RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Múltiplos Contextos e Perspectivas

Coordenação de

Domingos Fernandes
Frank Lester, Jr.
António Borralho
Isabel Vale

GRUPO DE INVESTIGAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
AVEIRO
1997

Biblioteca Nacional – Catalogação na Publicação

Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas / Domingos Fernandes ... [et al.]

ISBN 972-97210-0-9

I - Fernandes, Domingos, 1953-

CDU 371.1
51
377

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: Múltiplos Contextos e Perspectivas

1ª Edição: Fevereiro de 1997
ISBN 972-97210-0-9

Edição: GIRP (Grupo de Investigação em Resolução de Problemas)

Coordenador: Domingos Fernandes, Frank Lester, António Borralho e Isabel Vale

Tiragem: 750 exemplares

Capa: Cesaltina Silva
Execução gráfica: GRÁFIS, Coop. de Artes Gráficas, CRL

Depósito legal nº 108591/97

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à **JUNTA NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA (JNICT)** que financiou integralmente a publicação deste livro e, parcialmente, a investigação que deu origem aos artigos portugueses aqui publicados, através do Projecto PCSH/413/92/CED.

Agradecemos às Universidades de Aveiro, de Évora e do Minho e às Escolas Superiores de Educação de Viana do Castelo e de Bragança pela colaboração prestada ao longo do desenvolvimento do projecto.

Agradecemos a todos os professores e alunos que, anonimamente, participaram nas diferentes fases da investigação. A sua colaboração foi inestimável e viabilizou muito do trabalho aqui apresentado.

ÍNDICE

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: DESEMPENHOS E PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Isabel Cabrita
Universidade de Aveiro

Resumo

A integração, no processo ensino/aprendizagem, de uma grande variedade de estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade – conceito com inúmeras aplicações, quer no dia-a-dia quer no prosseguimento académico – inclusivé as menos ortodoxas, poderá contribuir para a construção/solidificação de um melhor conhecimento conceptual. Para que tal seja, no entanto, plausível, os professores devem estar aptos a usar eles próprios tal variedade de estratégias. A investigação que levamos a cabo permitiu-nos concluir, no entanto, que os futuros professores nela envolvidos, além de manifestarem muitas dificuldades na resolução dos problemas propostos – com o mesmo grau de dificuldade daqueles que os seus futuros alunos deverão que resolver – não se mostraram capazes de variar os processos de resolução, mesmo quando tal lhes era explicitamente pedido, referindo que seriam os que utilizariam aquando da possível abordagem daqueles problemas com os seus futuros alunos.

Abstract

Integration in the teaching-learning process of a large variety of problem-solving strategies on proportionality – a concept with innumerable applications in everyday and academic life – including less orthodox ones, can contribute towards the construction//sedimentation of a better conceptual knowledge. Nevertheless, for this to be possible, teachers need to have the skills that enable them to use such variety of strategies. The research we have been conducting allows us to conclude, however, that the pre-service teachers involved in the study, apart from evidencing a great deal of difficulty in solving the problems in the study – which had the same degree of difficulty of those their future students will have to solve – did not show an ability to vary the resolution processes, even when explicity prompted to do so, stating that the processes they selected in the study would be the ones they would use in their future teaching practice.

O facto de muitos aspectos do nosso mundo operarem de acordo com regras proporcionais torna as capacidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação de fenómenos do mundo real (Cramer, Post e Behr, 1989).

A relação entre proporcionalidade[1] e realidade é enfatizada por muitos investigadores que se têm debruçado sobre este tema (Carraher, Carraher e Schliemann, 1991; Chin, 1992; Cramer, Post e Currier, 1993; Fisher, 1988; Hart, 1988; Heller, Ahlgren e Post 1989; Hoffer, 1988; Post, Behr e Lesh, 1988).

Uma vez que o tipo de raciocínio proporcional também está presente na resolução de problemas que envolvem, por exemplo, o conceito de densidade, aceleração, concentração, velocidade e força, não admira que o tópico proporcionalidade seja considerado uma das mais ancestrais e fundamentais ligações entre a ciência e a Matemática (Heller, Ahlgren e Post, 1989).

No âmbito da educação, Lesh, Post e Behr (1988), referiam que o raciocínio proporcional desempenha um papel de tal ordem crítico no desenvolvimento matemático dos alunos que tem sido considerado um conceito de charneira, a 'pedra angular' das matemáticas avançadas e um marco na aprendizagem dos conceitos elementares. Chin (1992) acrescenta que o raciocínio proporcional é um tipo de raciocínio formal necessário para a abstração empírica.

Dado que aquele tipo de raciocínio é fundamental para o sucesso dos alunos, não admira que o National Council of Teachers of Mathematics lhe atribua um lugar de destaque (cf, NCTM, 1989). A sua importância está ainda patente em variadíssimos projectos encetados com o fim último de promoverem uma adequada aquisição de conceitos entre os quais o de proporcionalidade (cf Cramer, Post e Currier, 1993; Hart, 1988; Matos, 1995).

Proporcionalidade é portanto um conceito com inúmeras aplicações, quer no dia-a-dia quer no prosseguimento académico. Verificamos, no entanto, que perante problemas envolvendo tal conteúdo ou os alunos têm bastante dificuldade em os associar e/ou determinar o algoritmo ou heurísticas adequadas a utilizar, ou optam muitas das vezes (e principalmente em situações extra curriculares), por uma resolução bem menos formal do que a utilizada pelos professores na abordagem de tal conteúdo (cf. Carraher, Carraher e Schliemann, 1991; Fisher, 1988; Lamon, 1993).

Nesta perspectiva, alguns investigadores opinam que a integração, no processo ensino/aprendizagem, de uma grande variedade de estratégias de resolução de problemas envolvendo tal conceito, inclusivé as menos ortodoxas, contribue para a construção/solidificação de um melhor conhecimento conceptual (Fisher, 1988). Para que tal seja, no entanto, plausível, os professores devem estar aptos a usar eles próprios tal variedade de estratégias.

[1] Neste documento só abordaremos a proporcionalidade directa.

Neste contexto, implementamos uma 'investigação exploratória' com o intuito analisar os desempenhos de futuros professores de Matemática do 3º Ciclo do Ensi Básico (CEB) na resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalida quando lhes é pedido (S) ou não (N) que utilizem várias estratégias. Além dis pretendia-se analisar as estratégias que os futuros professores de Matemática do 3º Cl dizem que utilizariam na abordagem de problemas envolvendo o conceito proporcionalidade, nas situações (N) e (S).

problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade e a futuros professoi de Matemática do 3º C.E.B.:

- Que estratégias utilizam na resolução daqueles problemas, nas situações (N) e (S)?
- Que estratégias dizem que utilizariam no ensino de problemas daquele tipo n situações (S) e (N)?
- Que estratégias de resolução daqueles problemas consideram mais adequados, men adequados e os que nunca utilizariam?
- Consideram importante contemplar mais do que uma estratégia de resolução problemas no processo ensino/aprendizagem?

É precisamente o resultado dessa 'investigação' que nos propomos divulgar nes trabalho, para o que entendemos dividi-lo em três partes distintas. Na primeira, Enquadramento Conceptual, abordam-se questões que se prendem com: a discussão alguns conceitos relacionados com o de proporcionalidade; a aquisição desse conceito: tipologia de problemas que envolvem o conceito em causa; as estratégias de resoluç dos problemas em estudo e os factores que influenciam essas estratégias. A segun parte deste trabalho será destinada à descrição da metodologia utilizada na 'investigaçã e focará, essencialmente, as opções metodológicas, os participantes intervenientes, contexto em que tal investigação se desenrolou, os instrumentos utilizados, procedimentos do investigador, a recolha e análise dos dados e a apresentação discussão dos principais resultados.

Finalizaremos com algumas conclusões, reflexões e implicações didácticas.

Enquadramento Conceptual

Discussão de Alguns Conceitos

Determinado conceito desenvolve-se não isoladamente mas em relação com outros conceitos, através de vários tipos de problemas e por recurso a vários processos e simbolismos (Vergnaud, 1988).

Proporcionalidade é um exemplo simples mas poderoso duma funçã matemática que pode ser representada por uma equação linear. Portanto é uma ligaçã conveniente e talvez necessária entre experiências numéricas comuns e padrões e relação mais abstracta que pode ser expressa algebricamente. A representação algébrica da proporcionalidade (y=mx) representa uma classe alargada de ocorrências (Post, Behr e Lesh, 1988).

Relacionados com o conceito de proporcionalidade estão, entre outros, os conceitos de fracção, razão, divisão, proporção, raciocínio proporcional, aparecendo por vezes, na literatura referenciados de forma pouco explícita. Para Hart (1988) uma razão é uma relação entre duas entidades.

