uma função desta classe em qualquer intervalo de medida positiva, implica, por continuação analítica, o seu conhecimento global, concluimos que sempre que \bar{U} contiver um intervalo, o que aliás iremos supor sempre, o problema de reconstrução proposto apresentará uma e uma só solução.

4.2.1 A equação $f = Bf$ em $B_2(\sigma)$ ou equação de Bateman

Para aplicação das ideias desenvolvidas até aqui é necessário provar que existe pelo menos um operador linear contínuo B tal que qualquer função f pertencente a $B_2(\sigma)$ se pode exprimir sob a forma $f = Bf$.

Formalmente, podemos chegar a uma equação do tipo $f = Bf$ exprimindo f em termos da sua transformada de Fourier, e esta novamente em função de f usando o integral de inversão (1.3), ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

Invertendo a ordem de integração, o que requer justificação, chega-se à equação de Bateman

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau, \quad (4.2)$$

ou, noutra notação,

$$f(t) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \operatorname{sinc} \left[\frac{\sigma}{\pi}(t - \tau) \right] d\tau,$$

equações que estão na forma pretendida. Talvez o mais simples dos métodos para o estabelecimento da validade de (4.2) em termos rigorosos consista na aplicação do teorema da convolução à própria equação, o que permite concluir que $f \in L_2$ satisfaz (4.2) se e só se $f \in B_2(\sigma)$. No entanto existem outras soluções f da equação que não pertencem a L_2 . Remetemos o leitor interessado em mais detalhes para as notas no final do capítulo.

4.2.2 O algoritmo iterativo de reconstrução

Recordando que o valor de f é conhecido para qualquer t pertencente a \bar{U} , o complementar em \mathbb{R} de U , temos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_U f(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau \\ &+ \int_{\bar{U}} f(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau, \end{aligned}$$

para qualquer t . Designemos a função indicadora do conjunto U por α , e sejam u e v duas funções definidas por $u(t) = \alpha(t)f(t)$ e $v(t) = [1 - \alpha(t)]f(t)$. Note-se que f é a soma de u e v , e que v é conhecido para todo o t . Logo, podemos escrever, para qualquer t ,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_U u(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau \\ &+ \int_{\bar{U}} v(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau - v(t), \end{aligned}$$

donde resulta, para $t \in U$,

$$u(t) = \int_U u(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau + h(t) \quad (t \in U) \quad (4.3)$$

onde h designa a função conhecida

$$h(t) = \int_{\bar{U}} v(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau.$$

Note-se que $v(t) = 0$ para $t \in U$. A solução da equação (4.3) é a função procurada.

É natural procurar essa solução por iteração de (4.3), a qual define a sucessão de funções

$$u_{n+1}(t) = \int_U u_n(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau + h(t) \quad (t \in U). \quad (4.4)$$

Interessa investigar as condições sob as quais esta sucessão converge, e se possível interpretar, em termos de teoria de sistemas, o processo de aproximação que dela decorre.

É inegável que o problema de extrapolação para funções de $B_2(\sigma)$ tem importantes aplicações práticas em processamento de sinal. No entanto é preciso não esquecer que existem áreas onde tem interesse considerar outras transformadas integrais que não a de Fourier, e outros espaços de funções para além de L_2 . Por isso teria interesse dos pontos de vista teórico e prático uma eventual generalização do problema da extrapolação a funções limitadas em frequência num sentido mais lato, ou considerando outras transformadas como alternativa à transformada de Fourier.

Apresentaremos em seguida uma interpretação do algoritmo de reconstrução em $B_2(\sigma)$. Em seguida daremos alguns exemplos de problemas de reconstrução de diversas naturezas que servirão de motivação para a análise e solução duma classe geral de problemas de reconstrução que incluem a reconstrução em $B_2(\sigma)$ como caso particular.

4.2.3 Interpretação do algoritmo

Partindo da sucessão u_n (4.4), definida apenas para $t \in U$, pode formar-se uma outra, definida para todo o t , e dada por $f_n = u_n + v$.

É claro que $f_n \rightarrow f$ se e só se $u_n \rightarrow u$. Por outro lado f_n e f coincidem em \bar{U} , independentemente de n . Para qualquer t ,

$$f_{n+1}(t) = \int_U u_n(\tau) \frac{\sin[\sigma(t - \tau)]}{\pi(t - \tau)} d\tau + h(t) + v(t). \quad (4.5)$$

Esta iteração pode escrever-se como

$$f_{n+1} = TBf_n + (I - T)v, \quad (4.6)$$

onde T é o operador de truncatura associado ao conjunto U e B designa o operador definido por

$$(Bg)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau.$$

A interpretação do algoritmo pode ser dada nos seguintes termos.

Em geral, a aproximação f_n a f coincide com f em \bar{U} mas não pertence a $B_2(\sigma)$. Se pertencesse, a diferença $f - f_n$ pertenceria também a $B_2(\sigma)$ e seria nula em \bar{U} . Pela analiticidade de $f - f_n$ isto implicaria $f = f_n$, caso que excluimos à partida.

Seja então f_k uma aproximação a f dada por (4.6), e não pertencente a $B_2(\sigma)$. Como sabemos que qualquer solução do problema de reconstrução proposto é pertencente a $B_2(\sigma)$, é natural tentar melhorar a aproximação a f tomando Bf_k para nova aproximação.

Mas agora a nova aproximação Bf_k não coincide com f em \bar{U} . Porque se coincidisse $Bf_k - f$ seria uma função de $B_2(\sigma)$ nula em \bar{U} .

O operador $Gx = Tx + (I - T)v$ aplica uma função x qualquer no espaço das funções que coincidem com v em \bar{U} . Isto sugere a substituição de Bf_k por $TBf_k + (I - T)v$, como nova aproximação f_{k+1} a f , o que, afinal, não é mais do que a relação (4.6).

O algoritmo de reconstrução esboçado deve-se a Papoulis Papoulis (1975) e Gerchberg Gerchberg (1974), e é conhecido como o algoritmo de extrapolação de Papoulis-Gerchberg.

4.2.4 Alternativas à equação de Bateman

Provámos anteriormente que qualquer $f \in B_2(\sigma)$ se pode exprimir sob a forma $f = Bf$ através da equação de Bateman (4.2). Recordemos que a possibilidade de exprimir qualquer função da classe considerada por uma equação da forma $f = Bf$ é essencial para a aplicabilidade da metodologia de solução do problema que temos vindo a estudar.

A equação de Bateman é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)K(x-y) dy, \quad (4.7)$$

e possui um núcleo K que não pertence a L_1 . Na verdade, $K(x) = O(x^{-1})$, o que pode ser desvantajoso para algumas aplicações. Para contornar este problema temos de resolver a seguinte questão. Existirá alguma função $M \in L_1$ tal que $M(x) = O(x^{-2})$, tendo a equação

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)M(x-y) dy, \quad (4.8)$$

as mesmas soluções em L_2 que (4.7)? A resposta é afirmativa, como veremos. É possível fixar condições mais fortes de decréscimo para M , como, por exemplo, $M(x) = O(x^{-k})$ com k tão elevado quanto se queira. É até possível exigir $M(x) = o(x^{-n})$ para qualquer $n > 0$, isto é, que M seja uma função de decréscimo rápido.

A solução do problema para o caso $M(x) = O(x^{-2})$ é dada pelo núcleo

$$M(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \sigma t - \cos(\sigma + \alpha)t}{\alpha t^2},$$

que é equivalente a

$$M(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin(\sigma t + \alpha t/2) \sin(\alpha t/2)}{\alpha t^2}, \quad (4.9)$$

com $\sigma > 0$ e $\alpha > 0$. Esta função é a transformada de Fourier inversa da função contínua

$$\hat{M}(\omega) = \begin{cases} 1 + (\sigma - \omega)/\alpha & \text{se } \omega \in [\sigma, \sigma + \alpha], \\ 1 & \text{se } \omega \in [-\sigma, +\sigma], \\ 1 + (\sigma + \omega)/\alpha & \text{se } \omega \in [-\sigma - \alpha, -\sigma], \end{cases} \quad (4.10)$$

como facilmente se pode verificar. O valor exacto do parâmetro $\alpha > 0$ não é importante. O facto importante é que a equação

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin[(\sigma + \alpha/2)(t - \tau)] \sin[\alpha(t - \tau)/2]}{\alpha(t - \tau)^2} d\tau \quad (4.11)$$

admite as mesmas soluções em L_2 do que a equação de Bateman (4.2). Isto vê-se imediatamente comparando a função \hat{M} dada por (4.10) com

$$\hat{K}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-\sigma, +\sigma], \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-\sigma, +\sigma]. \end{cases} \quad (4.12)$$

No entanto o núcleo $M(x)$ satisfaz as condições $M \in L_1$ e $M(x) = O(x^{-2})$, como desejávamos.

Examinando as equações (4.10) e (4.12) nota-se que tanto \hat{M} como \hat{K} só assumem valor unitário no intervalo $[-\sigma, \sigma]$. Isto é essencial para assegurar que (4.7) e (4.8) admitam soluções de L_2 pertencentes a $B_2(\sigma)$.

A diferença fundamental entre as duas equações é a continuidade de (4.10), que implica imediatamente $M(t) = O(x^{-2})$.

É fácil verificar a possibilidade de construção de soluções análogas a M que respeitem as condições de decréscimo mais fortes que atrás mencionámos. Basta, por exemplo, construir funções com valor unitário em $[-\sigma, \sigma]$ e que decresçam para zero de forma tal que as primeiras n derivadas da função sejam contínuas. O exemplo apresentado será no entanto suficiente para os nossos fins, pelo que não discutiremos esses outros casos, aliás matematicamente mais tratáveis.

4.3 A equação $f = Bf$ para polinómios trigonométricos

Para aplicar o método de reconstrução proposto a polinómios trigonométricos da forma

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.13)$$

é necessário demonstrar a existência de um operador B linear e contínuo tal que $f = Bf$ para qualquer f da forma (4.13).

Como um polinómio trigonométrico não-nulo não pertence a L_2 , os resultados anteriores não são directamente aplicáveis. No entanto, as funções da forma (4.13) são certamente limitadas em frequência, embora num sentido mais geral. Para tornar preciso esse sentido, poderíamos definir e utilizar a transformada de Fourier generalizada no sentido das distribuições. Contudo, para este caso simples, é trivial deduzir a teoria de reconstrução e a forma do operador B correspondente, sem necessidade de definir novos conceitos.

Como os coeficientes c_k são dados por

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

onde $T = 2\pi/\omega_0$, é fácil obter, por substituição em (4.13), as relações

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-n}^n \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) \left[\sum_{k=-n}^n e^{jk\omega_0(t-\tau)} \right] dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) s(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

onde s designa a função

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{jk\omega_0 t} = \begin{cases} (2n+1)/T & \text{se } t \equiv 0 \pmod{T}, \\ \frac{1}{T} \frac{\sin[(2n+1)\omega_0 t/2]}{\sin(\omega_0 t/2)} & \text{se } t \not\equiv 0 \pmod{T}. \end{cases}$$

O algoritmo de reconstrução pode formular-se partindo da equação integral

$$u(t) = \int_U u(\tau) s(t-\tau) d\tau + h(t),$$

onde h designa, neste caso, a função

$$h(t) = \int_{\bar{U}} v(\tau) s(t-\tau) d\tau.$$

Como é hábito, U designa o conjunto de valores de t para os quais a função f é conhecida, e o conjunto \bar{U} é o complemento de U .

Note-se que, sendo f uma função periódica, os conjuntos U e \bar{U} serão sempre compactos. Isto tem vantagens práticas, se pensarmos em processos específicos de solução da equação integral. Doutra modo, pelo menos um dos integrais seria definido sobre um conjunto de medida infinita, tornando mais difícil a solução, do ponto de vista computacional.

4.4 A equação $f = Bf$ para outras transformadas integrais

Iremos de seguida colocar um problema de reconstrução de um tipo algo diferente. Suponhamos que f é tal que para uma certa função complexa K das variáveis t e τ se tem

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K(t, x) dx. \quad (4.14)$$

Como exemplo, citamos o caso que surge por utilização da transformada de Hankel clássica, definida por

$$\check{f}(y) = \int_0^{+\infty} f(x)\sqrt{xy}J_\mu(xy) dx \quad (0 < y < +\infty),$$

onde $J_\mu(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem μ . Sabe-se que $\sqrt{xy}J_\mu(xy) = O(x^{\mu+1/2})$ quando $x \rightarrow 0^+$ e $\sqrt{xy}J_\mu(xy) = O(1)$ quando $x \rightarrow +\infty$. Assumiremos que $f \in L_1(0, +\infty)$ e $\mu > -1/2$. Então, se f for de variação limitada, temos a fórmula de inversão

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \check{f}(y)\sqrt{yx}J_\mu(yx) dy \quad (0 < x < +\infty).$$

Diremos que uma função f que satisfaça estas condições é *limitada em frequência no sentido da transformada de Hankel* se puder ser representada por

$$f(x) = \int_0^{+\sigma} \check{f}(y)\sqrt{yx}J_\mu(yx) dy \quad (0 < x < +\infty).$$

Procedendo como para o caso da transformada de Fourier temos

$$f(x) = \int_0^{+\sigma} \left[\int_0^{+\infty} f(u)\sqrt{uy}J_\mu(uy) du \right] \sqrt{yx}J_\mu(yx) dy \quad (0 < x < +\infty)$$

donde resulta a representação

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(u)\sqrt{ux}L(u, x) du,$$

que está na forma (4.14) com $K(u, x) = \sqrt{ux}L(u, x)$ e

$$L(u, x) = \int_0^{+\sigma} yJ_\mu(uy)J_\mu(xy) dy.$$

A justificação da inversão da ordem de integração é consequência directa da convergência absoluta dos integrais em causa e do teorema de Fubini.