Hoffer enfatiza que o essencial numa razão envolve comparação de medidas de uma forma *ordenada*, ou seja pressupõe-se a existência de uma primeira medida e de uma segunda medida, sendo aceitável comparar medidas de diferentes unidades. Define então razão como um par ordenado de medidas (Hoffer, 1988). Nesta perspectiva, embora possamos interpretar as fracções como razões, este autor alerta para o facto de uma razão não ser uma fracção. Realmente as razões podem comparar objectos distintos, ou seja, objectos medidos em diferentes unidades enquanto as fracções são usadas para comparar o mesmo tipo de objectos; as razões podem ser representadas por outros símbolos que não o de fracção (e.g. 4:7 ou 4 – 7); as razões podem usar o zero como segundo termo enquanto as fracções não admitem o zero em denominador; as razões nem sempre são racionais, enquanto as fracções são, por natureza, números racionais porque toda a fracção representa o quociente de dois números inteiros; não operamos com as razões da mesma forma que operamos com as fracções (e.g. 2:5 + 3:7 = 5: 12 e no entanto 2/5 + 3/7 ≠ 5/12).

Para Vergnaud (1983, 1988) como para Post, Behr e Lesh (1988), no entanto, uma razão relaciona quantidades do mesmo tipo.

Na perspectiva de Kaput e Schwartz razão é uma relação entre quantidades quer sejam extensivas quer sejam intensivas. As quantidades *extensivas* dizem o tamanho de determinado objecto, 'quanto' (i. e. 'a extensão') de uma quantidade está associada a determinado objecto (ex° 5km, 5 graus – temperatura, 20 graus – ângulo), enquanto as *intensivas* (ou 'por' quantidade) expressam relações entre uma quantidade e uma unidade de outra quantidade (ex° 30km/h, 30$00 por peça) (Lesh, Post e Behr, 1988).

Para Lesh, Post e Behr (1988) fracções são tipos específicos de *quantidades extensivas*; razões são *relações* binárias que envolvem pares ordenados de quantidades (de qualquer tipo, *extensivo*, *intensivo* ou *escalar*); divisões são *operações* binárias que combinam duas quantidades (*extensivas*, *intensivas* ou *escalares)* inserindo-as numa quantidade de um terceiro 'espaço-medida', segundo terminologia de Vergnaud (1983, 1988).

O termo proporção é habitualmente definido como sendo uma igualdade entre duas razões (cf. Fisher, 1988; Heller, Ahlgren e Post, 1989; Hoffer, 1988; Martins, M. H., 1989). Para Vergnaud, no entanto, proporção pode ser definida como uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois 'espaços-medida'. A notação que utiliza é a seguinte

M1	M2
a	b
c	d

representando M1 e M2 esses espaços e a, b, c, d, as quantidades que formam as razões.

Neste contexto uma situação proporcional comportaria as seguintes características: as quantidades 'dos' ou 'entre' os espaços medida estão sempre relacionados multiplicativamente; existência de um factor constante que relaciona os elementos entre os 'espaços medida' pela fórmula y= Kx; gráficos caracterizados por uma linha recta (inclinada para a direita) que passa pela origem; possibilidade de considerar as diferentes razões como fracções equivalentes e redutíveis ao mesmo número; existência de um factor (não constante) que relaciona multiplicativamente quaisquer duas quantidades de um mesmo 'espaço-medida'.

Noelting (1980b), que também investigou o conceito de proporcionalidade, refere que na proporção a:b=c:d se podem considerar dois tipos de razões: razões entre os termos de uma classe ou de um conceito ou razões entre classes de um conceito, considerando que o tópico em causa integra ambos os tipos de razão.

Relacionado com todos estes termos abordados, surge forçosamente o de raciocínio proporcional, cuja principal característica, segundo Piaget, seria o facto de envolver uma relação entre relações, ou seja, uma relação de 'segunda ordem', em detrimento de uma relação entre dois objectos concretos, ou duas quantidades directamente relacionadas. Segundo a perspectiva perfilhada por Karplus, Pulos e Stage (1983) este tipo de raciocínio envolve uma relação linear entre duas variáveis, mas, segundo Lesh, Post e Behr, tarefas caracterizadas por equações aditivas ou mesmo multiplicativas do tipo A*B=C*D seriam indicadores pobres de um raciocínio proporcional, especialmente quando estas actividades apelam para uma solução puramente algorítmica.

Geralmente, raciocínio proporcional é um termo associado às resoluções das tarefas caracterizadas por uma relação entre duas expressões tais como A/B=C/D. Sendo uma condição necessária, não o é certamente suficiente. Reportando-nos novamente a Lesh, Post e Behr (1988), o entendimento do raciocínio proporcional deve ir além da simples noção de que dois membros de uma equação são iguais (no sentido de serem redutíveis ao mesmo valor). A equação A/B=C/D pode ser entendida como uma relação estática (=) entre dois sistemas matemáticos simples que são descritos independentemente pela relação A/B e C/D. No entanto, também pode ser entendida como uma transformação dinâmica que transforma um sistema matemático simples (descrito pela relação A/B) num sistema 'equivalente' (descrito pela razão C/D).

Para compreender a essência do raciocínio proporcional é então imprescindível reconhecer que a Matemática é essencialmente o estudo da estrutura e da invariância, da equivalência e não equivalência segundo uma variedade de transformações diferentes. O raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariância e de comparações múltiplas, e a habilidade de mentalmente armazenar e processar informação vária. Tem muitas afinidades com a 'inferência' e 'previsão' e envolve métodos qualitativos e quantitativos de pensamento.

Tal opinião é completamente partilhada por Post, Behr e Lesh (1988) que dedicam parte do seu trabalho ao estudo da representação gráfica de situações proporcionais. Um indivíduo dotado de raciocínio proporcional deve ser capaz de reconhecer que pontos representando fracções equivalentes ou razões, definem uma linha recta que passa pela origem (o que revela a natureza multiplicativa da relação), traduzindo portanto tal situação, uma função linear do tipo y=mx. Tal indivíduo deverá ainda reconhecer que m é o declive da recta, designado por constante de variação e que pode ser identificado localizando um valor no eixo horizontal e determinando o respectivo valor para y.

Um indivíduo dotado de raciocínio proporcional tem ainda a flexibilidade mental para abordar problemas de várias perspectivas e, ao mesmo tempo, uma estabilidade tal que lhe permite não ser radicalmente afectado por números 'grandes' ou 'difíceis' ou pelo contexto do problema. Finalmente, mas não menos importante, deverá ser capaz de distinguir entre um situação proporcional de uma não proporcional.

Aquisição do Raciocínio Proporcional

O tipo de raciocínio proporcional é geralmente considerado um dos componentes do pensamento formal adquirido na adolescência, já que pressupõe uma actividade de pensar e pensar sobre o pensar (Hoffer, 1988). Os indivíduos que se encontram no estádio das operações formais podem facilmente lidar com hipóteses que estabelecem sistematicamente sobre propriedades de objectos, que podem não ser directamente observáveis, e que vão a pouco e pouco testando. Esta reversibilidade de direcções entre a realidade e o possível é a característica fundamental do pensamento formal.

Mas o que se passa na transição? Que etapas percorrem os indivíduos até atingirem este tipo de raciocínio proporcional? Essas etapas são comuns a todos os indivíduos? E para cada indivíduo, são invariáveis, independentemente da tarefa?

Susan Lamon (1993) abordou esta questão, tendo sintetizado o resultado de uma investigação levada a cabo sobre o assunto, num esquema que a seguir se apresenta (Quadro 1).

As conclusões a que Susan Lamon chegou, sobre esta problemática, têm bastantes afinidades com os estádios da evolução das capacidades gerais de raciocínio proporcional das crianças, observadas por psicólogos do desenvolvimento.

A capacidade para o pensamento 'relativo' foi um factor crítico de separaçã entre os níveis 'construção de um padrão' e 'raciocínio pré-proporcional'. Os indivídu neste nível, pré-proporcional, poderiam resolver alguns problemas intuitivamen (construindo gráficos ou tabelas), mas já começavam a diferenciar as estruturas aditiv e multiplicativas. Contudo, os métodos informais utilizados nesta situação, embora p vezes eficazes, não pressupunham um entendimento das relações escalares e funcionai Quando os indivíduos eram capazes de pensar 'relativamente' em mais do que u contexto e concebiam a razão como uma nova entidade formada à custa das quantidad que a compunham, como resultado de composições múltiplas, atingiam o estádio ('raciocínio qualitativo proporcional'.

Quadro 1

Principais estádios da evolução das capacidades gerais de raciocínio proporcion segundo Susan Lamon.

Estratégias	Características
Evitar	Estratégias não construtivas . Nenhuma interação real com o problema
Visual ou aditiva	. Tentativa e erro ou . Respostas sem lógica ou . Julgamentos puramente visuais ou . Abordagens aditivas incorrectas
Construção de um padrão	. Uso de um padrões orais ou escritos sem entendimento de relações numéricas
Raciocínio pré-proporcional	Estratégias construtivas . Intuitiva, actividades com sentido (desenhos, gráficos, modelos) e . Uso de algum pensamento relativo
Raciocínio proporcional qualitativo	. Uso da razão como unidade e . Uso de pensamento relativo e . Entendimento de algumas relações numéricas
Raciocínio proporcional quantitativo	. Uso de símbolos algébricos para representar proporções com pleno entendimento das relações escalares e funcionais.

Para ultrapassarem este nível, teriam que dominar a natureza multiplica inerente às situações envolvendo razões e proporções. Isto pressupõe que não b estabelecer a comparação 'relativa' como uma alternativa à visão aditiva – é sim necessário desenvolver critérios que permitam julgar qual das perspectivas é apropriada à situação.

Inicialmente os indivíduos estabeleciam relações entre quantidades, relações essas (razões) que se tornam os novos elementos com os quais operam. O raciocínio qualitativo proporcional suporta então a futura aplicação do raciocínio quantitativo proporcional (Lamon, 1993).

De salientar, no entanto que, contrariamente ao preconizado amiúde por vários psicólogos, o tipo de raciocínio proporcional não parece ser uma capacidade global ou uma manifestação de uma estrutura cognitiva geral. Estudos realizados no âmbito da educação matemática levam a crer que a evolução do raciocínio proporcional é caracterizada por um aumento gradual de competências localizadas (cf. Lesh, Post e Behr (1988); Noelting; 1980a), 1980b); Touniaire, 1985; Vergnaud; 1983, 1988).

Estratégias de Resolução

> As concepções e competências dos alunos desenvolvem-se durante longos períodos de tempo através da experiência num grande número de situações, quer na escola quer fora dela. Quando confrontados com uma situação nova, utilizam conhecimento que foi moldado pela sua experiência em situações mais simples e familiares, tentando adaptá-lo a essa situação nova (Vergnaud, 1988).

Como principais processos de resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade poderemos considerar os aditivos, os de 'reconhecimento e replicação de um padrão' (vulgarmente designados por 'building-up strategies'), os multiplicativos e a abordagem gráfica. O grupo dos processos multiplicativos engloba essencialmente estratégias de determinação do valor unitário, estratégias das 'fracções', descobrir a relação multiplicativa entre elementos e aplicá-la a outros e a estratégia do 'produto cruzado' (Carraher, Carraher e Schliemann, 1991; Cramer, Post e Currier, 1993; Fisher, 1988; Hart, 1988; Lesh, Post e Behr, 1988; Post, Behr e Lesh, 1988; Tourniaire e Pulos, 1985).

Um grande número de crianças resolve os problemas de proporcionalidade utilizando métodos aditivos em detrimento dos multiplicativos. O raciocínio aditivo representa, na opinião de Hart (1988), um esforço dos estudantes para lidar com as situações de uma forma aleatória em vez duma maneira sistemática. Além do mais, não representa nenhum patamar específico do desenvolvimento cognitivo, dado que o seu uso não conduz forçosamente ao sucesso. Prova disso é que o mesmo aluno pode usar estratégias de diferentes níveis, em problemas de proporcionalidade com graus de dificuldade diferentes – pode utilizar uma estratégia multiplicativa num problema com razões inteiras e um raciocínio aditivo quando os problemas contêm números não inteiros (Tourniaire e Pulos, 1985).

As estratégias de 'reconhecimento e replicação de um padrão' consistem em estabelecer a relação, por exemplo, entre os termos de uma razão e estendê-la à segunda razão. Assim, relativamente à proporção 4/6=8/x temos que 6=4+(1/2)4 e então x=8+(1/2)8=12. Tais estratégias são frequentemente utilizadas durante a infância e adolescência, parecendo ser dominantes em muitos grupos de crianças nestas fases. Vários estudos evidenciam que os indivíduos utilizam tais métodos bem menos formais do que os anteriores para resolverem problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade (cf. Carraher, Carraher e Schliemann, 1991; Hart, 1988; Fisher, 1988; Tourniaire e Pulos 1985).

Uma das estratégias que se afirma mais intuitiva na resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade é a da determinação do valor unitário, dado que os indivíduos já vivenciaram várias situações, quer no quotidiano quer mesmo nos anos iniciais de escolaridade, em que tiveram oportunidade de lidar com tal valor.

Descobrir a relação multiplicativa entre elementos e aplicá-la a outros, é outra estratégia bastante utilizada. De acordo com Post, Behr e Lesh (1988), tal método é uma interpretação necessária da proporcionalidade e deve fazer parte do repertório de todo o aluno, tornando certas subclasses de problemas da vida-real mais simples de resolver. Estas estratégias, no entanto, quando utilizadas sem a prévia consideração dos 'espaços-medida', mesmo que se demonstrem eficazes, prevalecem destituídas de significado. É um pouco o que acontece quando as razões são tratadas como fracções – 'estratégias das fracções' – os alunos descuram completamente o contexto de problema preocupando-se em calcular o resultado aplicando a regra multiplicativa para determinar fracções equivalentes: se 3/60 = 6/? então 3/60 x 2/2 = 6/120.

de se terem utilizado abordagens mais compreensíveis ao tópico proporcionalidade dado que poderá ser muito eficaz mas é certamente pouco compreensível (Post, Behr e Lesh, 1988). Cramer, Post e Currier (1993), referem que tal algoritmo não possui referentes físicos e é destituído de significado quer para os estudantes quer para todos os outros indivíduos. Hart (1988) defende que não foi provado que tal metodologia surja espontaneamente como resultado da maturação lógica, como preconizava Piaget. É mais provável que tais relações tenham que ser ensinadas, embora, mesmo assim, não sejam aplicadas espontaneamente a novas

Post e Behr (1988) consideram que tal algoritmo é mal compreendido pelos alunos, raramente gera soluções naturais e impede o uso de raciocínio proporcional, que não envolve per si.

Bem menos referida, mas não menos importante, é a abordagem gráfica aos problemas em causa. Realmente os gráficos podem ser utilizados, por exemplo, para determinar razões equivalentes e para identificar a variável nos problemas de determinação de um dos termos da proporção. Isto porque a função linear (da qual a primeira razão é um elemento) define completamente a relação entre todas as razões equivalentes (Post, Behr e Lesh, 1988).

Metodologia

Opções Metodológicas

Atendendo aos objectivos que se perseguiam neste estudo e que nortearam as questões de investigação já referidas na introdução, optamos por uma metodologia de natureza qualitativa, com vista a uma descrição, análise e interpretação o mais exaustiva possível dos elementos recolhidos (Erickson, 1986).

Com base nesses dados efectuou-se uma 'análise de conteúdo', holística por natureza, tal como preconizado por Bardin (1977), orientada por 'categorias temáticas pré-estabelecidas e/ou que se foram definindo recursivamente, através da análise das actividades desenvolvidas.

Participantes

Dado que nos interessava que os participantes neste trabalho fossem, a curto prazo, professores de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico, desenvolvemos a investigação com a única turma de 23 elementos que frequentava o 4º Ano de uma Licenciatura em Ensino da Matemática. Desses 23 alunos seleccionamos dez, curiosamente todos do sexo feminino, por terem respondido a um inquérito com vista a uma caracterização o mais detalhada possível dos intervenientes e terem cumprido a quase totalidade das actividades propostas (à excepção de uma aluna que não desenvolveu a última delas).

A investigação decorreu em meados de Maio. Dada a proximidade do final do ano lectivo (21 de Junho) com toda a sobrecarga que daí advém para os alunos e dado que estavam, na altura, envolvidos em mais duas investigações, o que levou inclusivamente, a que uma das participantes neste estudo, tivesse que o interromper, não o podendo ultimar, tentamos colocá-los numa situação o mais natural possível não lhes ocupando também demasiado tempo extra-curricular.

Neste contexto, desenvolveram individualmente as actividades propostas numa aula prática de 4h de Didáctica da Matemática, como se de mais uma tarefa se tratasse, com a presença e orientação exclusiva da própria professora e, lamentavelmente, prescindimos das entrevistas, instrumento que julgamos pudesse ter enriquecido a investigação pelos pontuais esclarecimentos que os alunos pudessem prestar relativamente à sua produção escrita.

Durante a sessão, que decorreu num ambiente agradável e descontraído, os alunos não manifestaram qualquer tipo de dúvida relativamente ao trabalho proposto, podendo interrompê-lo temporariamente quando se sentissem cansados. Embora condicionados pela duração da aula, a mesma foi, no entanto suficiente.

A disciplina onde decorreu a experiência é bi-semestral com uma carga lectiva de 6h/semana – 2h teóricas e 4h práticas. No ano lectivo em que ocorreu a investigação as aulas teóricas e as aulas práticas estavam concentradas num só bloco.