A função $L(u, x)$ pode ser reduzida à forma mais explícita

$$L(u, x) = \begin{cases} \sigma \frac{uJ_\mu(\sigma x)J'_\mu(\sigma u) - xJ_\mu(\sigma u)J'_\mu(\sigma x)}{x^2 - u^2} & \text{se } u \neq x, \\ \frac{\sigma^2}{2} [J_\mu^2(\sigma x) - J_{\mu-1}(\sigma x)J_{\mu+1}(\sigma x)] & \text{se } u = x, \end{cases}$$

utilizando as propriedades das funções de Bessel.

Definamos os conjuntos U e \bar{U} como anteriormente. Então, procedendo como no caso em que

$$K(t, \tau) = \frac{\sigma}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\sigma}{\pi}(t - \tau)\right],$$

obtemos

$$u(t) = \int_U u(\tau)K(t, \tau) d\tau + h(t) \quad (t \in U). \quad (4.15)$$

onde as funções u e v são definidas da maneira habitual. Paralelamente ao que acontecia no caso anterior temos

$$h(t) = \int_{\bar{U}} v(\tau)K(t, \tau) d\tau.$$

A solução do problema passa por isso pela solução da equação integral (4.15), podendo-se para isso considerar a sucessão de funções

$$u_{n+1}(t) = \int_U u_n(\tau)K(t, \tau) d\tau + h(t).$$

A semelhança formal com os casos anteriores é clara.

4.5 Análise do problema de reconstrução

Os problemas que temos vindo a considerar apresentam certas características comuns que sugerem o seu tratamento unificado recorrendo à teoria das equações integrais. Todas as equações obtidas anteriormente são casos particulares da equação geral de Fredholm de segunda espécie

$$f(t) = \int_U K(t, \tau)f(\tau) d\tau + h(t), \quad (4.16)$$

se as funções K e h e o intervalo U forem escolhidos de acordo com a natureza de cada problema. As equações integrais deste tipo foram estudadas de modo exaustivo, e a sua estrutura é hoje bem conhecida. Veja-se Courant e Hilbert (1953), Hochstadt (1973), Smithies (1970), Tricomi (1985). Começamos pelo seguinte teorema.

Teorema 4.5.1 *Seja $U = [a, a + T]$ um intervalo de comprimento T e $K(\tau, t)$ uma função contínua definida em $U \times U$. Então, se*

$$\sup_{t, \tau \in U} |K(t, \tau)| < \frac{1}{T},$$

a equação integral (4.16) tem uma e uma só solução f contínua em U para qualquer função h contínua em U . Nessas condições a solução f é dada pelo limite

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t).$$

A convergência é uniforme e as funções u_n são definidas por

$$u_{n+1}(t) = \int_U K(t, \tau) u_n(\tau) d\tau + h(t)$$

para $t \in U$.

A demonstração é muito simples. Em primeiro lugar mostraremos que a sequência u_n é uma sequência de Cauchy na norma da convergência uniforme.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_c &= \sup_{t \in U} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \\ &\leq \sup_{t \in U} \left| \int_U K(t, \tau) [u_n(\tau) - u_{n-1}(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq T \sup_{t, \tau \in U} |K(t, \tau)| \sup_{t \in U} |u_n(t) - u_{n-1}(t)|. \end{aligned}$$

Como

$$T \sup_{t, \tau \in U} |K(t, \tau)| < 1,$$

resulta

$$\|u_{n+1} - u_n\|_c \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_c,$$

onde $0 < \alpha < 1$. Logo a sequência u_n é uma sequência de Cauchy, tal como queríamos provar.

Como o espaço C é completo existe uma função $u \in C$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

e como é fácil verificar

$$u(t) = \int_U K(t, \tau) u(\tau) d\tau + h(t),$$

o que prova o teorema. ■

Como corolário temos o seguinte resultado simples para interpolação de funções de $B_2(\sigma)$.

Corolário 4.5.1 *Seja $U = [a, a+T]$ um intervalo de comprimento T e f uma função pertencente a $B_2(\sigma)$. Se $\sigma T < \pi$, o segmento de f com suporte em U , isto é, $\{f(t) : t \in U\}$, coincide com o limite*

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

sendo a convergência uniforme. As funções u_n são definidas por

$$u_{n+1}(t) = \int_U \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} u_n(\tau) d\tau + h(t)$$

para $t \in U$.

É claro que

$$\sup_{t, \tau \in U} \left| \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} \right| = \frac{\sigma}{\pi}.$$

Logo, pelo teorema 4.5.1, o corolário é verdadeiro. ■

O resultado seguinte é semelhante mas aplica-se a polinômios trigonométricos.

Corolário 4.5.2 *Seja $U = [a, a+b]$ um intervalo de comprimento b e f uma função da forma*

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega_0 t},$$

com período fundamental $T = 2\pi/\omega_0$. Se $b < T/(2n+1)$ o segmento de f com suporte em U é dado pelo limite

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

sendo a convergência uniforme. As funções u_n são definidas por

$$u_{n+1}(t) = \int_U \frac{1}{T} \frac{\sin[(2n+1)\omega_0(t-\tau)/2]}{\sin(\omega_0(t-\tau)/2)} u_n(\tau) d\tau + h(t)$$

para $t \in U$.

Neste caso a desigualdade fundamental é

$$\sup_{t, \tau \in U} \left| \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{j\omega_k(t-\tau)} \right| = \frac{2n+1}{T},$$

como é óbvio. ■

Até aqui temos considerado apenas equações integrais cujo núcleo é uma função contínua. Discutiremos em seguida um dos processos de remover essa restrição. Faremos uso de alguns conceitos que passamos a definir.

Definição 4.5.1 A função $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de duas variáveis reais é um núcleo de L_2 se o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 dx dy$$

existir.

Note-se que, pelo teorema de Fubini, os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 dy$$

existem e definem funções de L_2 .

Exigir que uma função K seja um núcleo de L_2 é restringi-la muito menos do que o que foi feito no teorema 4.5.1, uma vez que abandonámos as exigências de continuidade e de existência de um majorante finito.

Teorema 4.5.2 Seja U um subconjunto de \mathbb{R} e K um núcleo de $L_2(U)$ tal que

$$\int_U \int_U |K(x, y)|^2 dx dy \leq \alpha^2 < 1.$$

Então, a equação integral

$$f(t) = \int_U K(t, x)f(x) dx + h(t)$$

tem uma e uma só solução $f \in L_2(U)$ para qualquer função $h \in L_2(U)$. A solução f é dada pelo limite

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

na norma de $L_2(U)$, sendo as funções u_k definidas pela expressão

$$u_{n+1}(t) = \int_U K(t, \tau)u_n(\tau) d\tau + h(t),$$

válida para $t \in U$. Para u_0 pode tomar-se qualquer função de $L_2(U)$.

A demonstração pode ser conduzida da seguinte maneira. Como a função $\phi(x) = K(t, x)$ pertence a $L_2(U)$ conclui-se pela desigualdade de Schwarz que

$$\int_U |K(t, x)g(x)| dx \leq \left(\int_U |K(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_U |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

para qualquer $g \in L_2(U)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_2^2 &= \int_U |u_n(t) - u_{n-1}(t)|^2 dt \\ &= \int_U \left| \int_U K(t, x) [u_n(x) - u_{n-1}(x)] dx \right|^2 dt \\ &\leq \int_U \int_U |K(t, x)|^2 dx dt \int_U |u_n(x) - u_{n-1}(x)|^2 dx \\ &\leq \alpha^2 \|u_{n+1} - u_n\|_2^2. \end{aligned}$$

A sequência u_n é pois uma sequência de Cauchy, verificando-se, de modo semelhante ao que acontecia para o caso anterior,

$$\|u_{n+1} - u_n\|_2 \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_2.$$

Como $L_2(U)$ é um espaço completo, existe uma função $f \in L_2(U)$ tal que

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t),$$

que se pode verificar ser uma solução da equação integral. ■

4.5.1 Relação com os teoremas de ponto fixo

Examinando as demonstrações dos teoremas 4.5.1 e 4.5.2 nota-se um certo paralelismo que está longe de ser accidental. Uma formulação mais abstracta do problema de reconstrução abordado neste capítulo mostra que os dois casos estudados podem ser vistos como aspectos de um único problema, e não como dois problemas distintos. O teorema seguinte ilustra bem esta perspectiva.

Definição 4.5.2 (operador contractivo) *O operador $C : M \rightarrow M$ definido num espaço métrico não-vazio $M(U, d)$ é contractivo se existir um real positivo $\lambda < 1$ tal que, para quaisquer dois elementos x e y do espaço M , seja verdadeira a desigualdade*

$$d(Cx, Cy) \leq \lambda d(x, y). \quad (4.17)$$

Observe-se que um operador contractivo é necessariamente contínuo.

Definição 4.5.3 (ponto fixo) *Seja C um operador definido num espaço métrico M . Se $x \in M$, e se $x = Cx$, então x é um ponto fixo de C em M .*

O mais simples dos resultados sobre a existência de pontos fixos foi enunciado e demonstrado pela primeira vez por Banach Banach (1922).

Teorema 4.5.3 (Banach) *Seja $M(U, d)$ um espaço métrico não-vazio e completo. Seja $C : M \rightarrow M$ um operador contractivo definido em M . Então, a equação $x = Cx$ tem uma e uma só solução x em M . Essa solução é dada pelo limite*

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n y,$$

para qualquer y pertencente ao domínio de C .

Seja y um elemento do domínio de C . Mostraremos em primeiro lugar que para qualquer real $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N > 0$ tal que para quaisquer inteiros $n \geq N$ e $k > 0$ se tem

$$d(C^n y, C^{n+k} y) < \epsilon.$$

Usando a desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned} d(C^n y, C^{n+k} y) &\leq d(C^n y, C^{n+1} y) \\ &+ d(C^{n+1} y, C^{n+2} y) + \dots + d(C^{n+k-1} y, C^{n+k} y). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mas, como C é contractivo,

$$d(C^m y, C^{m+1} y) \leq \lambda d(C^{m-1} y, C^m y)$$

se $m \geq 2$, donde

$$d(C^m y, C^{m+1} y) \leq \lambda^m d(y, C y).$$

Desta equação e de (4.18) conclui-se que

$$d(C^n y, C^{n+k} y) \leq (\lambda^n + \dots + \lambda^{n+k}) d(y, C y) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(y, C y). \quad (4.19)$$

Pode tornar-se o segundo membro de (4.19) arbitrariamente pequeno escolhendo apropriadamente n , porque $0 < \lambda < 1$. Como $M(U, d)$ é um espaço não-vazio e completo, a sequência $C^n y$ tem um limite em U . Isto completa a primeira parte da demonstração.

Resta mostrar que o limite da sequência $C^n y$ é um ponto fixo de C . Isto é uma consequência directa da continuidade de C , já que

$$C \lim_{n \rightarrow \infty} C^n y = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{n+1} y = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n y,$$

como queríamos provar. ■

Note-se que os teoremas 4.5.1 e 4.5.2 são casos especiais do teorema do ponto fixo de Banach. O teorema 4.5.1 diz respeito ao espaço métrico das funções contínuas num intervalo finito U , com a métrica induzida pela norma da convergência uniforme, isto é, com

$$d(a, b) = \|a - b\|_c = \sup_{t \in U} |a(t) - b(t)|.$$

O teorema 4.5.2 diz respeito ao espaço métrico das funções de quadrado absolutamente integrável, com a métrica induzida pela norma de L_2 , ou seja,

$$d(a, b) = \|a - b\|_2 = \left(\int_U |a(t) - b(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

É claro que a formulação mais abstracta de Banach se aplica às duas situações.

4.6 Reconstrução em intervalos de medida qualquer

Até aqui temos considerado apenas um tipo especial de problemas de reconstrução, em que a função a reconstruir é desconhecida num intervalo de medida finita. Iremos agora discutir o caso matematicamente mais delicado em que a função a reconstruir é desconhecida num conjunto de medida positiva arbitrária, possivelmente infinita. Este é o caso mais interessante do ponto de vista das aplicações, uma vez que é impraticável medir uma grandeza física que varie em função do tempo durante um período infinito.

4.6.1 Reconstrução quando o núcleo pertence a L_2

Começamos por estudar os algoritmos de reconstrução cujo núcleo K é obtido partindo de uma função que pertence a L_2 mas não a L_1 . É o caso do núcleo da equação de Bateman, e logo do algoritmo descrito pela equação (4.4).

Lema 4.6.1 *Se $g \in L_2$, $f \in L_2$, e pelo menos uma das transformadas de Fourier \hat{f} ou \hat{g} pertence a L_∞ , então a função*

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(y-x) dx$$

pertence a L_2 .

Como f e g pertencem a L_2 as funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx \quad \text{e} \quad \hat{f}(y)\hat{g}(y)$$

são em geral transformadas de Fourier no sentido de que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\hat{g}(y)e^{-jxy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y) dy$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$ Titchmarsh (1948).

Como f e g são funções de L_2 o mesmo se passará com as respectivas transformadas de Fourier, pelo que $\hat{f}\hat{g}$ será uma função de L_1 . É claro que se uma das funções \hat{f} ou \hat{g} pertencer a L_∞ o produto $\hat{f}\hat{g}$ pertencerá a L_2 . De facto, assumindo por exemplo que \hat{g} pertence a L_∞ , tem-se a majoração $|\hat{f}\hat{g}|^2 \leq A|\hat{f}|^2$, onde $A = \|\hat{g}\|_\infty$. Daqui resulta imediatamente que $\hat{h} = \hat{f}\hat{g} \in L_2$. Pelo teorema de Plancherel $h \in L_2$, como se queria demonstrar. ■

Este resultado permite concluir que qualquer núcleo de convolução $K(x-y)$ tal que $K \in L_2$ e cuja transformada de Fourier seja uniformemente limitada define uma aplicação de L_2 em L_2 . Estas hipóteses são satisfeitas, por exemplo, pelos operadores

da forma $F^{-1}TF$, onde T é um operador de truncatura. O mais simples desses operadores tem o núcleo da equação de Bateman

$$K(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \sigma t}{t},$$

cuja transformada de Fourier é a função característica do intervalo $[-\sigma, \sigma]$. Note-se que $K \in L_2$ mas $K \notin L_1$. O caso em que $K \in L_1$ será tratado posteriormente.