Em Didáctica da Matemática abordaram, entre outros, o módulo de Resoluçã de Problemas, tendo tido oportunidade de trabalhar, a nível teórico e prático, o seguintes temas: conceito de problema; tipologia de problemas; finalidades do ensino d resolução de problemas; modelo de Polya de resolução de problemas; actividade básicas para o ensino da resolução de problemas; estratégias de resolução de problema planificação de actividades de resolução de problemas e avaliação de actividades d resolução de problemas.

Recolha dos Dados

Tendo em atenção os objectivos que se pretendiam atingir, o tempo de qu dispunhamos para o estudo e as condições referidas, elaboramos 2 blocos de duas folh de identificação do aluno e enunciado da tarefa, organizamos 4 folhas de enunciado (problema e registo da sua resolução, construímos 2 questionários e seleccionamos problemas, acerca de um dos quais apresentamos várias propostas de resolução. Tais instrumentos foram aplicados em três fases distintas de acordo com o Quadro 2.

Quadro 2

Síntese das actividades desenvolvidas pelos participantes nesta investigação exploratória.

1ª tarefa	1ª actividade	. preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa . resolver o 1º problema . responder a um questionário
	2ª actividade	. preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa . resolver o 2º problema . responder a um questionário
2ª tarefa	3ª actividade	. preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa . resolver o 3º problema . responder a um questionário
	4ª actividade	. preencher a folha de identificação e ler o enunciado da tarefa . resolver o 4º problema . responder a um questionário
3ª tarefa	5ª actividade	. preencher a folha de identificação e ler o enunciado do 5º problema . analisar as várias resoluções do 5º problema . responder a um questionário

Nas primeira e segunda tarefas, as folhas de identificação do aluno e enunciado la tarefa além de permitirem facilmente identificar o aluno, foram elaboradas com o ntuito de realçar a tarefa específica a desenvolver, dado que abarcavam duas situações listintas (N) e (S) (cf. objectivos e questões de investigação) – na primeira pedia-se ao luno que resolvesse o problema seguinte (1ª tarefa), enquanto na outra (2ª tarefa), se edia que resolvesse o problema seguinte utilizando mais do que uma estratégia.

As folhas de enunciado do problema e registo da sua resolução foram aplicadas ssencialmente com a finalidade de analisar as estratégias de resolução dos problemas tilizadas pelos futuros professores, nas situações (N) e (S), com vista à detecção das principais dificuldades que os problemas suscitaram e dos eventuais padrões de resolução.

Os problemas utilizados nestas etapas, constantes dum manual de Matemática do 1º Ano de Escolaridade (Vale, Fonseca e Pimentel, 1993), foram seleccionados atendendo aos seguintes critérios: serem problemas de conteúdo (de acordo com a tipologia adoptada pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas); serem problemas de determinação de um dos termos de uma proporção segundo terminologia de Post, Behr e Lesh (1988); serem problemas físicos, por oposição a problemas de misturas que se afiguram mais complexos e menos bem sucedidos; pertencerem a duas categorias distintas de acordo com a classificação de Heller (1989); serem suficientemente motivadores; não terem sido previamente trabalhados nas aulas de Didáctica da Matemática.

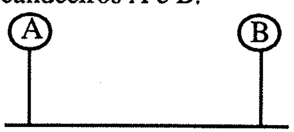
Foi nossa preocupação, por um lado, dentro de cada etapa, variar a categoria do problema e o grau de dificuldade (não obstante o 1º e o 3º serem problemas que envolvem quantidades contínuas e os restantes quantidades discretas) considerando um problema menos familiar e sem que o valor unitário fosse dado, para averiguar se as resoluções apresentadas eram independentes destes factores. Por outro lado, emparelhamos os problemas entre as etapas para detectar se a alteração introduzida na 2ª etapa produzia alguma mudança no desempenho dos alunos, independentemente dos parâmetros anteriores. O Quadro 3 pretende traduzir tal situação.

Das actividades das 1ª e 2ª tarefas fazia parte o preenchimento de um questionário que se aplicou com o intuito de averiguar principalmente: a) quais os conteúdos que os futuros professores consideravam estar envolvidos no problema que resolveram; b) para que ano de escolaridade consideravam tal problema adequado e porquê; c) que tipo de abordagem didáctica do problema sugeriam; d) se havia consonância entre as estratégias utilizadas na resolução do problema, o ano de escolaridade, os conteúdos mencionados e as abordagens didácticas; e) qual a relação entre as respostas dadas e o tipo, categoria e grau de dificuldade do problema; f) se a alteração no enunciado da tarefa da 1ª para a 2ª etapa influenciava e de que modo as respostas dadas.

Com base no saber que advém da nossa experiência como formadores, das leituras efectuadas e das discussões em torno de tais temáticas, prevíamos 1) que a alteração introduzida na 2ª etapa não iria reflectir-se significativamente nas resoluções dos problemas apresentadas pelas alunas e nas propostas de abordagem didáctica dos mesmos e 2) que os alunos perspectivassem estratégias de resolução desses problemas, estratégias essas centradas essencialmente nos processos algébricos de resolução, em detrimento da resolução dos problemas como 'metodologia de ensino'.

Quadro 3

Distribuição dos problemas pelas etapas de acordo com as suas características

1ª Etapa	Características	2ª Etapa
'Problema do comboio' Um comboio com um quilómetro de comprimento anda a uma velocidade de 20km/h. Se entrar num túnel com um quilómetro de comprimento à 1h, a que hora sairá do túnel a última carruagem do comboio?	•Problema de conteúdo • Problemas de determinação de um dos termos de uma proporção • Problemas de velocidade • Grau de dificuldade baixo - Com valor unitário - Familiares	**'Problema do Eco'** Três segundos depois de ter gritado ouço o eco da minha voz. A que distância estou da montanha que fez ecoar a minha voz? (A velocidade de propagação do som é de 340m/s).
'Problema dos Candeeiros' A figura representa dois candeeiros A e B.  Pretendemos colocar entre A e B um candeeiro C, de tal modo que AC : CB = 3: 5. Um outro candeeiro D vai ser colocado entre C e B, de tal modo que CD : DB = **n** : 1. Se AD : DB = 19 : 5 determina **n**.	•Problema de conteúdo • Problemas de determinação de um dos termos de uma proporção • Problema de distribuição • Grau de dificuldade mais elevado - Sem valor unitário - Menos familiar	**'Problema do Trabalho'** Temos 36 000$00 para pagar um serviço feito por 3 pessoas, mas duas delas trabalharam 3 dias enquanto a terceira trabalhou 4 dias. Quanto deve receber cada uma proporcionalmente aos dias de trabalho?

Neste contexto introduzimos uma última tarefa com o intuito de que os futuros professores, perante várias propostas de resolução algébrica de um problema, nelas reflectissem, à luz da pertinência da sua abordagem em situação de sala de aula.

O problema apresentado, "Se uma vara de 4m produz uma sombra de 6m, quanto medirá a sombra de uma vara de 10m?", extraído de um artigo de Linda Fisher (1988), embora não traduzindo, provavelmente, uma situação muito familiar para os alunos com quem trabalhamos, tem um nível de dificuldade considerado baixo, não obstante ser um problema em que o valor unitário não é dado e envolver quantidades contínuas.

As propostas de resolução apresentadas estão esquematizadas no Quadro 4

Quadro 4

Estratégias de resolução apresentadas para o 'problema da vara'

1ª estratégia	2ª estratégia	3ª estratégia	4ª estratégia	5ª estratégia
4 + (1/2)4 = 6 10 + (1/2)10 = **15**	4 – 10 6 – x 4x = 60 x = **15**	6 = 4 + 2 **12** = 10 + 2	10 = 2x4+(1/2)4 2x6+(1/2)6 = **15**	y = kx k = 6/4 = 3/2 3/2 (10) = **15**

A selecção das estratégias de resolução foi feita com base nos critérios:

- uma estratégia *aditiva incorrecta* que opera com as quantidades *entre* os espaços-medida (3ª estratégia)
- duas estratégias *de reconhecimento e replicação de uma regularidade*
  - * uma operando com as quantidades *entre* os espaços-medida (1ª estratégia).
  - * uma operando com as quantidades *dos* respectivos espaços-medida (4ª estratégia).
- duas estratégias *multiplicativas* ambas operando com as quantidades entre os espaços medida
  - * uma que resulta da aplicação directa do conceito de proporção (2ª estratégia).
  - * uma que recorre à constante de proporcionalidade (5ª estratégia).

Depois de analisarem as várias propostas de resolução do 'Problema da Vara', os alunos tiveram que responder a um questionário elaborado com as finalidades a) b) e d) do questionário aplicado nas etapas anteriores e ainda com a intenção de analisar: as estratégias de resolução do problema propostos que os futuros professores consideravam mais adequados, menos adequados e que os que nunca utilizariam e porquê. Finalmente teriam que emitir uma opinião justificada da importância de se contemplar mais do que uma estratégia de resolução de problemas no processo de ensino/aprendizagem.

Uma primeira análise dos dados obtidos à custa da produção escrita dos alunos na resolução dos problemas, foi sistematizada através de uma grelha elaborada para o efeito, constituída por 3 categorias – resolve errado; resolve parcialmente e resolve totalmente.

A primeira dessas categorias incluia, como principais indicadores de desempenho, apresentar escassa ou nenhuma informação ou estabelecer relações erradas entre os dados do problema. Um aluno resolvia parcialmente o problema se não demonstrava compreender ou parecia interpretar mal parte da informação mas operava correctamente com os restantes dados, ou se, embora recorrendo a uma estratégia correcta, não conseguia completar a resolução do problema. Considerava-se que o aluno resolvia completamente o problema quando finalizava a tarefa com sucesso, podendo eventualmente cometer um erro de cálculo não relevante para o problema.

Com base nos dados recolhidos realizou-se uma análise vertical e uma análise horizontal, globalizantes e com intenções interpretativas. Com a análise vertical pretendia-se: retratar a história de cada um dos problemas; comparar os desempenhos na resolução dos problemas dentro de cada etapa, entre as etapas e entre os problemas 'emparelhados'; o sentir dos alunos relativamente a cada uma das questões colocadas e sua inter-relação. A análise horizontal permitiu-nos traçar o perfil dos alunos com respeito aos parâmetros anteriores.

No caso dos questionários, a análise foi orientada pelas categorias pré-definidas. Procuramos ainda comparar as respostas dadas aos questionários com as estratégias de resolução utilizadas.

Apresentação e Discussão dos Principais Resultados

Neste documento apresentaremos e discutiremos os resultados relativos aos problemas 'do comboio' e 'do eco' dado que os relativos aos problemas 'dos candeeiros' e 'do eco' já foram divulgados (Cabrita, 1994).

'Problema do Comboio'

Nenhuma aluna resolveu errado o 'problema do comboio', tendo quatro elementos resolvido parcialmente, por não terem, provavelmente, compreendido parte da informação. Consideraram, certamente, apenas a hora a que o comboio começa a sair do túnel. Aparentemente, a principal dificuldade deste problema residiu, portanto, não a nível de conteúdos matemáticos, mas a nível da compreensão do problema.

À excepção de uma aluna que, embora tenha tido pleno sucesso na resolução do problema, apresentou os resultados de forma descritiva, pelo que nada se pode concluir acerca da estratégia utilizada, todas as alunas recorreram às proporções, empregando um processo multiplicativo – o do 'produto-cruzado'.

Dessas nove alunas, somente duas consideraram de imediato como um dos termos, 2km, os equivalentes às medidas de comprimento do túnel e do comboio, tendo uma delas tido necessidade de utilizar o algoritmo do produto-cruzado novamente, para reduzir as horas a minutos (Fig. 1).

Contrariamente às outras colegas, estas alunas, curiosamente, consideraram como 1° espaço-medida o tempo, talvez devido ao próprio conceito de velocidade – 20km/h significa que numa hora percorre 20km.

Das sete alunas que trabalharam de início com o comprimento, provavelmente, do túnel, uma delas, estranhamente, reduziu as quantidades do primeiro espaço-medida comprimento – expressas em km, a metros. Embora tenha esboçado um esquema da situação, tal redução parece revelar uma necessidade de operar com os dados do enunciado independentemente do seu significado.

v = 20 km/h
c = 1 km
comprimento do túnel : 1 km

1 h — 20 km
x — 2 km
x = (2 × 1)/20
x = 1/10 = 0,1 h

1 h — 60 m
0,1 h — x
x = 60 × 0,1
x = 6 m

∴ A última carruagem do comboio sai do túnel às 1h 6m.

Comprimento do comboio - 1 Km
velocidade = 20 Km/h
Comprimento do tunel - 1 km
Como pretendemos saber a hora a que sairá do tunel a ultima carruagem, temos que pensar que a ultima carruagem percorre 1 km do tunel mais 1 km que ocuparam as carruagens que estavam à sua frente.
Portanto o percurso percorrido pela ultima carruagem é de 2 km

60 min —— 20 Km
x —— 2 km
x = (2×60)/20 = 6 min

Se sai à 1h e 6 m do tunel

Figura 1. Resoluções do 'problema do comboio' apresentadas por duas alunas, considerando um dos termos da proporção (2km).

correcta, não conseguia completar a resolução do problema. Considerava-se que um aluno resolvia completamente o problema quando finalizava a tarefa com sucesso, podendo eventualmente cometer um erro de cálculo não relevante para o problema.

Com base nos dados recolhidos realizou-se uma análise vertical e uma análise horizontal, globalizantes e com intenções interpretativas. Com a análise vertical pretendia-se: retratar a história de cada um dos problemas; comparar os desempenhos na resolução dos problemas dentro de cada etapa, entre as etapas e entre os problemas 'emparelhados'; o sentir dos alunos relativamente a cada uma das questões colocadas e a sua inter-relação. A análise horizontal permitiu-nos traçar o perfil dos alunos com respeito aos parâmetros anteriores.

No caso dos questionários, a análise foi orientada pelas categorias pré-definidas. Procuramos ainda comparar as respostas dadas aos questionários com as estratégias de resolução utilizadas.

Apresentação e Discussão dos Principais Resultados

Neste documento apresentaremos e discutiremos os resultados relativos aos problemas 'do comboio' e 'do eco' dado que os relativos aos problemas 'dos candeeiros' e 'do eco' já foram divulgados (Cabrita, 1994).

'Problema do Comboio'

Nenhuma aluna resolveu errado o 'problema do comboio', tendo quatro elementos resolvido parcialmente, por não terem, provavelmente, compreendido parte da informação. Consideraram, certamente, apenas a hora a que o comboio começa a sair do túnel. Aparentemente, a principal dificuldade deste problema residiu, portanto, não a nível de conteúdos matemáticos, mas a nível da compreensão do problema.

À excepção de uma aluna que, embora tenha tido pleno sucesso na resolução do problema, apresentou os resultados de forma descritiva, pelo que nada se pode concluir acerca da estratégia utilizada, todas as alunas recorreram às proporções, empregando um processo multiplicativo – o do 'produto-cruzado'.

Dessas nove alunas, somente duas consideraram de imediato como um dos termos, 2km, os equivalentes às medidas de comprimento do túnel e do comboio, tendo uma delas tido necessidade de utilizar o algoritmo do produto-cruzado novamente, para reduzir as horas a minutos (Fig. 1).

Contrariamente às outras colegas, estas alunas, curiosamente, consideraram como 1° espaço-medida o tempo, talvez devido ao próprio conceito de velocidade – 20km/h significa que numa hora percorre 20km.

Das sete alunas que trabalharam de início com o comprimento, provavelmente do túnel, uma delas, estranhamente, reduziu as quantidades do primeiro espaço-medida – comprimento – expressas em km, a metros. Embora tenha esboçado um esquema da situação, tal redução parece revelar uma necessidade de operar com os dados do enunciado independentemente do seu significado.

v = 20 km/h
c = 1 km
comprimento do túnel . 1 km

1 h — 20 km
x — 2 km
$x = \frac{2 \times 1}{20}$
$x = \frac{1}{10} = 0{,}1$ h

1 h — 60 m
0,1 h — x
x = 60 × 0,1
x = 6 m

∴ A última carruagem do comboio sai do túnel às 1 h 6 m..

Comprimento do comboio - 1 Km
velocidade = 20 Km/h
Comprimento do tunel - 1 km
Como pretendemos saber a hora a que sairá do tunel a ultima carruagem, temos que pensar que a ultima carruagem percorre 1 km do tunel mais 1 km que ocuparam as carruagens que estavam à sua frente.
Portanto o percurso percorrido pela ultima carruagem é de 2 km

60 min —— 20 Km
x —— 2 km
$x = \frac{2 \times 60}{20} = 6$ min

Se sai à 1 h e 6 m do tunel

Figura 1. Resoluções do 'problema do comboio' apresentadas por duas alunas, considerando um dos termos da proporção (2km).

Cinco dos seis elementos que operaram com as medidas de comprimento expressas em km, reduziram as horas a minutos, o que parece revelar uma antevisão do resultado.

O outro 6º elemento não parece ter tido essa percepção, pelo que teve necessidade de reduzir posteriormente o tempo encontrado (0.05h), a minutos (também pelo algoritmo do produto-cruzado).

Neste último grupo, as duas alunas que chegaram ao resultado correcto, esboçaram também um esquema da situação. Curioso notar que nem todas as alunas que resolveram o problema fizeram um esquema, mas as três que o fizeram resolveram-no completamente.

Algumas conclusões se poderão ainda tirar dos dados recolhidos: todas as alunas deram a resposta em termos do que lhes era pedido não se limitando a apresentar os cálculos obtidos; todas as alunas demonstraram um certo cuidado na apresentação da resolução do problema; nenhuma aluna apresentou mais do que uma proposta de resolução do problema.