Teorema 4.6.1 *Seja U um subconjunto mensurável de \mathbb{R} , com medida finita ou infinita. Seja f uma função pertencente a $B_2^n(\sigma)$. Considere-se a função h definida por*

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

para $t \in U$, e onde K designa a função

$$K(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \sigma t}{t}.$$

Então, existe um operador R linear e contínuo tal que a restrição u de f a U é dada por $u = Rh$.

Note-se que h depende apenas da restrição de f ao complemento de U . Logo, este resultado garante que a restrição de uma função $f \in B_2^n(\sigma)$ a um conjunto de medida finita ou infinita se pode obter com base no conhecimento da função no complemento desse conjunto. O facto importante é que a reconstrução se pode efectuar utilizando um operador linear e contínuo.

Resta ainda dizer que este resultado é válido para outras funções K além da indicada. Em particular a validade mantém-se para funções que sejam transformadas de Fourier de funções características de subconjuntos compactos de \mathbb{R} , ou seja, para todos os operadores $F^{-1}TF$ (filtros lineares) limitados em frequência.

Para demonstrar o resultado é conveniente definir a função $u(t)$ para qualquer real t mediante a condição $u(t) = 0$ para $t \notin U$. O conjunto das funções $u \in L_2$ tais que $u(t) = 0$ para $t \notin U$ formam um subespaço de L_2 , que designaremos por $L_2(U)$.

Como K pertence a L_2 , $\hat{K} \in L_\infty$ e $f \in L_2$, a função

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) u(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

pertence a L_2 , pelo lema 4.6.1. É claro que g é limitada em frequência, pelo que $g \in B_2(\sigma)$. Logo, o operador P definido por $(Pu)(t) = g(t)$ aplica $L_2(U)$ em $B_2(\sigma)$. Obviamente P é linear e contínuo.

A norma da extensão de P a L_2 é unitária (P é uma projecção em L_2). No entanto

$$\|P\| = \sup_{f \in B_2^n(\sigma), f \neq 0} \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

é uma quantidade estritamente menor que a unidade. Note-se que as funções de $L_2(U)$, que por definição se anulam fora de U , não são limitadas em frequência devido a esse facto. Logo, pelo teorema de Parseval,

$$\|Px\| = \|g\| = \|\hat{g}\| < \|\hat{x}\| = \|x\|.$$

Mas se P é um operador linear definido num espaço de Banach, e tem norma inferior à unidade, então $(I - P)^{-1}$ existe, é linear e contínuo Kreyszig (1978), o que prova o teorema. ■

O resultado seguinte fornece um processo de obter aproximações à solução.

Teorema 4.6.2 *Seja U um subconjunto mensurável de \mathbb{R} , com medida finita ou infinita. Seja f uma função pertencente a $B_2^n(\sigma)$. Considere-se a função h definida por*

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{U}} K(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

para $t \in U$, e onde K designa a função

$$K(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \sigma t}{t}.$$

A restrição de f a U é dada pelo limite

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

sendo a convergência uniforme. As funções u_n são definidas por

$$u_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) u_n(\tau) d\tau + h(t)$$

para $t \in U$. Para primeira aproximação u_0 pode tomar-se qualquer elemento de $L_2(U)$.

A demonstração é simples. Com a notação do teorema anterior,

$$R = (I - P)^{-1}.$$

Como $\|P\| < 1$, temos Kreyszig (1978)

$$R = (I - P)^{-1} = I + P + P^2 + \dots$$

com convergência em norma, pelo que a sequência de funções

$$Rh = (I - P)^{-1}h = h + Ph + P^2h + \dots$$

convergir para u em norma. A iteração

$$u_{n+1} = Pu_n + h$$

pode escrever-se como

$$u_{n+1} = P^{n+1}u_0 + (P^n + P^{n-1} + \cdots + I)h,$$

com $\|P\| < 1$, donde se conclui que o limite da sucessão u_n é de facto $u = Rh$, independentemente de u_0 . A convergência uniforme é uma consequência da desigualdade de Schwarz. De facto, como K , u_i e u são funções de L_2

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u(t)| &\leq \int_U |K(t-x)| |u_n(x) - u(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |K(t-x)| |u_n(x) - u(x)| dx \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t-x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &= \|K\|_2 \|u_n - u\|_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_{n+1}(t) - u(t)| \leq \|K\|_2 \|u_n - u\|_2,$$

pelo que a convergência é uniforme uma vez que $u_n \rightarrow u$ em norma. ■

4.6.2 Reconstrução quando o núcleo pertence a L_1

Estudaremos agora algoritmos de reconstrução com núcleo K tal que $K(x, y) = M(x - y)$ em que $M \in L_1$. Para sermos mais precisos, tomaremos para núcleo a função definida por (4.9). No entanto, os resultados que obteremos são válidos para qualquer função M gerada por uma técnica semelhante à que usámos para obter (4.9).

Teorema 4.6.3 *Seja U um subconjunto mensurável de \mathbb{R} , com medida finita ou infinita. Seja f uma função pertencente a $B_2^n(\sigma)$. Considere-se a função h definida por*

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

para $t \in U$, sendo a função K dada por

$$K(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin(\sigma t + \alpha t/2) \sin(\alpha t/2)}{\alpha t^2},$$

onde α é qualquer real positivo. Então existe um operador R linear e contínuo tal que a restrição u de f a U é dada por $u = Rh$.

Seja T o operador definido por

$$(Tu)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (t \in U).$$

Designemos por v a função Tu . Como $K \in L_1$, o operador T aplica qualquer função $u \in L_2(U)$ noutra função $v = Tu \in L_2(U)$. Esta afirmação pode justificar-se com base nas desigualdades

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U |u(y)|^2 |K(t-y)| dy \int_U |K(t-y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U |u(y)|^2 |K(t-y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |K(y)| dy, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \int_U |v(t)|^2 dt &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(y)| dy \int_U |u(y)|^2 dy \int_U |K(t-y)| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U |u(y)|^2 dy \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)| dx \right)^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Note-se que $K \in L_1$ implica $|K(x)|^{1/2} \in L_2$. A equação (4.20) é uma consequência deste facto e da desigualdade de Schwarz. Duas desigualdades semelhantes a estas são dadas (sem demonstração) em Titchmarsh (1948). Para mais detalhes veja-se Butzer e Nessel (1971), ou Dunford e Schwartz (1957) e Dunford e Schwartz (1971).

É possível estabelecer um majorante para $\|T\|$ em termos de $\|K\|_1$ com base em (4.21). Contudo, é preferível proceder da seguinte maneira. Consideremos a extensão de u a \mathbb{R} definida pela condição $u(t) = 0$ para $t \notin U$. Como $K \in L_1$ e $u \in L_2$, as funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)K(t-x) dx \quad \text{e} \quad \hat{u}\hat{K}$$

pertencem a L_2 e são transformadas de Fourier no sentido de Plancherel Titchmarsh (1968). Note-se que a função u não pode ser limitada em frequência uma vez que é identicamente nula no conjunto U . Pelo teorema de Parseval

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(x)\hat{K}(x)|^2 dx \\ &< \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Note-se que $|\hat{K}| \leq 1$, e que \hat{K} tem suporte compacto enquanto que \hat{u} não. Temos, portanto,

$$\|v\|_2^2 < \|u\|_2^2.$$

Na verdade,

$$\|T\| = \sup_{f \in B_2^c(\sigma), f \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} < 1.$$

O resultado pode agora provar-se usando o argumento utilizado na demonstração do resultado análogo em L_2 , teorema 4.6.1. ■

No teorema seguinte provamos que o segmento u de f se pode aproximar uniformemente de maneira iterativa.

Teorema 4.6.4 *Seja U um subconjunto mensurável de \mathbb{R} , com medida finita ou infinita. Seja f uma função pertencente a $B_2^n(\sigma)$. A restrição u de f a U é dada pelo limite*

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

sendo a convergência uniforme. As funções u_n são definidas por

$$u_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U K(t - \tau) u_n(\tau) d\tau + h(t)$$

para $t \in U$. Pode tomar-se para núcleo K a função definida pela equação (4.9), isto é,

$$K(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin(\sigma t + \alpha t/2) \sin(\alpha t/2)}{\alpha t^2},$$

onde α é qualquer real positivo. Para primeira aproximação u_0 pode tomar-se qualquer elemento de $L_2(U)$.

A demonstração do teorema 4.6.2 é directamente aplicável a este caso, com uma pequena diferença. Se K não pertencer a L_2 a desigualdade de Schwarz não é aplicável, pelo que se terá de recorrer à desigualdade de Hölder, com $p = 1$ e $q = \infty$, para estabelecer a convergência uniforme. No presente caso, e como K é dado pela equação (4.9), tem-se $K \in L_1 \cap L_2$, pelo que não é necessária tal modificação. ■

4.7 Notas

O algoritmo iterativo a que chegámos partindo da equação de Bateman é equivalente ao algoritmo de extrapolação de Papoulis-Gerchberg, que parece ter sido primeiramente descoberto por Papoulis. Contudo, a primeira descrição do algoritmo a aparecer numa revista científica é da autoria de Gerchberg Gerchberg (1974), a propósito de um problema de reconstrução de imagem. A primeira demonstração da convergência do algoritmo foi dada por Papoulis Papoulis (1975), utilizando as propriedades das funções esferoidais prolatas. Aliás, os primeiros trabalhos onde se aborda o problema da extrapolação de funções limitadas em frequência e de quadrado integrável devem-se a Slepian e Pollak Slepian e Pollak (1961), e Landau e Pollak Landau e Pollak (1961), que propõem um método de extrapolação baseado na biortogonalidade das funções esferoidais prolatas.

O trabalho de Cadzow Cadzow (1979), onde já se encontram preocupações práticas de cálculo e uma solução não-iterativa, segue uma perspectiva diferente, tirando partido da natureza projectiva dos operadores de truncatura e filtragem. O algoritmo de dupla projecção de Youla Youla (1978) é uma generalização do algoritmo de Papoulis-Gerchberg, formulada em espaços de Hilbert, com aplicações em reconstrução de imagem.

Sabri e Steenaart propuseram Sabri e Steenaart (1978) (não sem alguma polémica, veja-se Sabri e Steenaart (1980), Cadzow (1981), Sabri e Steenaart (1981)) uma versão discreta

de um algoritmo semelhante a partir do qual deduzem por passagem ao limite uma solução não-iterativa para o problema. Contudo, Jain e Ranganath Jain e Ranganath (1981) provaram que a matriz de extrapolação proposta em Sabri e Steenaart (1978) não existe, e que a solução correcta é dada pela pseudo-inversa de uma certa matriz singular.

Numa série de trabalhos, Sanz e Huang estudaram diversos aspectos do problema da extrapolação, tratando inclusivamente de soluções não-iterativas Sanz e Huang (1984), mas formulando o problema de modo tal que este fica dependente da solução de uma equação integral de Fredholm de primeira espécie. A ideia fundamental surge da equação

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

na qual se consideram apenas valores de t pertencentes a um intervalo $[a, b]$ onde f é, por hipótese, conhecida. Esta equação é uma equação integral de Fredholm de primeira espécie, para a função desconhecida \hat{f} . A desvantagem desta formulação reside, é claro, nas dificuldades habituais de solução das equações de primeira espécie. Veja-se, acerca destas dificuldades, as notas em Courant e Hilbert (1953).

Sandberg estabeleceu Sandberg (1963) uma importante generalização de resultados anteriores de Landau Landau (1960) e Landau e Miranker Landau e Miranker (1961) sobre a reconstrução de funções de L_2 limitadas em frequência, após passagem por uma não-linearidade e filtragem. É conhecido que o resultado de Sandberg é suficientemente geral para dele se poder extrair a solução de vários problemas de reconstrução, incluindo um problema de amostragem não-uniforme e não-instantânea Wiley (1978b), e um problema matematicamente semelhante a este Wiley et al. (1977) sobre desmodulação de sinais modulados em frequência. No entanto, não é possível extrair do teorema de Sandberg o algoritmo de Papoulis-Gerchberg Wiley (1979), apesar da semelhança formal entre os dois resultados. Sauer e Allebach Sauer e Allebach (1987) estudaram três algoritmos semelhantes ao que Wiley propusera, empregando-os para a reconstrução de imagens limitadas em frequência partindo de amostras não-equidistantes. Mais recentemente, foi demonstrado Marvasti et al. (1991) que se podia aplicar um algoritmo iterativo semelhante na reconstrução de funções amostradas instantaneamente e de forma não-uniforme.

De entre as muitas aplicações do algoritmo de Papoulis-Gerchberg citamos as que se dão nos trabalhos Marks II (1983), Naidu e Paramasivaiah (1984), Marks II e Reightley (1985), Ferreira (1988), Marvasti (1989). Note-se ainda que o problema da extrapolação está relacionado com o da estimação espectral, e que o algoritmo iterativo que estudámos permite estimar a transformada de Fourier de um sinal com base num intervalo de observação limitado. Nesse sentido, os métodos de extrapolação são também métodos de estimação da transformada de Fourier, e por isso susceptíveis de serem aplicados a problemas desta natureza.

Os teoremas de ponto fixo tem diversas aplicações em matemática e engenharia. De entre os trabalhos que exploram as consequências de alguns dos mais conhecidos resultados sobre existência de pontos fixos na teoria da reconstrução, salientamos o de Schafer *et al.* Schafer et al. (1981), a partir do qual se pode chegar ao algoritmo de Papoulis-Gerchberg. O livro de Smart Smart (1980) contém um tratamento de muitos dos resultados da teoria. Um dos mais conhecidos teoremas deste tipo é o que estabelece a existência de pontos fixos de operadores contractivos. Deve-se a S. Banach, que provou o resultado na sua dissertação

de doutoramento, em 1920. O trabalho de Banach Banach (1922) dava especial importância às aplicações da teoria ao estudo das equações integrais.