Reportando-nos agora ao questionário, verificamos que a maioria das alunas (7) considerou a 'proporcionalidade' o conteúdo envolvido no problema, embora dois destes elementos tenham ainda referido a 'regra de três simples', outro destes indivíduos, a noção de km/h e outro ainda, a relação velocidade/tempo/distância. Duas alunas indicaram como contéudo específico do problema, as equações do 1º grau e uma outra, a regra de três simples e a redução de horas a minutos e minutos a segundos.

Todos as participantes nesta investigação foram unânimes em considerar o 'problema do comboio' adequado para o 7º ano de escolaridade, embora uma delas tivesse posto a hipótese de ser adequado para o 8º ano. Como justificação aparecem essencialmente os conteúdos envolvidos e o grau de dificuldade do problema.

Relativamente às estratégias que utilizariam na abordagem deste problema com esse tipo de alunos, três elementos mencionaram expressamente que aplicariam a mesma que usaram, tendo uma delas incluído a regra de três simples e as restantes referido que também recorreriam a um esquema. Aliás, o recurso a um esquema, desenho, diagrama ou tabela foi uma estratégia mencionada por todas as alunas, tendo uma delas acrescentado a máquina de calcular e outra a constante de proporcionalidade.

Com base nos dados recolhidos algumas questões se poderão colocar:

- Embora inscrevendo, a maioria das alunas, o problema no conteúdo 'proporcionalidade', consideraram-no adequado para o 7º ano de escolaridade. Basearam-se nos curricula que cumpriram? Desconhecem o facto de que esta unidade é introduzida no 6º ano de escolaridade, podendo inclusivamente começar-se a promover o desenvolvimento do raciocínio proporcional bem mais cedo, principalmente por relacionação com outros tópicos? Consideram o problema difícil para essa faixa?
- O facto de terem mencionado como estratégia a utilizar com as crianças, na abordagem deste problema, o recurso a um esquema ou desenho, será um sintoma de que valorizarão um ensino significativo em detrimento de um ensino mecanizado por algoritmos pelo qual parecem estar fortemente influenciadas?

'Problema do **Eco**'

Nenhum elemento resolveu errado o 'problema do eco', no entanto, só duas alunas o resolveram totalmente. Uma considerou metade do valor inicialmente dado (3 segundos) tendo o outro elemento apresentado a resolução de forma descritiva, só se podendo afirmar que também efectuou a divisão mencionada. As outras 8 alunas manifestaram dificuldade na compreensão do enunciado, nomeadamente no que respeita o conceito de eco.

Uma aluna resolveu o problema utilizando directamente o conceito de velocidade v=d/t, tomando para t o valor 3 segundos. A maioria, no entanto, recorreu à estratégia multiplicativa menos significativa – a que recorre ao algoritmo do produto-cruzado tendo considerado como um dos termos da proporção os três segundos referidos no enunciado do problema. Só uma aluna esquematizou a situação.

Não obstante cinco alunas, aparentemente, tenham tentado uma segunda estratégia de resolução do 'problema do eco', somente três elementos utilizaram realmente uma estratégia diferente. De facto, duas alunas limitaram-se a apresentar os dados com um 'formato' distinto, utilizando novamente, na determinação do valor em falta, o algoritmo do produto-cruzado. Na Figura 2 reproduz-se um desses trabalhos.

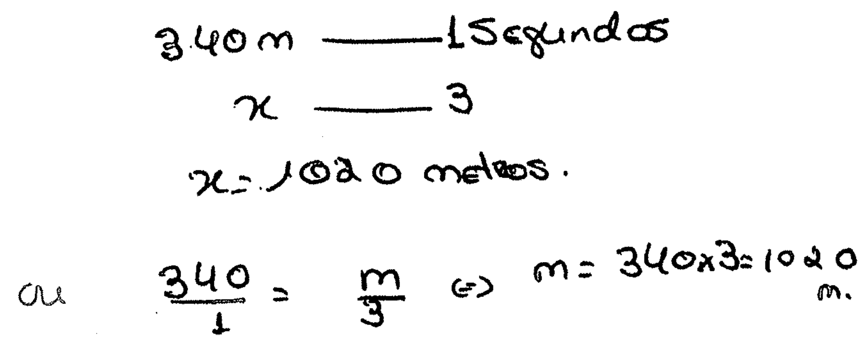


Figura 2. Estratégia de resolução do 'problema do eco', apresentado por uma das alunas.

Uma daquelas três alunas, a única que resolveu totalmente o problema, utilizou como 2ª estratégia de resolução uma multiplicação, considerando como um dos factores, metade do tempo constante do enunciado.

As restantes utilizaram como 2ª estratégia, um processo aditivo, tendo-a (uma delas) associado a um esquema, que a outra apresentou como 3ª proposta de resolução. A Figura 3 exemplifica o que foi dito.

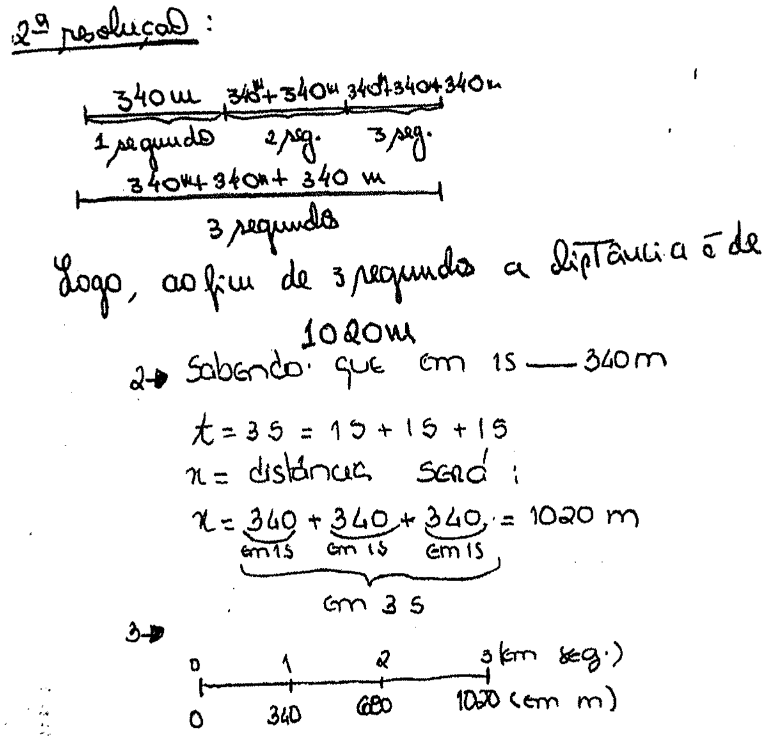


Figura 3. 2ª e 3ª estratégias de resolução do 'problema do eco' apresentadas por duas participantes neste estudo.

A preocupação pela apresentação cuidada do trabalho continua a ser uma constante. Embora a maioria tenha dado a resposta ao problema em termos do que lhes era pedido, 3 alunas limitaram-se a apresentar o resultado a que tinham chegado. Só metade das alunas mostraram tentar utilizar mais do que uma estratégia de resolução do problema.

Atendendo agora ao questionário, verificamos que seis alunas inscreveram o 'problema do eco', no conteúdo 'proporcionalidade', 4 das quais consideraram o problema adequado para o 6° ano de escolaridade (pelos conteúdos envolvidos, 1 aluna e pelo grau de dificuldade 1 aluna), uma para o 7° e outra para o 8°. Das restantes, uma não respondeu e as outras consideraram tratar-se de um problema: de regra de três simples e interpretação de velocidade de propagação, adequado para o 7° ano de escolaridade; de distâncias envolvendo a noção de m/s adequado para o mesmo nível, por causa do conteúdo envolvido e finalmente de resolução de equações do 1° grau, adequado para o 8° ano de escolaridade, por envolver conhecimentos de Física. A que se deverá tal disparidade quer a nível de conteúdos quer a nível de ano de escolaridade?

A maioria dos elementos (8) mencionou que utilizaria a mesma estratégia, com aqueles alunos na abordagem do problema, à qual tinham recorrido, considerando as restantes que deveriam efectuar um quadro e/ou um desenho, tendo uma delas acrescentado a 'dedução lógica'.

Análise Comparativa dos Vários Problemas

Só uma aluna (a Maria) resolveu totalmente todos os problemas e uma aluna (a Rita), não resolveu totalmente nenhum dos problemas tendo errado dois deles e resolvido parcialmente outros tantos. Se no caso da Maria tal facto não é surpreendente, relativamente à Rita é intrigante, se atendermos a que estas alunas, como a maioria das suas colegas, estão habituadas a resolver problemas; gostam desta actividade e consideram-se boas resolvedoras de problemas, como se pôde depreender pela análise do inquérito que preencheram (Cabrita, 1995). O panorama torna-se ainda mais preocupante se atendermos a que só três alunas conseguiram resolver integralmente a maioria dos problemas.