A teoria das equações integrais constitui um dos tópicos clássicos da análise matemática, e conta com inúmeras aplicações. Contribuiu talvez mais do que qualquer outro assunto para o nascimento da moderna análise funcional. De entre as muitas obras onde se podem encontrar exposições da teoria das equações integrais salientamos o livro de Tricomi Tricomi (1985) e o de Courant e Hilbert Courant e Hilbert (1953). A perspectiva destes trabalhos é a clássica, não sendo explicitamente empregues certos métodos comuns na análise funcional moderna. O livro de Smithies Smithies (1970) é outra referência útil, onde se dá uma atenção especial às equações de segunda espécie. Pogorzelski Pogorzelski (1966) estudou diversas aplicações à teoria das equações diferenciais. A obra clássica de Riesz e Sz.-Nagy Riesz e Sz.-Nagy (1955) sobre análise funcional contém também um tratamento da teoria de Fredholm. O livro de Hochstadt Hochstadt (1973) faz uso da técnica e linguagem modernas, e inclui um tratamento de algumas equações integrais não-lineares.

Entre os fundadores da teoria das equações integrais encontram-se Vito Volterra e Ivar Fredholm, juntamente com David Hilbert e Erhard Schmidt. Deve-se a Fredholm a teoria geral de solução das equações que hoje se designam pelo seu nome. Segundo Francesco Tricomi Tricomi (1985), que refere uma conversa com o próprio Volterra, a prioridade de Volterra teria ficado estabelecida se este não se tivesse limitado a publicar uma verificação dos resultados que obtivera por métodos semelhantes aos posteriormente usados por Fredholm. Volterra acabou por nunca publicar a demonstração que a eles conduziu.

A equação integral (4.2) aparece frequentemente em processamento de sinal, mas a sua origem é bastante anterior. Foi estudada por H. Bateman em 1906 Bateman (1906). Despertou o interesse de outros matemáticos, entre os quais G. H. Hardy e E. C. Titchmarsh. O leitor interessado poderá consultar Hardy (1909), Hardy e Titchmarsh (1924) e Hardy e Titchmarsh (1929). O tratado de Titchmarsh Titchmarsh (1948) contém alguns resultados acerca desta equação, cuja história remonta a Fourier, que propôs a representação

$$f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{\sin \sigma(t - \tau)}{(t - \tau)} d\tau,$$

a que Titchmarsh chama *Fourier's single-integral formula*. A equação de Bateman continua a ser objecto de algum interesse matemático hoje em dia Logan (1984).

Capítulo 5

Generalização e unificação dos resultados anteriores

Neste capítulo estudaremos um problema de reconstrução do qual os anteriormente tratados se revelarão casos particulares. Através da nova abordagem, necessariamente mais abstracta que as anteriores, atingiremos dois objectivos importantes. Em primeiro lugar, conseguiremos unificar e sistematizar os resultados obtidos até aqui. Em segundo lugar, obteremos generalizações de alguns desses resultados em novas e importantes direcções.

5.1 Operadores compactos

Alguns dos resultados deste capítulo baseiam-se no conceito de operador compacto, que se pode definir da seguinte maneira.

Definição 5.1.1 *Um operador T definido num espaço normado X e com valores num espaço normado Y é compacto se for linear e se o fecho da imagem $T(D)$ de qualquer subconjunto limitado D de X for compacto.*

Qualquer operador compacto T é contínuo, como se pode ver considerando a imagem da esfera unitária em X Kreyszig (1978), mas existem operadores contínuos que não são compactos. O exemplo mais simples é o operador identidade I num espaço de dimensão infinita.

Pode demonstrar-se ainda Kreyszig (1978) que um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é compacto se e só se a imagem por T de qualquer sucessão limitada $f_n \in X$ contiver uma subsucessão convergente em Y .

Qualquer operador que se possa exprimir como soma de operadores compactos é também compacto, e se T for um operador compacto e α um escalar arbitrário, o operador αT será ainda compacto. Logo os operadores compactos $T : X \rightarrow Y$ formam um espaço vectorial.

Qualquer operador linear definido num espaço de dimensão finita é compacto. Além disso, se T_n for uma sequência de operadores compactos definidos num espaço normado X e com valores num espaço de Banach Y , e se $T_n \rightarrow T$ uniformemente, então T é compacto.

Seguem-se alguns exemplos de operadores compactos.

Exemplo 5.1.1 *Considere-se o operador definido em $L_2(a, b)$ pelo núcleo*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(y) \quad (5.1)$$

ou seja,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy = \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(y) f(y) dy.$$

O operador assim definido é compacto.

Quando o núcleo de uma equação integral pode ser reduzido à forma (5.1), é habitual designá-lo por *degenerado*.

Exemplo 5.1.2 *Seja $K(x, y)$ uma função contínua em x e y para $a \leq x \leq b$ e $a \leq y \leq b$. Então, o operador*

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

definido em $L_2(a, b)$ é compacto.

Exemplo 5.1.3 *De modo mais geral, seja $K(x, y)$ um núcleo de L_2 , isto é, uma função complexa das duas variáveis reais x e y tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 dx dy$$

existe e é finito. Então, o operador

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) f(y) dy$$

definido em L_2 é compacto.

Exemplo 5.1.4 *Qualquer operador linear definido num espaço de dimensão finita é compacto. Logo, qualquer operador linear \mathbf{T} definido em \mathbb{C}^n é compacto. Em particular, os operadores de amostragem e limitação de frequência em \mathbb{C}^n são compactos.*

As demonstrações destes resultados podem encontrar-se em muitos livros de análise funcional ou equações integrais, razão pela qual as omitimos. Veja-se, por exemplo, Kreyszig (1978).

Note-se que a maioria dos operadores anteriormente encontrados são compactos.

5.2 Complementos ortogonais em espaços de Banach

A formulação em espaços de Banach dos problemas de reconstrução que temos vindo a tratar implica algumas considerações matemáticas prévias. Para evitar interrupções futuras resumimos essas observações em seguida.

Os conceitos de projecção e complemento ortogonal são frequentemente usados e têm grande importância teórica e prática, estando na base de vários resultados de grande elegância e alcance. É frequente abordarem-se muitos problemas de reconstrução de sinais unidimensionais ou multidimensionais recorrendo aos conceitos de projecção e ângulo, considerados do ponto de vista geométrico. Se por um lado se consegue uma interpretação interessante dos processos de cálculo em jogo, por outro restringe-se a aplicação dos mesmos a espaços de Hilbert. Apesar de serem sem dúvida espaços suficientemente gerais para terem importantes e variadas aplicações, estão longe de esgotarem a totalidade das necessidades práticas.

A soma directa de subespaços pode ser definida sem qualquer dificuldade para qualquer espaço vectorial X . Em particular, para qualquer subespaço U de X existe sempre um outro subespaço V , chamado complementar de U , e tal que $X = U \oplus V$.

As dificuldades surgem quando se pretende que V seja um espaço *fechado*. Num espaço de Hilbert, de qualquer dimensão, finita ou infinita, isso é automaticamente verdade. Dado qualquer subespaço fechado U de um espaço de Hilbert H , existe um subespaço \bar{U} também fechado e tal que H pode ser expresso como a soma directa $U \oplus \bar{U}$. É comum chamar-se a \bar{U} o complemento ortogonal de U .

O problema da existência de subespaços fechados complementares de um dado subespaço U de um espaço de Banach foi posto por Banach, para o caso dos espaços L_p e ℓ_p . É claro que se deve excluir o caso $p = 2$, que corresponde a espaços de Banach que são também espaços de Hilbert. Este problema foi resolvido por F. J. Murray Murray (1937). Os resultados de Murray foram mais tarde generalizados por A. Sobczyk Sobczyk (1941).

A resposta ao problema posto por Banach é negativa. Em geral, existem subespaços de L_p para os quais não existe qualquer complemento fechado. O mesmo se passa para ℓ_p .

Para problemas de reconstrução do tipo que temos vindo a tratar são particularmente importantes os subespaços formados pelos elementos de um espaço de Banach B que se anulam fora de um dado conjunto A . Qualquer subespaço desse tipo é constituído pela totalidade de elementos $f \in B$ tais que $f = T_A f$, com

$$(T_A f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

sendo A um dado subconjunto mensurável de \mathbb{R} . É claro que os operadores de truncatura são idempotentes e definem uma projecção em B .

Tomemos em primeiro lugar $B = L_p$. É muito fácil verificar que qualquer operador de truncatura T_A é um operador linear e contínuo definido em $B = L_p$. Como A é um subconjunto mensurável de \mathbb{R}

$$\|T_A f\|_p \leq \|f\|_p,$$

pelo que

$$\|T_A\| = \sup_{f \in L_p, f \neq 0} \frac{\|T_A f\|_p}{\|f\|_p} \leq 1.$$

Fica assim estabelecida a continuidade de T_A . É claro que o complementar de T_A é $T_{\bar{A}}$ onde \bar{A} designa o complemento em \mathbb{R} do conjunto A . A continuidade de $T_{\bar{A}}$ pode estabelecer-se raciocinando de maneira idêntica. Ficou assim estabelecido que dado um elemento $f \in L_p$ e um conjunto A mensurável qualquer temos

$$f = T_A f + T_{\bar{A}} f,$$

onde T_A e $T_{\bar{A}}$ são operadores de projecção contínuos. De igual modo se poderia provar o resultado análogo em ℓ_p .

Temos assim garantida a existência de subespaços fechados complementares aos descritos por equações do tipo $f = T_A f$, em espaços de Banach.

5.3 Novas demonstrações dos teoremas de unicidade

Antes de formularmos o problema de reconstrução abstracto achamos conveniente esclarecer um ponto importante sobre a estratégia que adoptaremos, a qual recordamos ter por objectivo o estabelecimento de uma teoria unificada de reconstrução, cuja aplicabilidade se possa estender aos problemas anteriormente tratados e, se possível, a outros ainda.

A teoria que estabeleceremos depende de um teorema principal e de um conjunto de teoremas de unicidade, que há que provar caso a caso. As demonstrações dos teoremas de unicidade foram dadas no seguimento de resultados anteriores, não sendo consequência do esforço de unificação efectuado.

Se a teoria geral de reconstrução a apresentar dependesse de resultados cujas demonstrações só se pudessem efectuar recorrendo aos resultados específicos apresentados nos capítulos anteriores, o seu mérito ficaria diminuído. Contudo, tal não é verdade.

Em primeiro lugar, os teoremas de unicidade citados são resultados simples, cuja demonstração não oferece dificuldades, e que se pode efectuar por vários processos. Os métodos anteriores conduziram já a um conjunto de demonstrações. É possível dar outras, como veremos em seguida.

Em segundo lugar, como é normalmente muito mais simples demonstrar os teoremas de unicidade do que atacar o problema de reconstrução correspondente, a teoria geral possibilita a abordagem de problemas concretos por uma via relativamente acessível e sistemática.

Para provar que esta perspectiva corresponde à verdade, daremos em seguida demonstrações independentes dos teoremas de unicidade que vimos nos capítulos anteriores.

Começamos pelo teorema seguinte, que corresponde ao teorema de unicidade 2.1.2.

Teorema 5.3.1 *Considere-se o conjunto das amostras de uma função $f \in B_2(\sigma)$, tomadas a intervalos $T = \pi/\Omega$ inferiores a π/σ . Se um número finito de amostras de f forem desconhecidas, sendo todas as outras nulas, então f é a função nula.*

Como $f \in B_2(\sigma)$ a transformada de Fourier \hat{f} tem suporte contido em $[-\sigma, \sigma]$. Os coeficientes da expansão de \hat{f} em série de Fourier no intervalo $[-\Omega, \Omega]$ são, como é fácil verificar, proporcionais às amostras $f(k\pi/\Omega)$. Mas estas são nulas, com exceção de um número finito, pelo que a série de Fourier de \hat{f} pode apenas conter um número finito de termos não-nulos. Nessas condições \hat{f} não se pode anular em $[-\Omega, -\sigma]$ e $[\sigma, \Omega]$ sem se anular no intervalo $[-\Omega, \Omega]$, o que implica o teorema. ■

O resultado seguinte é uma versão do teorema de unicidade 2.2.4, que não usa a hipótese de ortonormalidade.

Teorema 5.3.2 *Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t . Suponhamos que $K(\omega, t)$, como função de ω apenas, pertence a $L_2(I)$ para qualquer t . Seja f uma função de L_2 tal que*

$$f(t) = \int_J g(\omega) K(\omega, t) d\omega, \quad (J \subset I)$$

para $g \in L_2(J)$, e J estritamente incluído em I . Se as funções $K(\omega, t_n)$ forem ortogonais, analíticas e completas em I , e se um número finito de amostras $f(t_i)$ de f forem desconhecidas, sendo todas as outras nulas, f é a função nula.

Neste caso podemos proceder à expansão da função g em série, no intervalo I , utilizando o conjunto completo de funções ortogonais $K^*(\omega, t_n)$. É fácil verificar que os coeficientes dessa expansão são proporcionais às amostras $f(t_i)$. Com exceção de um número finito, sabemos que essas amostras são nulas, pelo que a expansão de g pode apenas conter um número finito de termos não-nulos. É claro que nestas condições g não se pode anular em J sem se anular em I , o que implica o teorema. ■

O teorema de unicidade 3.2.1 é na verdade uma consequência do teorema fundamental da álgebra, como se pode ver pela demonstração que se segue.

Teorema 5.3.3 *Seja \mathbf{D} um operador de amostragem de densidade d e \mathbf{B} um operador de filtragem com largura de banda w , no sentido das definições 3.1.5 e 3.1.6. Então, se $d \geq w$, a intersecção dos subespaços $\perp D$ e B é o vector nulo, isto é, se $d \geq w$, $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, então $\mathbf{x} \equiv 0$.*

Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, e considere-se o polinómio de grau $n - 1$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^k.$$

A relação entre tais polinómios e a DFT $\hat{\mathbf{x}}$ é bem conhecida. Efectuando a mudança de variável $z = e^{-jt}$ obtém-se o polinómio trigonométrico

$$\phi(t) = P_n(e^{-jt}) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-jkt}$$

cujos valores para cada t pertencente ao conjunto

$$\{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}\}$$

são evidentemente

$$\phi(t_k) = P_n(e^{-jt_k}) = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{-j\ell t_k}.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, se $\phi(t_i) = 0$ para n ou mais dos t_i então $\phi(t_i) = 0$ para todos os outros t_i .

Tomando $m = n$ e $t_i = 2\pi i/n$ obtemos

$$\phi\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-j2\pi ki/n} = \sqrt{n} \hat{x}_i.$$

É fácil ver que a condição $d \geq w$ do teorema equivale a afirmar que a soma do número de x_i nulos com o número de \hat{x}_i nulos é superior ou igual a n . Para demonstrar o teorema basta por isso estabelecer condições sob as quais o anulamento de p ou mais dos \hat{x}_i e de $n - p$ ou mais dos x_k implique que todos os $\phi(2\pi i/n)$ se anulem.

É suficiente exigir que os x_k nulos sejam todos escolhidos de modo a baixar o grau do polinómio $P_n(z)$, ou a colocar zeros em $z = 0$. Facilmente se verifica que isso é equivalente à hipótese de contiguidade do conjunto dos índices dos x_i não-nulos. ■

O teorema de unicidade que corresponde aos resultados de reconstrução para funções de $B_2(\sigma)$ não foi explicitamente enunciado, uma vez que é totalmente trivial. Limita-se à afirmação de que a única função limitada em frequência e identicamente nula num intervalo de medida positiva qualquer (finita ou infinita) é a função nula.

5.4 O problema de reconstrução abstracto

Seja D um conjunto arbitrário não vazio e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Considere-se uma decomposição aditiva de D em dois conjuntos mensuráveis, disjuntos e complementares, U e \bar{U} , cuja união seja D . Suponhamos que os valores que a função f toma em U sejam

desconhecidos. O problema é reconstituir f em D partindo do conhecimento de f em \bar{U} .

É evidente que o problema é destituído de significado se não forem feitas quaisquer hipóteses adicionais sobre f . Existem classes de funções que conduziriam a problemas deste tipo facilmente resolúveis. Como exemplo damos a classe de funções analíticas, para as quais é imediato afirmar a existência e unicidade da solução deste tipo de problemas desde que o conjunto \bar{U} onde a função é conhecida contenha um intervalo com medida não nula. Neste caso pode determinar-se f em U por continuação analítica.

No entanto, é igualmente bem conhecido que os processos práticos de reconstrução que resultam de uma aplicação directa deste princípio, e que passam pelo cálculo da soma de séries em que intervêm derivadas de ordem elevada em \bar{U} da função f , são totalmente insatisfatórios na prática. Existem duas razões principais para esta situação. A primeira é uma consequência da impossibilidade de efectuar medidas exactas, que impede o conhecimento absolutamente preciso de f em \bar{U} . A segunda tem a ver com a impossibilidade de efectuar cálculos infinitamente precisos. Estas imposições práticas conduzem ao acumular de incertezas que se propagam de modo crítico no cálculo das sucessivas derivadas de f .

O problema elementar da continuação analítica revela já algumas das dificuldades práticas que os processos de reconstrução exibem, e no cuidado que se deve ter em separar resultados importantes de carácter teórico de outros cuja importância deve ser apreciada a um nível prático.

No caso aqui abordado, estaremos interessados na classe de funções f definidas num espaço de Banach X e que são pontos fixos de um operador linear B , isto é, satisfazem a equação

$$f = Bf.$$

É conveniente introduzirmos a seguinte definição antes de enunciarmos o teorema que nos permitirá resolver a questão da existência e unicidade da solução do problema de reconstrução mencionado.

Definição 5.4.1 *Seja T um operador linear definido num espaço de Banach D não vazio. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de T se e só se $Tx = \lambda x$ para algum $x \in D$ não nulo. Nessas circunstâncias, chamaremos a x uma função própria de T .*

Esta definição é uma mera transposição para espaços de Banach de dimensão arbitrária da definição análoga para espaços de dimensão finita.

Ao conjunto dos valores próprios de um operador linear T chama-se *espectro discreto ou pontual* de T . Se definirmos o operador R_μ como o inverso de $T - \mu I$, o espectro discreto de T é constituído por todos os $\mu \in \mathbb{C}$ tais que R_μ não existe. Chama-se ainda *espectro contínuo* de T ao conjunto dos $\mu \in \mathbb{C}$ tais que R_μ existe mas não é um operador contínuo. O *espectro residual* de T é constituído por todos os $\mu \in \mathbb{C}$ tais que R_μ existe mas num conjunto que não é denso em D .

É claro que o espectro de um operador linear definido num espaço de dimensão finita é totalmente constituído por valores próprios. A situação geral é bastante mais

complexa, mas existem algumas classes especiais e importantes de operadores para os quais a teoria espectral resulta muito simplificada.

Uma dessas classes é a dos operadores compactos, para os quais é possível demonstrar a existência de um número quando muito contável de valores próprios, cujo único ponto de acumulação possível é zero. A totalidade dos valores próprios de um operador compacto esgota os seus valores espectrais, com uma excepção no caso de operadores definidos em espaços de dimensão infinita, caso em que $\lambda = 0$ pode também pertencer ao espectro.

O teorema seguinte é uma consequência da teoria das equações de segunda espécie com operadores compactos, devida a Riesz-Schauder, e dá uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da solução dos problemas de reconstrução do tipo acima considerado.

Teorema 5.4.1 *Seja X um espaço de Banach e B um operador linear definido em X . Sejam U e \bar{U} subespaços fechados de X tais que $X = U \oplus \bar{U}$. Seja $P_u : X \rightarrow U$ o operador de projecção em U , e v um elemento de \bar{U} . Se o operador $P_u B$ for compacto em U , existe um e um só elemento $f \in X$ tal que $f = Bf$ e $f(x) = v(x)$ para $x \in \bar{U}$, se e só se a equação*

$$u = P_u B u$$

tiver apenas a solução trivial em U . Nestas circunstâncias, e para qualquer $h \in U$, a equação

$$u = P_u B u + h$$

tem uma e uma só solução em U , e o operador $I - P_u B$ tem inverso contínuo.

Se T designar um operador compacto definido num espaço de Banach, a equação de segunda espécie

$$Tx - \lambda x = y$$

tem exactamente uma solução se e só se a equação homogénea ou de primeira espécie

$$Tx - \lambda x = 0$$

admitir apenas a solução trivial $x = 0$. Veja-se, por exemplo, Kreyszig (1978).

Qualquer $x \in X$ admite exactamente uma decomposição $x = u + v$ com $u \in U$ e $v \in \bar{U}$. A condição $f = Bf$ conduz à equação

$$u = Bu + Bv - v,$$

da qual se obtém

$$u = P_u B u + P_u B v$$

uma vez que $P_u u = u$ e $P_u v = 0$. Esta equação é da forma

$$u = Tu + h,$$

onde $h = P_u Bv$. Como o operador $T = P_u B$ é compacto em U , a solução desta equação em U existe e é única se e só se a equação homogénea

$$u = P_u B u$$

admitir apenas a solução $u = 0$ em U .

Para completar a demonstração basta recordar Kreyszig (1978) que nestas circunstâncias o operador inverso de $I - P_u B$ existe e é contínuo. ■

Note-se que se B for compacto em X , ou se o contradomínio de P_u tiver dimensão finita, então $P_u B$ é compacto.

O operador $I - P_u B$ terá sempre inverso contínuo, independentemente de quaisquer outras condições, desde que $\|P_u B\| < 1$. Isto sugere o seguinte teorema.

Teorema 5.4.2 *Seja X um espaço de Banach e B um operador linear definido em X . Sejam U e \bar{U} subespaços fechados de X tais que $X = U \oplus \bar{U}$. Seja $P_u : X \rightarrow U$ o operador de projecção em U , e v um elemento de \bar{U} . Se $\|B\| \leq 1$ em X , se $\|P_u B\| < 1$, e se a única solução em U da equação*

$$u = P_u B u$$

for a solução trivial, então o elemento $f \in X$ tal que $f = Bf$ e $f(x) = v(x)$ para $x \in \bar{U}$ é dado por

$$f = v + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

onde a convergência é na norma de X ,

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

$h = P_u Bv$, e u_0 é qualquer elemento de U .

A única solução em U da equação $x = P_u Bx$ é a solução trivial, o que implica a inexistência de soluções não-nulas da equação $u = Bu$ em U , o que por sua vez põe de parte a possibilidade de 1 pertencer ao espectro de B .

Como a norma de $P_u B$, visto como um operador definido em U , tem de ser estritamente inferior à unidade, temos

$$R = (I - P_u B)^{-1} = I + P_u B + (P_u B)^2 + \dots$$

com convergência em norma. A iteração

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h$$

pode escrever-se como

$$u_{n+1} = (P_u B)^{n+1} u_0 + [(P_u B)^n + (P_u B)^{n-1} + \dots + I] h,$$

com $\|P_u B\| < 1$, donde se conclui que o limite da sucessão u_n é de facto $u = Rh$, independentemente de u_0 . ■

5.5 Alguns casos particulares

5.5.1 Reconstrução de funções sobre-amostradas no sentido da transformação de Fourier partindo de séries de amostragem incompletas

Tomemos, no que respeita ao teorema 5.4.1, $X = \ell_2$. Este espaço é constituído pelos elementos f tais que

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |f_i|^2 \leq \infty,$$

com a norma habitual, e é um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Para um certo $0 < r < 1$, consideremos o operador linear B tal que $g = Bf$ é dado por

$$g_i = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r \operatorname{sinc}[r(i-j)] f_j.$$

Seja U um subconjunto de \mathbb{Z} com cardinal finito, e considere-se o operador P_u tal que $g = P_u f$ é definido por

$$g_i = \begin{cases} f_i & \text{se } i \in U, \\ 0 & \text{se } i \notin U. \end{cases}$$

Por outras palavras, P_u é o operador de truncatura associado com o conjunto U . Neste caso, a equação

$$u = P_u B u + h$$

com $h = P_u B v$ reduz-se a

$$u_i = r \sum_{j \in U} u_j \operatorname{sinc}[r(i-j)] + h_i,$$

onde

$$h_i = r \sum_{j \notin U} u_j \operatorname{sinc}[r(i-j)],$$

para $i \in U$. Note-se que $P_u B$ é compacto uma vez que o contradomínio de P_u é um conjunto de dimensão finita. Pelo teorema de unicidade 5.3.1 não existem outras soluções da equação homogénea

$$u = P_u B u$$

para além da solução nula. Aplicando o teorema 5.4.1 chega-se à conclusão de que a equação

$$u = P_u B u + h$$

tem uma e uma só solução, e que o operador $I - P_u B$ tem inverso contínuo. O cálculo de $(I - P_u B)^{-1}$ pode ser feito directamente, o que conduz a uma solução não-iterativa do problema.

Reparando que $\|B\| = 1$ e invocando o teorema 5.4.2 obtemos o método iterativo definido por

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

que é convergente para u , independentemente da escolha da aproximação inicial $u_0 \in U$.

Poderíamos obter métodos iterativos diferentes utilizando em vez da série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

outras séries convergentes para $(1-x)^{-1}$, considerando as séries análogas de operadores lineares, e provando a convergência em norma destas últimas de maneira semelhante à que usámos para demonstrar que

$$1 + T + T^2 + T^3 + \dots$$

tende em norma para $(I - T)^{-1}$, se $\|T\| < 1$.

5.5.2 Reconstrução de funções sobre-amostradas em sentido generalizado partindo de séries de amostragem incompletas

Continuamos com $X = \ell_2$. Seja $K(\omega, t)$ uma função complexa das variáveis reais ω e t , tal que $K(\omega, t)$ como função de ω pertence a $L_2(I)$. Seja I um subconjunto compacto de \mathbb{R} , e J um subconjunto próprio de I . Seja $\{t_n\}$ um conjunto amostrador sobre I , relativamente a K . Consideremos o operador B tal que $g = Bf$ é dado por

$$g_i = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{ij} f_j,$$

com

$$S_{ij} = \frac{\int_J K(\omega, t_j) K^*(\omega, t_i) d\omega}{\int_I |K(\omega, t_i)|^2 d\omega}.$$

Seja U um subconjunto de \mathbb{Z} com cardinal finito, e considere-se o operador P_u tal que $g = P_u f$ é definido por

$$g_i = \begin{cases} f_i & \text{se } i \in U, \\ 0 & \text{se } i \notin U, \end{cases}$$

tal como no caso anterior. A equação

$$u = P_u B u + h$$

com $h = P_u B v$ reduz-se a

$$u_i = \sum_{j \in U} S_{ij} u_j + h_i,$$

onde

$$h_i = \sum_{j \notin U} S_{ij} u_j.$$

Note-se que $P_u B$ é um operador compacto uma vez que tem valores num espaço de dimensão finita.

Assumindo a analiticidade das funções $K(\omega, t_i)$, o teorema de unicidade 5.3.2 garante a inexistência de soluções da equação homogénea

$$u = P_u B u$$

para além da solução nula. Aplicando o teorema 5.4.1 chega-se à conclusão de que a equação

$$u = P_u B u + h$$

tem uma e uma só solução, e que o operador $I - P_u B$ tem inverso contínuo. O cálculo de $(I - P_u B)^{-1}$ pode ser feito directamente, e de forma não-iterativa, ou aplicando o teorema 5.4.2 e usando o método iterativo definido por

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

tomando para u_0 um elemento arbitrário de U . A ortonormalidade dos $K(\omega, t_i)$ implica $\|P_u B\| < 1$, como é fácil ver.

Mais uma vez, poderíamos obter métodos iterativos diferentes utilizando em vez da série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

outras séries convergentes para $(1-x)^{-1}$, considerando as séries análogas de operadores lineares, e provando a convergência em norma destas últimas de maneira semelhante à que usámos para demonstrar que

$$1 + T + T^2 + T^3 + \dots$$

tende em norma para $(I - T)^{-1}$, se $\|T\| < 1$.