O 'problema do trabalho', foi resolvido completamente por um número mais elevado de alunas (8) (cf. Cabrita, 1994), seguido pelo 'do comboio' (6), tendo sido os restantes resolvidos correctamente por uma minoria de elementos (2 alunas). No entanto, enquanto seis alunas erraram o 'problema dos candeeiros' (cf. Cabrita, 1994), ninguém errou o 'do eco'.

Reportando-nos aos problemas que compunham a 1ª etapa, as nossas expectativas relativamente ao grau de dificuldade, parecem ter sido corroboradas. De facto o 'problema dos candeeiros' que em nosso entender seria mais difícil do que o primeiro, só foi resolvido integralmente por um terço das alunas que resolveram correctamente o 'do comboio'. Na 2ª etapa, no entanto, tal não aconteceu. Realmente esperávamos menos sucesso no 'problema do trabalho' do que no 'do eco', o que não se verificou. Curioso também notar que os desempenhos nos problemas 'emparelhados' foram diferentes. No 1° caso, embora ninguém tenha errado quer o 'problema do comboio' quer o 'problema do eco', aquele foi melhor sucedido. No 2° caso, o desempenho no 'problema do trabalho' foi muito superior ao desempenho no 'problema dos candeeiros'. Por outro lado, verificamos que as alunas tiveram mais êxito nos problemas de 'velocidade' do que nos problemas de 'distribuição'.

Poderemos ainda verificar que os 1° e 3° problemas (de velocidade) foram resolvidos por estratégias muito idênticas. Tal constatação prender-se-á com o facto de os problemas suscitarem uma utilização directa de um algoritmo, neste caso o produto-cruzado, até porque o valor unitário era dado?

Confrontando os problemas 'dos candeeiros' e 'do trabalho' (de distribuição), não encontramos afinidades nas estratégias de resolução. Enquanto o 1° foi resolvido recorrendo a cálculo vectorial, para resolverem o segundo utilizaram essencialmente a divisão para determinação do valor unitário, seguida da multiplicação para cálculo do valor a pagar a cada um dos operários (cf. Cabrita, 1994).

Entre os problemas que compunham cada uma das etapas, também não se registaram, portanto, afinidades a nível de estratégias de resolução.

Perante tais resultados poderemos provavelmente inferir que quando os alunos são confrontados com problemas que induzem a utilização directa de um algoritmo, recorrem ao produto-cruzado. Caso contrário não se poderá falar de um padrão de resolução, mesmo quando os problemas pertence a uma mesma categoria.

A Maria, a única aluna que resolveu correctamente todos os problemas, apresentou os problemas 'do comboio' e 'do eco' de forma descritiva, tendo utilizado as mesmas estratégias que as colegas nos restantes problemas. A Rita, não resolveu o 'problema dos candeeiros' e tentou resolver os outros problemas pelas estratégias mencionados. As três alunas que apresentaram o mesmo padrão a nível de resultados, utilizaram as mesmas estratégias referidas.

Os problemas da 1ª etapa, em que não era pedido expressamente que apresentassem mais do que uma proposta de resolução, foram resolvidos por um único processo.

Na 2ª etapa três alunas tentaram resolver ambos os problemas por estratégias variadas, tendo outras feito essa tentativa relativamente ao 'problema do eco' e outra aluna, relativamente ao 'problema do trabalho'. Portanto, mesmo quando é pedido aos alunos que resolvam determinado problema utilizando mais do que uma estratégia (situação S) a adesão não é muito grande. Na situação (N) não se verificou qualquer tentativa de resolução multivariada. O que poderá justificar tais atitudes? Não terem sido habituados a tal? Não saberem como o fazer? Desinteresse na actividade, por cansaço ou saturação? Ou por não a considerarem importante?

Não se verificaram alterações significativas nas propostas de abordagem didáctica da situação (N) para a situação (S). As alunas continuam a referir que utilizariam a mesma estratégia associada habitualmente a um esquema, tabela, quadro ou desenho. Mesmo as alunas que tentaram utilizar mais do que uma forma de resolução dos problemas disseram que utilizariam a mesma estratégia (no singular) que usaram, complementada por algum tipo de concretização, à excepção da Maria que, no 'problema do trabalho', refere o plural dos termos.

A proporcionalidade é o tópico mais vezes referido como sendo o conteúdo envolvido nos problemas, apesar de nem sempre recorrerem às suas heurísticas específicas. Quer entre os problemas que constituem a 1ª etapa quer entre os problemas que compõem a 2ª, quer mesmo entre os problemas 'emparelhados' existe uma quase perfeita simetria a nível de conteúdos apontados como estando envolvidos nos problemas. Curioso notar que cinco alunas referiram a proporcionalidade em todos os problemas e que duas outras não referiram a proporcionalidade como conteúdo envolvido em qualquer problema. Estas alunas, no entanto, mencionaram os mesmos conteúdos para os problemas de velocidade, respectivamente, regra de três simples e equações do 1° grau.

Relativamente aos anos de escolaridade para os quais consideram os problemas adequados verificamos que não existem muitas afinidades quer dentro das mesmas etapas quer entre os emparelhamentos estabelecidos, facto que se torna curioso se confrontado com os dados discutidos anteriormente e com as estratégias utilizadas na resolução dos problemas. Realmente embora tenham resolvido os problemas 'do comboio' e 'do eco' de forma idêntica e, tenham considerado aproximadamente os mesmos conteúdos neles envolvidos, notamos que, relativamente à questão em causa, só houve um certo consenso nas respostas relativas ao 1° problema.

As alunas que resolveram parcialmente o 'problema do eco', consideraram-no adequado para o 8° ano, enquanto resolveram totalmente o 'do comboio' que opinaram adequado para o 7° ano de escolaridade. Tal lógica não parece ter estado nas mentes das alunas que referiram que o 'problema do eco' era adequado para o 6° ano de escolaridade e que tiveram resultados idênticos nos problemas de 'velocidade' (resolveram-nos parcialmente) à excepção de uma aluna que curiosamente resolveu integralmente o 'problema do comboio' (que considerou adequado para o 7° ano). As alunas que responderam que os problemas de 'velocidade' eram adequados para o 7° ano de escolaridade tiveram desempenho idênticos nestes problemas.

Os problemas 'dos candeeiros' e 'do trabalho' foram alvo das respostas mais díspares relativamente ao ano de escolaridade, o que, se por um lado não é surpreendente se atendermos às diferenças nas estratégias de resolução que utilizaram, por outro torna-se curioso se as confrontarmos com os conteúdos que julgam estar envolvidos nos problemas. Tal reflexão é extensiva aos problemas dentro de cada etapa.

Terceira Etapa

À excepção de uma aluna, todas as que responderam à questão relativa ao conteúdo que o 'problema da vara' envolvia, referiram, a propósito, a proporcionalidade, tendo duas alunas acrescentado, respectivamente, resolução de equações, princípios de equivalência e, curiosamente, a resolução de equações do 2° grau. A questão relativa ao ano de escolaridade para o qual o problema seria adequado já não mereceu tanto consenso – as respostas variavam do 5° até ao 7°/9° ano de escolaridade, argumentando as alunas com os conteúdos envolvidos no problema. Curioso notar que as respostas a esta questão aproximam-se muito das dadas a propósito, no 'problema do trabalho'.

As alunas que responderam, consideraram unanimemente que a estratégia de resolução mais adequada para o 'problema da vara', era a que recorria ao algoritmo do produto-cruzado, tendo a Maria também escolhido a 1ª e a 4ª propostas por "(estarem) dentro dos conhecimentos que devem ter os alunos deste ano de escolaridade". Algumas alunas justificaram a sua opção pelo facto de tal estratégia ser mais acessível, mais simples, mais directa e outras apresentaram como argumentos ser uma aplicação directa do conceito de proporção ou proporcionalidade. Repare-se que esta foi a estratégia utilizada na resolução dos problemas 'do comboio' e 'do eco'. Mais uma vez as participantes nesta investigação demonstraram preferência por estratégias de resolução que suscitam a utilização 'mecânica' de um algoritmo.

Como estratégias menos adequadas de resolução do problema surgem, na opinião das alunas, as 4ª e 5ª propostas, por serem respectivamente, muito confusas, complexas, complicadas e envolverem muitas variáveis o que torna o processo difícil, abstracto, incompreensível.

Quatro alunas referiram que nunca utilizariam a 5ª estratégia de resolução do 'problema da vara' pelos mesmos motivos expostos anteriormente e três elementos não utilizavam a 3ª proposta por não ser correcta. No entanto dois destes elementos consideraram que poderia ser usada "para mostrar aos alunos que nem todos as propostas estão correctas". Curiosamente uma aluna referiu que nunca utilizaria a 2ª estratégia "porque é aquela que está errada" e outra colega rejeitava a 4ª por considerar confusa.

Relativamente ao 2º grupo deste questionário, as 9 alunas que responderam, consideraram importante contemplar mais do que uma estratégia de resolução de problemas no processo de ensino/aprendizagem, principalmente porque "permite ao aluno ter consciência de que há mais do que um modo de resolução e portanto exercitar o raciocínio". Também foram referidos como argumentos o facto de tal estratégia promover um maior entusiasmo, uma maior participação e interesse, uma melhor compreensão dos assuntos, uma abertura à criatividade, diminuindo o medo de arriscar.

O comentário que se nos oferece fazer é de que estas opiniões não são muito consentâneas com as propostas de abordagem didáctica que foram sugerindo ao longo das tarefas anteriores. Parece haver uma certa contradição entre as suas concepções relativamente a esta questão, e as práticas que dizem que implementariam.

Principais Conclusões e Recomendações

A investigação exploratória levada a cabo, imbuída de certas limitações, algumas das quais já foram sendo referidas ao longo do texto e das quais detacamos: tempo de que dispunhamos para a levar a cabo; altura do ano em que foram aplicadas as tarefas; extensão do trabalho condensado numa única sessão; número reduzido de participantes; estarem envolvidos em simultâneo noutras investigações; escassez de

instrumentos de investigação (principalmente a falta de entrevistas); forma como foi colocada a questão relativa à(s) estratégia(s) que utilizariam na abordagem dos problemas e falta de uma questão no último questionário relativa à(s) estratégia(s) de resolução que utilizariam com os alunos, dado que poderiam não ser precisamente coincidentes com as que consideravam mais adequadas, permitiu-nos, no entanto, tirar algumas conclusões.

Estas alunas, futuras professoras, manifestaram algumas dificuldades a nível da compreensão dos problemas, pelo que sugerimos que a nível da formação inicial e/ou contínua seja dado lugar de destaque ao módulo imprescindível de 'resolução de problemas' atendendo-se particularmente à fase 'compreensão do problema', promovendo actividades que a facilitem. Desta forma talvez se contribua para uma melhor preparação dos professores no sentido de eles próprios virem a desenvolver actividades que pressuponham a resolução de problemas como metodologia de ensino, que estamos cientes ser uma das formas mais ricas e eficazes de comunicar matemática. Talvez num futuro não muito próximo os alunos dos Ensinos Básico e Secundário não hesitem em afirmar que 'resolviam frequentemente' problemas nas aulas de Matemática (o que não se passou com estas alunas, como se pode ver pela análise dos inquéritos) como 'metodologia de ensino' em detrimento de 'como prática depois da exploração de conteúdos' (opção mais assinalada pelos participantes neste estudo), o que estamos em crer contribua para uma visão mais positiva da própria disciplina e uma aprendizagem mais efectiva da mesma.

Detectamos também preferência na resolução e ensino de problemas em que o valor unitário é dado, pela estratégia que recorre ao algoritmo do produto-cruzado. Deveremos pois alertar para o facto de que tal algoritmo é desprovido de significado, devendo ser introduzido somente depois de adquirido convenientemente o conceito de proporcionalidade.

Através essencialmente da análise da resolução do 'problema dos candeeiros detectamos muitas dificuldades na aquisição/aplicação do conceito em estudo, pelo que sugerimos que a nível do Ensino Básico venha a ser dada mais ênfase a esta unidade didáctica e venha a ser abordada de forma mais significativa, de acordo com as sugestões referidas e, para quem já não possa usufruir daquela formação sejam dadas condições para que repensem a problemática em causa.

Foi nítida a preferência, na resolução e ensino de problemas em que o valor unitário não é dado, pela determinação do mesmo, através de estratégias menos formais do que as utilizados na abordagem do conteúdo 'proporcionalidade'. Neste contexto e aproveitando tal apetência, será de enfatizar a pertinência em contemplar tais estratégias no ensino/aprendizagem:

*pela facilidade com que se podem relacionar com outros tópicos,

*porque podem contribuir para uma melhor aquisição/assimilação do conceito,

• não devendo, no entanto, contribuir para camuflar outras estratégias mais elaboradas de raciocínio proporcional (atente-se aos comentários suscitados pela 5ª proposta de resolução do 'problema da vara' apresentada).

Embora se tenham mostrado sensíveis à necessidade de abordar os problemas utilizando mais do que uma estratégia, na situação (N) limitaram-se a propor as mesmas estratégias utilizadas, essencialmente algébricas, ou usar um esquema não se tendo, na situação (S), registado diferenças significativas. Sugerimos a propósito que os vários problemas explorados em situações de ensino/aprendizagem sejam resolvidos das formas mais variadas, recorrendo a processos geométricos, algébricos, analíticos, incluindo os menos formais e ortodoxos, atitude que, como já referimos, poderá contribuir para uma aprendizagem mais significativa e efectiva dos conteúdos envolvidos.

Notória foi também a ausência à referência da ligação deste conteúdo - proporcionalidade – com outros tópicos, nomeadamente nas propostas de abordagem didáctica referidas. Uma das críticas mais acérrimas que se têm feito aos (antigos) programas curriculares é precisamente a falta de ligação horizontal e vertical entre os conteúdos programáticos. Embora já muito se tenha tentado fazer a esse respeito, nunca será demais enfatizar a necessidade e importância de estabelecer tais relações.

Finalmente, será de referir que as alunas demonstraram muita insegurança relativamente aos anos de escolaridade para os quais os problemas seriam adequados. A este respeito sugerimos que, no âmbito da formação inicial, sejam proporcionadas condições aos futuros professores para realizarem uma análise curricular aprofundada, no sentido de colmatarem tal lacuna.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Cabrita, I. (1994). Futuros professores perante problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade: Processo(s) de resolução e propostas de abordagem didáctica. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes, J. Fernandes e L. S. Almeida (Orgs.), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM.

Cabrita, I. (1995). Futuros professores e resolução de problemas: Considerações a propósito de um inquérito. Em A. Pinheiro, A. P. Canavarro, L. C. Leal e P. Abrantes (Orgs.), *Actas do ProfMat 95.* Lisboa: APM.

Carpenter, T. (1975). Results and implications of the NAEP mathematics assessment: secondary school. *Mathematics Teacher, 68*, 453-472.

Carraher, T., Carraher, D. e Schliemann, A. (1991). *Na Vida Dez, na Escola Zero.* São Paulo: Cortez.

Chin, Y. (1992). Meaningful understanding of direct proportionality and consistency across different task among preservice science teachers. *International Journal of Science Education, 14*(3), 237-247.

Cramer, K., Post, T. e Behr, M. (1989). Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher, 82*(6), 445-453.

Cramer, K., Post, T. e Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. Em D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics.* New York: MacMillan.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching.* New York: Macmillan.

Fisher, L. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. Em J. Hiebert e M. Behr (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Reston, VA: NCTM.

Heller, P., Ahlgren, A. e Post, T. (1989). Proportional reasoning: the effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal fof Research in Science Teaching, 26*(3), 205-220.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. Em T. Post (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K-8.* Boston: Allyn & Bacon.

Karplus, R., Karplus, E., Formisano, M. e Paulsen, A. (1977). A survey of proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of Research in Science Teaching, 14*, 411-417.

Karplus, R., Adi, H. e Lawson, A. E. (1981). Intellectual development beyond elementary school VIII: Proportional, probalistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics, 18*, 673-683.

Karplus, R., Pulos, S. e Stage E. (1983). Proportional reasoning. Em R. Lesh e M. Landau (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal of Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal of Research in Mathematics Education, 24*(5), 460-466.

Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Em J. Hiebert e M. Behr (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: NCTM.

Martins, M. F. (1989). *O Desenvolvimento da Noção de Proporção e a Aprendizagem das Fracções* (Tese de mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Matos, J. M. (1995). Os métodos próprios dos alunos: Início de uma investigação. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes, J. Fernandes e L. S. Almeida (Orgs.), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niaz, M. (1989). The role of cognitive style and its influence on proportional reasoning. *Journal of Research in Science Teaching*, *26*, 221-235.

Noelting, G. (1980 a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1 - Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 217-253.

Noelting, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2- Problem structure at sucessive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 331-363.

Post, T., Behr, M. e Lesh, R. (1988). Proportionality and development of prealgebra understanding. Em A. Coxford (Ed.), *Algebraic Concepts in the Curriculum K-12, Yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Saunders, W. e Jesunathadas, J. (1988). The effect of task content upon proportional reasoning. *Journal of Research in Science Teaching*, *25*(1), 59-67.

Tourniaire, F. e Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educacional Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

Vale, I., Fonseca L. e Pimentel, T. (1993). *Tales 7: Exercícios e Problemas*. Porto: Areal Editores.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh e M. Landau (Ed.), *Acquisition of Mathematics concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Em J. Hiebert e M. Behr (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: NCTM.