5.5.3 Reconstrução em \mathbb{C}^n

Tomemos agora $X = \mathbb{C}^n$ com a norma e produto interno habituais, o que nos situa num espaço de Hilbert de dimensão finita. Seja B um operador de filtragem arbitrário, isto é, um operador da forma

$$B = F^{-1} \Gamma F$$

onde Γ é o operador de truncatura associado a um qualquer conjunto arbitrário G de cardinal inferior a n e contíguo. O operador B é compacto, como qualquer operador linear de dimensão finita.

Consideremos a decomposição de \mathbb{C}^n em U e \bar{U} , onde U designa o subespaço de \mathbb{C}^n constituído por todas as sequências $u \in \mathbb{C}^n$ com suporte contido num certo conjunto

U . Dito de outra maneira, U é o subespaço de \mathbb{C}^n constituído por todos os vectores u com componentes u_i nulas para $i \in U$. É claro que os subespaços U e \bar{U} são fechados e complementos ortogonais um do outro.

O operador de projecção P_u é neste caso o operador de truncatura associado com o conjunto U . A equação homogénea a considerar é

$$u = P_u B u.$$

Se as condições do teorema 5.3.3 se cumprirem não existe qualquer solução da equação homogénea para além da solução nula. Aplicando o teorema 5.4.1 chega-se à conclusão de que a equação

$$u = P_u B u + h$$

tem uma e uma só solução, e que o operador $I - P_u B$ tem inverso contínuo. O cálculo de $(I - P_u B)^{-1}$ pode ser feito directamente, ou, invocando o teorema 5.4.2, usando o método iterativo definido por

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

e tomando para u_0 um elemento arbitrário de U , uma vez que a norma de B é igual à unidade em \mathbb{C}^n .

5.5.4 Interpolação e extrapolação de polinómios trigonométricos

Tomemos para X o subespaço de $C[0, T]$ constituído pelos polinómios trigonométricos da forma

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (5.2)$$

com $\omega_0 = 2\pi/T$. Decompondo X em U e \bar{U} chega-se à equação

$$u(t) = \int_U u(x) s(t-x) dx + h(t),$$

para $t \in [0, T]$, como vimos na secção 4.3. O operador K definido por esta equação é compacto, e o resultado de unicidade uma consequência imediata da analiticidade das funções da forma (5.2). É fácil justificar o método iterativo de reconstrução reparando que $\|K\|_c < 1$ se a medida do intervalo U for inferior a $T/(2n+1)$.

5.5.5 Interpolação e extrapolação em $B_2(\sigma)$

Seja B um operador de filtragem arbitrário, isto é, um operador da forma

$$B = F^{-1} \Gamma F,$$

onde Γ é o operador de truncatura associado a um conjunto compacto arbitrário G . Tais operadores podem ser expressos por um integral de convolução, isto é, por

$$(Bf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)K(x-y) dy$$

com K e f pertencentes a L_2 . Note-se que B aplica funções de L_2 em funções de L_2 .

Consideremos a decomposição de L_2 em $U \oplus \bar{U}$, onde U designa o subespaço constituído por todas as funções $u \in L_2$ com suporte contido no conjunto (mensurável) U . Assumiremos que \bar{U} contém um intervalo com medida positiva. É claro que os subespaços U e \bar{U} são fechados e complementos ortogonais um do outro. Tal facto não constitui surpresa nem carecia sequer de verificação, uma vez que L_2 é um espaço de Hilbert.

Estudaremos o problema de reconstrução que se obtém para o caso particular em que $X = L_2$. L_2 é um espaço de Hilbert de dimensão infinita, como é conhecido. O operador de projecção P_u é neste caso o operador de truncatura associado com o conjunto U , pelo que a equação homogénea

$$u = P_u B u$$

pode simplificar-se para

$$u = B u,$$

se convencionarmos dar à variável independente valores pertencentes a U apenas. De modo semelhante, a equação de segunda espécie

$$u = P_u B u + P_u B v$$

pode simplificar-se para

$$u = B u + B v.$$

Se o conjunto G for o intervalo $[-\sigma, \sigma]$, o operador B representa o que em engenharia se designa por filtro linear do tipo passa-baixo. As equações anteriores são, para esse caso particular, as seguintes. A equação $f = Bf$ reduz-se a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (t \in U)$$

enquanto que a equação $u = P_u B u + P_u B v$ é dada por

$$u(t) = \int_U u(\tau) \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau + h(t) \quad (t \in U)$$

onde h designa a função conhecida

$$h(t) = \int_{\bar{U}} v(\tau) \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau.$$

Facilmente se poderiam escrever as equações análogas correspondentes ao caso $G = [-\alpha, -\beta] \cup [\beta, \alpha]$, isto é, a operadores que em engenharia se designam por filtros passa-banda.

Neste caso, o teorema de unicidade reduz-se à afirmação de que uma função não-nula e limitada em frequência não se pode anular em intervalos de medida positiva. Sendo G um compacto arbitrário, a equação

$$u = P_u B u$$

não possui qualquer solução não-nula em U , donde se infere a possibilidade de recuperação do segmento de f com suporte em U , através de um operador linear. Note-se que a norma de B é unitária em L_2 , mas $\|P_u B\| < 1$ em $B_2^n(\sigma)$.

O cálculo de $(I - P_u B)^{-1}h$ pode ser efectuado usando o método iterativo definido por

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

e tomando para u_0 um elemento arbitrário de U .

5.5.6 Interpolação e extrapolação em $B_1(\sigma)$

Como vimos, os resultados de reconstrução discutidos nos capítulos anteriores são casos particulares da teoria de reconstrução proposta neste capítulo. No entanto, a utilidade da teoria não se esgota com os casos examinados. Veremos em seguida que os resultados sobre reconstrução que temos vindo a obter se podem transportar a outros espaços de funções. Começaremos com resultados válidos para uma classe de funções pertencentes a $B_1(\sigma)$. Note-se que $B_1(\sigma)$ é um subespaço de L_1 , o qual é ainda um espaço de Banach mas não um espaço de Hilbert, e que $L_1 \not\subset L_2$ e $L_2 \not\subset L_1$. Os espaços L_1 e L_2 são de facto distintos, não havendo entre eles qualquer relação de inclusão.

O teorema de unicidade para a reconstrução em $B_2(\sigma)$ é, como vimos, uma consequência directa do teorema de Paley e Wiener, que caracteriza qualquer função inteira de tipo exponencial pertencente a L_2 sobre a recta real como transformada inversa de Fourier de uma função com suporte compacto. Conhecem-se diversas generalizações deste teorema Boas (1954), incluindo a seguinte.

Teorema 5.5.1 *A função inteira $f(z)$ é de tipo exponencial e pertence a L_1 sobre a recta real se e só se*

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \phi(y) e^{jzy} dy,$$

onde $\phi(\sigma) = \phi(-\sigma) = 0$, e a função

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{se } x \in (-\sigma, \sigma), \\ 0 & \text{se } x \notin (-\sigma, \sigma), \end{cases}$$

possuir uma série de Fourier absolutamente convergente em $(-\sigma - \delta, \sigma + \delta)$, $\delta > 0$.

A demonstração do teorema é dada em Boas (1954). É evidente que este resultado nos fornece de forma imediata o teorema de unicidade pretendido para funções de $B_1(\sigma)$. Na verdade, tal como para o caso de $B_2(\sigma)$, necessitamos apenas de uma das implicações do teorema. Qualquer função f de $B_1(\sigma)$ é, por definição, transformada de Fourier inversa de uma função \hat{f} com suporte em $[-\sigma, \sigma]$. Logo, se \hat{f} satisfizer as condições do teorema, f será a restrição à recta real de uma função inteira. É óbvio que se f se anular sobre um conjunto de \mathbb{R} que contenha um intervalo de medida não-nula, então f será a função nula. Este é o resultado de unicidade que necessitamos para resolver o problema de reconstrução em $B_1(\sigma)$.

Note-se que para \hat{f} satisfazer as condições do teorema é necessário que a série de Fourier da função

$$\psi(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & \text{se } x \in (-\sigma, \sigma), \\ 0 & \text{se } x \notin (-\sigma, \sigma), \end{cases}$$

seja absolutamente convergente em $(-\sigma - \delta, \sigma + \delta)$, $\delta > 0$, e que $\hat{f}(\pm\sigma) = 0$. Assumiremos de aqui em diante que isso é verdade, o que nos restringe a um subespaço de $B_1(\sigma)$ que designaremos por $B_1^a(\sigma)$.

Seja B um operador de filtragem definido por um integral de convolução

$$(Bf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)K(x-y) dy,$$

aplicando funções de L_1 em funções de L_1 .

Consideremos a decomposição de L_1 em $U \oplus \bar{U}$, onde U designa o subespaço constituído por todas as funções $u \in L_1$ com suporte contido no conjunto (mensurável) U . Assumiremos que \bar{U} contém um intervalo com medida positiva. Note-se que os subespaços U e \bar{U} são fechados.

Estudemos o problema de reconstrução que se obtém para o caso particular em que $X = L_1$. O operador P_u reduz-se neste caso ao operador de truncatura associado com o conjunto U , pelo que a equação homogénea

$$u = P_u B u$$

pode-se simplificar para

$$u = B u,$$

se convencionarmos dar à variável independente valores pertencentes a U apenas. De modo semelhante, a equação de segunda espécie

$$u = P_u B u + P_u B v$$

pode simplificar-se para

$$u = B u + B v.$$

No caso de funções passa-baixo, isto é, funções tais que o suporte da respectiva transformada de Fourier esteja contido em $[-\sigma, \sigma]$, pode tomar-se para K o núcleo da

equação de Bateman, isto é, a função $K(x) = \sin(\sigma x)/(\pi x)$, que naturalmente pertence a L_2 . Uma outra possibilidade é tomar para K a função com transformada de Fourier contínua expressa pela equação 4.9, isto é

$$M(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin(\sigma t + \alpha t/2) \sin(\alpha t/2)}{\alpha t^2}.$$

Esta escolha de K conduz a uma equação $f = Bf$ da forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) M(t - \tau) d\tau \quad (t \in U)$$

enquanto que a equação $u = P_u B u + P_u B v$ é dada por

$$u(t) = \int_U u(\tau) M(t - \tau) d\tau + h(t) \quad (t \in U)$$

onde h designa a função conhecida

$$h(t) = \int_{\bar{U}} v(\tau) M(t - \tau) d\tau.$$

Facilmente se poderiam escrever equações análogas e com núcleo de L_1 correspondentes ao caso em que o suporte da transformada de Fourier das funções consideradas pertence a $G = [-\alpha, -\beta] \cup [\beta, \alpha]$, o que conduziria a uma classe de operadores que em engenharia se designam por filtros passa-banda.

Usando o teorema de unicidade conclui-se que a equação

$$u = P_u B u$$

não possui qualquer solução não-nula em U , donde se infere a possibilidade de recuperação do segmento de f com suporte em U . O cálculo de $(I - P_u B)^{-1}h$ pode ser efectuado usando o método iterativo definido por

$$u_{n+1} = P_u B u_n + h,$$

e tomando para u_0 um elemento arbitrário de U , uma vez que a norma de B é unitária em L_1 , para qualquer dos exemplos dados.

5.6 Notas

Certos autores designam por operadores completamente contínuos os operadores compactos. Essa nomenclatura era tradicional nas primeiras obras de análise funcional.

O conceito de operador compacto revela-se de grande importância prática. A estrutura espectral dos operadores compactos resulta suficientemente simples para que a teoria de Ivar Fredholm (1903) sobre equações integrais possa ser generalizada a equações funcionais mais gerais. Parece ter sido David Hilbert quem pela primeira vez (1912) reparou que a

possibilidade de existência de uma teoria semelhante à de Fredholm não dependia da habitual representação integral do operador, mas apenas do facto desse operador ser compacto. A sistematização da teoria nesses termos mais abstractos deve-se em grande parte a F. Riesz (1918) e a J. Schauder (1930).

Actualmente, mesmo certas obras de análise funcional com carácter introdutório contêm uma discussão das propriedades fundamentais dos operadores compactos. É o caso, por exemplo, do livro de Young Young (1971), que inclui um estudo das propriedades dos operadores compactos em espaços de Hilbert, a um nível bastante acessível e sem utilizar o integral de Lebesgue ou conceitos de teoria da medida. Uma outra obra introdutória é Kreyszig (1978), que contém um estudo bastante mais aprofundado dos operadores compactos em espaços de Banach. Dadas as profundas ligações entre a teoria das equações integrais de Fredholm e a de Riesz-Schauder, não é de surpreender que certas obras sobre equações integrais façam uso do conceito de operador compacto. O livro de Hochstadt Hochstadt (1973) está entre esse número. O livro de Riesz e Sz.-Nagy Riesz e Sz.-Nagy (1955) contém um estudo dos operadores compactos, bem como uma aplicação menos comum desse estudo: uma elegante demonstração do teorema fundamental da teoria das funções quase-periódicas, originalmente provado por H. Bohr, mas do qual têm sido dadas diversas demonstrações. O leitor interessado encontrará um estudo mais profundo das propriedades dos operadores compactos no tratado de Dunford e Schwartz Dunford e Schwartz (1957).

São raras as aplicações da teoria dos operadores compactos a problemas de reconstrução. Citamos apenas o artigo de Sanz e Huang Sanz e Huang (1983a), que contém uma abordagem unificada de alguns problemas de reconstrução iterativa, e se baseia numa iteração proposta por H. Bialy no final da década de 50. Os autores formulam o problema em espaços de Hilbert, e assumem que o operador de distorção é compacto. A metodologia que seguimos no presente trabalho é, obviamente, completamente diferente dessa.

O teorema de Paley e Wiener vem demonstrado em Boas (1954) e Rudin (1987), por exemplo. As generalizações que utilizámos são demonstradas em Boas (1954). Uma das implicações do teorema 5.5.1 é atribuída a Wiener.

Capítulo 6

Conclusões e trabalho futuro

Tentámos ao longo deste trabalho dar uma visão unificada de uma classe de problemas de reconstrução, utilizando uma metodologia original e que se veio a revelar consideravelmente poderosa, apesar de assente em princípios bastante simples. Neste capítulo apresentaremos as conclusões que pudemos extrair desta nossa abordagem.

Não discutimos certos resultados de que temos conhecimento e que se relacionam com os tópicos aqui estudados. Prejudicariam talvez a unidade do trabalho, e sem dúvida a sua extensão. Alguns dos tópicos omitidos foram mencionados de forma muito breve nas secções de notas com que encerrámos os capítulos precedentes. Mencionaremos aqui alguns outros, cujo estudo esperamos prosseguir no futuro.

6.1 Conclusões

Dominar uma teoria é mais do que dominar um conjunto de resultados, mas também e sobretudo dar conta das relações que entre eles possam existir, sujeitá-los a uma teoria matemática comum que lhes dê unidade e coerência, e, se possível, explorar em seguida essa teoria para chegar a novos resultados ou a prolongamentos dos mesmos resultados em diferentes direcções. Esta convicção levou-nos a estudar uma classe de problemas de reconstrução recorrendo a certos conceitos de análise funcional, e tendo em vista os objectivos propostos no início do trabalho. Em nossa opinião, conseguimos atingir esses objectivos de forma satisfatória.

Os problemas particulares que constituem os capítulos segundo, terceiro e quarto do presente trabalho foram abordados usando uma metodologia bastante consistente. O essencial do método proposto é a separação do elemento f do espaço topológico em causa em duas componentes, que correspondem, respectivamente e de forma natural, às partes desconhecida e conhecida desse elemento, designadas por u e v . Partindo em cada caso de uma equação do tipo $f = Bf$, chegámos imediatamente a uma equação de segunda espécie do tipo

$$u = Tu + h,$$

que sugeriu a unificação dos problemas de reconstrução estudados, efectuada no quinto

capítulo.

Na verdade, e recorrendo a certos resultados de análise funcional, foi possível estabelecer a existência e continuidade do inverso de $I - T$. Em espaços de dimensão finita isto conduz de forma imediata à solução não-iterativa do problema. Provámos, em alternativa, a convergência de um método iterativo para aproximar a solução do problema. Em qualquer dos casos examinados, a teoria unificada reconduz, de maneira relativamente simples e directa, aos resultados que anteriormente tínhamos derivado caso a caso.

O método geral sugere também um número de generalizações desses resultados. Em particular, sugere a possibilidade de melhorar a convergência dos métodos iterativos por utilização de séries mais rapidamente convergentes para $1/(1-x)$. Possibilita também o estabelecimento de resultados de reconstrução do tipo estudado em espaços de Banach de dimensão infinita, como é o caso dos espaços L_1 e $C(I)$, para uma variedade de núcleos K , e para funções desconhecidas em intervalos de medida finita ou infinita.

6.2 Trabalho futuro

O estudo dos tópicos que iremos considerar em seguida está desigualmente desenvolvido. Enquanto que podemos dar como praticamente encerrado o estudo de alguns desses assuntos, o de outros está apenas principiado, razão pela qual não poderemos ser completamente precisos.

O primeiro tópico que citaremos é o estudo da convergência do algoritmo de interpolação e extrapolação em \mathbb{C}^m baseado na forma discreta do algoritmo de Papoulis-Gerchberg. Encontra-se praticamente concluído Ferreira (1994b), e inclui a apresentação de majorantes e minorantes óptimos para o erro em função do número de iterações, a determinação do valor óptimo da constante de relaxação, uma avaliação do efeito da posição das amostras desconhecidas na velocidade de convergência, e a determinação, para cada tipo de funcional \mathbf{B} , das posições mais favoráveis e menos favoráveis para as amostras desconhecidas.

Apesar do algoritmo discreto de Papoulis-Gerchberg ser um método de dimensão n , ditada pela dimensão dos vectores de amostras considerados, as conclusões deste estudo aplicam-se também ao método iterativo de dimensão reduzida que estudámos no terceiro capítulo do presente trabalho, obtido da equação $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h}$ pelo método das aproximações sucessivas.

Temos também iniciado o estudo de certos algoritmos um pouco mais complexos mas também mais poderosos para a solução iterativa do problema de interpolação e extrapolação, que nalguns casos aceleram substancialmente a convergência Ferreira (1993). Esses algoritmos obtêm-se com base no particionamento da matriz de iteração dos algoritmos iterativos discutidos no terceiro capítulo.

Para dar uma melhor ideia das possibilidades destes métodos apresentamos um exemplo, obtido a partir do sinal representado na figura 6.1. Trata-se de um vector

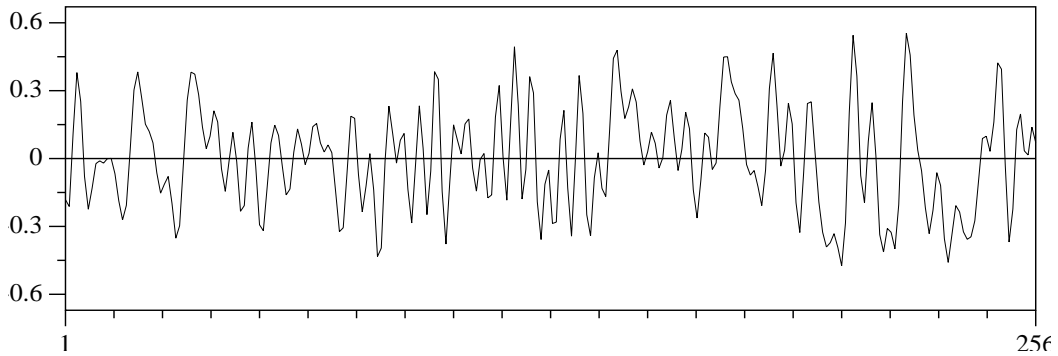


Figura 6.1: Vector de dimensão 256 gerado aleatoriamente e limitado em frequência de modo a ter uma largura de banda normalizada igual a 0.5.

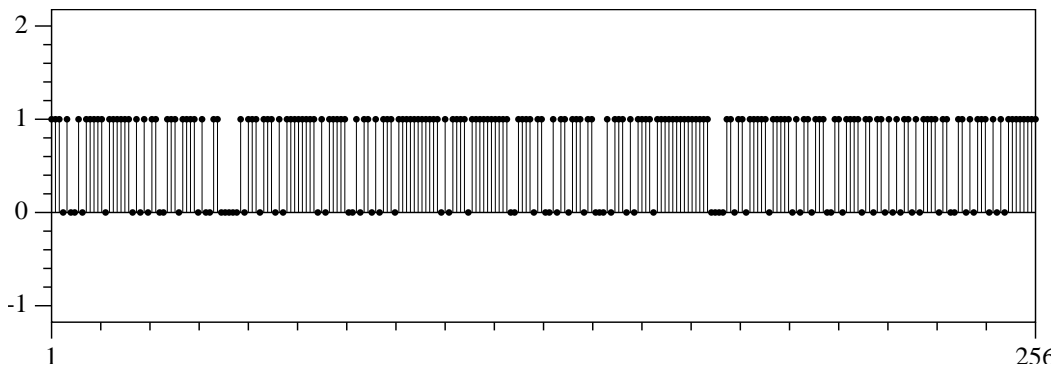


Figura 6.2: Vector amostrador de densidade normalizada 0.7. O processo de amostragem correspondente introduz uma perda de amostras de 30 por cento.

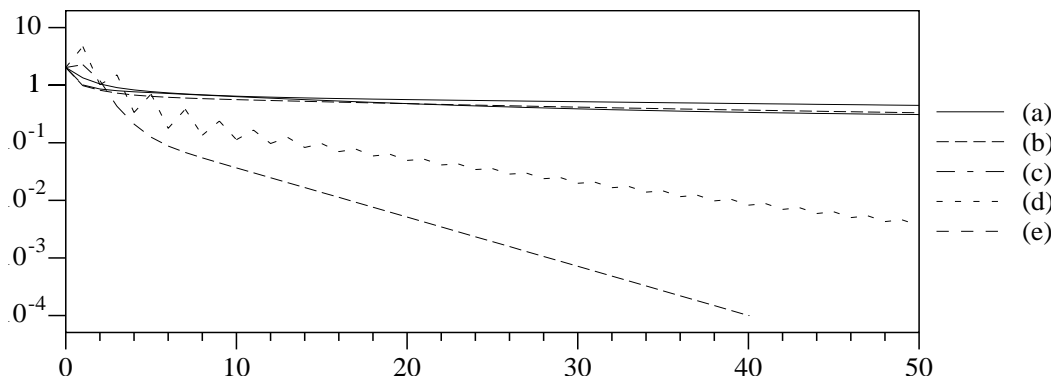


Figura 6.3: Erro quadrático *versus* número de iterações para os métodos (a) Papoulis-Gerchberg, (b) Jacobi, (c) Gauss-Seidel, (d) Jacobi com particionamento, (e) Gauss-Seidel com particionamento.

de dimensão 256, gerado aleatoriamente, e limitado em frequência de modo a ter uma largura de banda normalizada igual a 0.5. O vector amostrador, também de dimensão 256, está representado na figura 6.2. As amostras nulas deste vector definem as posições das amostras desconhecidas do vector original. A densidade normalizada do vector amostrador é 0.7, o que corresponde a um problema de reconstrução em que 30 por cento de amostras do sinal original são desconhecidas. O número máximo de zeros consecutivos é 5.

A evolução do erro para cada um dos métodos estudados nos capítulos anteriores consta da figura 6.3, na qual representamos também o erro obtido com algoritmos conseguidos por particionamento da matriz de iteração. Como se pode ver, o desempenho destes últimos é claramente superior. A ordem da matriz de iteração dos métodos que vimos no terceiro capítulo é ditada pelo número de incógnitas ou amostras desconhecidas, que é igual a 77 neste caso. O particionamento efectuado foi feito tomando uma matriz de iteração 7×7 com blocos 11×11 .

Com base nos resultados que apresentámos anteriormente é fácil formular algoritmos potencialmente capazes de tirar partido de máquinas com capacidade de multiprocessamento. Apesar das boas perspectivas práticas que os resultados de que já dispomos parecem sugerir, a sua discussão foi excluída do presente trabalho. Esperamos poder completá-la no futuro.

Existe uma outra linha de estudo que não explorámos, apesar de tal ser perfeitamente possível. Referimo-nos a problemas de reconstrução multidimensional análogos aos que considerámos. Parece-nos que a via mais curta para a obtenção de resultados nessa direcção passa pela generalização do teorema de Kramer para funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é, aliás, trivial. Definindo apropriadamente o conceito de sobre-amostragem, poder-se-ia então chegar a soluções iterativas e não-iterativas para problemas de reconstrução multidimensional sem grande esforço teórico. Por brevidade, optámos por omitir a discussão deste tópico, que esperamos poder vir a efectuar numa próxima oportunidade.

Não queremos deixar de referir uma outra possibilidade de trabalho, apesar de não dispormos ainda de resultados definitivos sobre o assunto. Referimo-nos à análise da robustez dos métodos iterativo e não-iterativo, em presença de dados inconsistentes ou de ruído. Nestas condições, como é de esperar, o método não-iterativo pode conduzir a resultados menos satisfatórios do que os métodos iterativos, os quais são relativamente fáceis de controlar por variação do número de iterações. No entanto, e como o método não-iterativo depende de uma operação de inversão matricial, o seu desempenho depende em boa medida da robustez do método de inversão utilizado. Nestas condições os métodos baseados em decomposição em valores singulares parecem ser os mais recomendáveis. Existem, contudo, outras possibilidades, como sejam a utilização de pseudo-inversas, que correspondem à solução de norma mínima no sentido dos mínimos quadrados, e a utilização de técnicas de regularização.

Referências bibliográficas

- Louis Auslander e R. Tolimieri. Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics? *Bull. Am. Math. Soc.*, 1(6):847–897, 1979. 1.6
- S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundam. Math.*, 3:133–181, 1922. 3.10, 4.5.1, 4.7
- H. Bateman. On the inversion of a definite integral. *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 4:461–498, 1906. 4.7
- R. P. Boas. *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954. 1.3, 5.5.6, 5.5.6, 5.6
- C. B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 1985. 2.4
- J. L. Brown, Jr. An RKHS analysis of sampling theorems for harmonic-limited signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 33(2):437–440, 1985. 2.3.3
- P. L. Butzer. A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions. *J. Math. Res. Expos.*, 3(1):185–212, 1983. 1.6
- P. L. Butzer e R. J. Nessel. *Fourier Analysis and Approximation*, volume 1. Birkhäuser, Basel, 1971. 1.2, 1.6, 4.6.2
- Sergio D. Cabrera e Thomas W. Parks. Extrapolation and spectral estimation with iterative weighted norm modification. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(4):842–851, 1991. (document)
- James A. Cadzow. An extrapolation procedure for band-limited signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 27(1):4–12, 1979. (document), 4.7
- James A. Cadzow. Observations on the extrapolation of a band-limited signal problem. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 29(6):1208–1209, 1981. (document), 4.7
- L. L. Campbell. Sampling theorem for the Fourier transform of a distribution with bounded support. *SIAM J. Appl. Math.*, 16(3):626–636, 1968. 2.3.1, 2.4

- Christodoulos C. Chamzas e Wen Yuan Xu. An improved version of Papoulis-Gerchberg algorithm on band-limited extrapolation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32(2):437–440, 1984. (document)
- K. Chandrasekharan. *Classical Fourier Transforms*. Springer, Berlin, 1989. 1.2, 1.4, 1.6
- C.-Y. Chao. On a type of circulants. *Linear Algebra Appl.*, 6:241–248, 1973. 3.3.1, 3.10
- James W. Cooley. How the FFT gained acceptance. *IEEE Sig. Proc. Mag.*, 9(1): 10–13, 1992. 2.4
- R. Courant e D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Interscience Publishers, Inc., New York, 1953. Reimpresso: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1989. 1.1, 2.1.2, 2.2.3, 4.5, 4.7
- P. J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1963. Reimpresso: Dover Publications, 1975. (document), 3.10
- P. J. Davis. *Circulant Matrices*. John Wiley & Sons, New York, 1979. Reimpresso: Chelsea Publishing Company, New York, 1994. 3.7, 3.10
- N. Dunford e J. T. Schwartz. *Linear Operators Part I: General Theory*, volume 1. John Wiley & Sons, New York, 1957. Reimpresso: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1988. 4.6.2, 5.6
- N. Dunford e J. T. Schwartz. *Linear Operators Part III: Spectral Operators*, volume 3. John Wiley & Sons, New York, 1971. Reimpresso: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1988. 4.6.2
- P. J. S. G. Ferreira. Reconstrução de sinais a partir de informação parcial. Trabalho de síntese, Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Departamento de Electrónica e Telecomunicações, Universidade de Aveiro, 1988. (document), 3.6.2, 3.10, 4.7
- P. J. S. G. Ferreira. Fast iterative reconstruction of distorted ECG signals. Em *Proceedings of the 14th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, volume II, páginas 777–778, Paris, France, 1992a. (document)
- P. J. S. G. Ferreira. Incomplete sampling series and the recovery of missing samples from oversampled band-limited signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(1):225–227, 1992b. (document), 2.4

- P. J. S. G. Ferreira. Iterative interpolation of ECG signals. Em *Proceedings of the 14th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, volume VI, páginas 2740–2741, Paris, France, 1992c. (document)
- P. J. S. G. Ferreira. A unified approach to a class of constrained interpolation, extrapolation and sampling problems. Em *Proceedings of RecPad92, 4th Portuguese Conference on Pattern Recognition*, páginas 273–279, Coimbra, Portugal, 1992d. (document)
- P. J. S. G. Ferreira. New fast block-iterative algorithms for band-limited interpolation and extrapolation. Em *Proceedings of RecPad93, 5th Portuguese Conference on Pattern Recognition*, páginas 9–16, Maia, Portugal, 1993. (document), 6.2
- P. J. S. G. Ferreira. A group of permutations that commute with the discrete Fourier transform. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2):444–445, 1994a. (document)
- P. J. S. G. Ferreira. Interpolation and the discrete Papoulis-Gerchberg algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(10):2596–2606, 1994b. (document), 3.6.2, 3.6.2, 3.9, 6.2
- P. J. S. G. Ferreira. Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(11):3278–3282, 1994c. (document)
- R. W. Gerchberg. Super resolution through error energy reduction. *Opt. Acta*, 21(9):709–720, 1974. (document), 4.2.3, 4.7
- P. R. Halmos. *Measure Theory*. D. Van Nostrand Company, New York, segunda edição, 1951. 1.6
- G. H. Hardy. On an integral equation. *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 7:444–472, 1909. 4.7
- G. H. Hardy. *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edição, 1967. 1.6
- G. H. Hardy e E. C. Titchmarsh. Solutions of some integral equations considered by Bateman, Kapteyn, Littlewood, and Milne. *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 23:1–26, 1924. 4.7
- G. H. Hardy e E. C. Titchmarsh. Additional note on certain integral equations. *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 30:95–106, 1929. 4.7
- J. R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 12(1):45–89, 1985. 1.6, 2.4

- H. Hochstadt. *Integral Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1973. Reimpresso: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1989. 2.2.3, 4.5, 4.7, 5.6
- R. A. Horn e C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. 1.1
- A. S. Householder. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover Publications, New York, 1975. 1.1, 2.4
- Anil K. Jain e Surendra Ranganath. Extrapolation algorithms for discrete signals with application in spectral estimation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 29(4):830–845, 1981. (document), 4.7
- A. J. Jerri. On the application of some interpolating functions in physics. *Journal of Research of the National Bureau of Standards — B, Mathematical Sciences*, 73B(3):241–245, 1969. 2.4
- A. J. Jerri. Sampling expansion for a Laguerre- L_v^α transform. *Journal of Research of the National Bureau of Standards — B, Mathematical Sciences*, 80B(3):415–418, 1976. 2.4
- A. J. Jerri e D. W. Kreisler. Sampling expansions with derivatives for finite Hankel and other transforms. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 6(2):262–267, 1975. 2.4
- Abdul J. Jerri. The Shannon sampling theorem — its various extensions and applications: a tutorial review. *Proc. IEEE*, 65(11):1565–1596, 1977. 1.4, 1.4, 1.6, 2.1, 2.2.3, 2.4
- M. C. Jones. The discrete Gerchberg algorithm. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34(3):624–626, 1986. (document)
- Aggelos K. Katsaggelos e Serafim N. Efstratiadis. A class of iterative signal restoration algorithms. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38(5):778–786, 1990. (document)
- Dean P. Kolba e Thomas W. Parks. Optimal estimation for band-limited signals including time domain considerations. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(1):113–122, 1983. (document)
- T. W. Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. 1.6
- H. P. Kramer. A generalized sampling theorem. *J. Math. Physics*, 38:68–72, 1959. 1.4, 1.6, 2.4
- E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1978. Reimpresso: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1989. 4.6.1, 4.6.1, 5.1, 5.1, 5.4, 5.6

- H. J. Landau. On the recovery of a band-limited signal, after instantaneous companding and subsequent band limiting. *Bell Syst. Tech. J.*, 39:360–364, 1960. (document), 1.6, 4.7
- H. J. Landau e W. L. Miranker. The recovery of distorted band-limited signals. *J. Math. Anal. Appl.*, 2:97–104, 1961. (document), 1.6, 4.7
- H. J. Landau e H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II. *Bell Syst. Tech. J.*, 40:65–84, 1961. (document), 1.3, 4.7
- B. F. Logan. On the eigenvalues of a certain integral equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4):712–717, 1984. 4.7
- B. F. Logan, Jr. Theory of analytic modulation systems. *Bell Syst. Tech. J.*, 57(3):491–576, 1978. (document)
- R. J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer, Berlin, 1991. 1.4, 1.6, 2.4
- Robert J. Marks II. Restoring lost samples from an oversampled band-limited signal. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(3):752–755, 1983. (document), 2.1, 2.1.2, 2.1.4, 2.4, 4.7
- Robert J. Marks II e Tonya Reightley. On iterative evaluation of extrema of integrals of trigonometric polynomials. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 33(4):1039–1049, 1985. (document), 4.7
- F. A. Marvasti. An iterative method to compensate for the interpolation distortion. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(10):1617–1621, 1989. (document), 4.7
- F. A. Marvasti, M. Analoui, e M. Gamshadzahi. Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(4):872–878, 1991. (document), 4.7
- Elias Masry. The recovery of distorted band-limited stochastic processes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 19(4):398–403, 1973. (document)
- F. J. Murray. On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41:138–152, 1937. 5.2
- P. S. Naidu e Bina Paramasivaiah. Estimation of sinusoids from incomplete time series. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32(3):559–562, 1984. (document), 4.7
- H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans. AIEE*, 47:617–644, 1928. 1.6

- A. Papoulis. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 22(9):735–742, 1975. (document), 4.2.3, 4.7
- A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill International Editions, New York, 1987. 1.6, 2.2.3, 3.5
- Athanasios Papoulis e Christodoulos Chamzas. Detection of hidden periodicities by adaptive extrapolation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 27(5):492–500, 1979. (document)
- H. R. Pitt. *Measure and Integration for Use*. Oxford University Press, Oxford, 1987. 1.6
- W. Pogorzelski. *Integral Equations and Their Applications*. Pergamon Press, Oxford, 1966. 4.7
- L. C. Potter e K. S. Arun. Energy concentration in band-limited extrapolation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(7):1027–1041, 1989. (document)
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. (document)
- M. D. Rawn. On nonuniform sampling expansions using entire interpolation functions, and on the stability of Bessel-type sampling expansions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 35(3):549–557, 1989. 1.6
- F. Riesz e B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955. Reimpresso: Dover Publications, 1990. 4.7, 5.6
- H. E. Rose. *A Course in Number Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1988. 3.3.1, 3.3.1, 3.3.1
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, New York, terceira edição, 1987. 1.3, 1.6, 5.6
- M. S. Sabri e W. Steenaart. An approach to band-limited signal extrapolation: The extrapolation matrix. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 25(2):74–78, 1978. (document), 4.7
- M. Shaker Sabri e Willem Steenaart. Comments on “An extrapolation procedure for band-limited signals”. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 28(2):254, 1980. (document), 4.7
- M. Shaker Sabri e Willem Steenaart. Rebuttal to “Observations on the extrapolation of a band-limited signal problem”. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 29(6):1209, 1981. (document), 4.7

- I. W. Sandberg. On the properties of some systems that distort signals — I. *Bell Syst. Tech. J.*, 42:2033–2046, 1963. (document), 4.7
- J. L. C. Sanz e T. S. Huang. Unified Hilbert space approach to iterative least-squares linear signal restoration. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11):1455–1465, 1983a. (document), 5.6
- Jorge L. Sanz e Thomas S. Huang. Iterative time-limited signal reconstruction. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(3):643–649, 1983b. (document)
- Jorge L. C. Sanz e Thomas S. Huang. Discrete and continuous band-limited signal extrapolation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(5):1276–1285, 1983c. (document)
- Jorge L. C. Sanz e Thomas S. Huang. Some aspects of band-limited signal extrapolation: Models, discrete approximations, and noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(6):1492–1501, 1983d. (document)
- Jorge L. C. Sanz e Thomas S. Huang. A unified approach to noniterative linear signal restoration. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32(2):403–409, 1984. (document), 4.7
- K. D. Sauer e J. P. Allebach. Iterative reconstruction of band-limited images from nonuniformly spaced samples. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 34(12):1497–1506, 1987. (document), 4.7
- R. W. Schafer, R. M. Mersereau, e M. A. Richards. Constrained iterative restoration algorithms. *Proc. IEEE*, 69(4):432–450, 1981. (document), 3.6.2, 3.10, 4.7
- Heinz-Josef Schlebusch e Wolfgang Spletstößer. On a conjecture of J. L. C. Sanz and T. S. Huang. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 33(6):1628–1630, 1985. (document)
- S. Singh, S. N. Tandon, e H. M. Gupta. An iterative restoration technique. *Sig. Proc.*, 11:1–11, 1986. (document)
- D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty — V: The discrete case. *Bell Syst. Tech. J.*, 57(5):1371–1430, 1978. 2.1.2, 2.1.4
- D. Slepian e H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty — I. *Bell Syst. Tech. J.*, 40(1):43–63, 1961. (document), 1.3, 4.7
- D. R. Smart. *Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980. 3.10, 4.7
- D. E. Smith. *A Source Book in Mathematics*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1929. Reimpresso: Dover Publications, 1959. 2.4

- F. Smithies. *Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, quarta edição, 1970. 4.5, 4.7
- A. Sobczyk. Projections in Minkowsky and Banach spaces. *Duke Math. J.*, 8:78–106, 1941. 5.2
- J. M. Sousa Pinto. *Sampling Expansions and Generalized Translation Invariant Linear Systems*. Tese de Doutoramento, Dept. of Mathematics, Cranfield Institute of Technology, U.K., 1983. 1.6
- J. Spanier e K. B. Oldham. *An Atlas of Functions*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1987. 2.2.3
- G. W. Stewart. Review of *matrix computations* by Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Linear Algebra and its Applications*, 95:211–215, 1987. 2.4
- Barry J. Sullivan e Bede Liu. On the use of singular value decomposition and decimation in discrete-time band-limited signal extrapolation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32(6):1201–1212, 1984. (document)
- E. C. Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, Oxford, segunda edição, 1948. 1.6, 2.4, 4.6.1, 4.6.2, 4.7
- E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford University Press, Oxford, segunda edição, 1968. 1.6, 4.6.2
- Victor T. Tom, Thomas F. Quatieri, Monson H. Hayes, e James H. McClellan. Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 29(5):1052–1058, 1981. (document), 3.10
- F. G. Tricomi. *Integral Equations*. Dover Publications, New York, 1985. 4.5, 4.7
- R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962. 2.1.4, 2.1.5, 2.4, 3.8, 3.8.4
- G. A. Viano. On the extrapolation of optical image data. *J. Math. Physics*, 17(7):1160–1165, 1976. (document)
- P. Weiss. Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 63:242, 1957. 1.6
- E. T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35:181–194, 1915. 1.6
- N. Wiener. *The Fourier Integral and Certain of Its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1933. Reimpresso: Dover Publications, 1958. 1.6

- R. G. Wiley. On an iterative technique for recovery of bandlimited signals. *Proc. IEEE*, 66(4):522–523, 1978a. (document)
- R. G. Wiley. Recovery of bandlimited signals from unequally spaced samples. *IEEE Trans. Commun.*, 26(1):135–137, 1978b. (document), 4.7
- R. G. Wiley. Concerning the recovery of a bandlimited signal or its spectrum from a finite segment. *IEEE Trans. Commun.*, 27(1):251–252, 1979. (document), 4.7
- R. G. Wiley, H. Schwarzlander, e D. D. Weiner. Demodulation procedure for very wide-band FM. *IEEE Trans. Commun.*, 25(3):318–327, 1977. (document), 4.7
- J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1978. 2.4
- Wen Yuan Xu e Christodoulos Chamzas. On the extrapolation of band-limited functions with energy constraints. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(5):1222–1234, 1983. (document)
- D. C. Youla. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 25(9):694–702, 1978. (document), 4.7
- D. M. Young. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, Orlando, terceira edição, 1971. 2.1.4, 2.1.5, 2.4, 3.8, 5.6
- X.-W. Zhou e X.-G. Xia. The extrapolation of high-dimensional band-limited functions. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(10):1576–1580, 1989a. (document)
- X.-W. Zhou e X.-G. Xia. A Sanz-Huang conjecture on band-limiting signal extrapolation with noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(9):1468–1472, 1989b. (document)