Biblioteca Nacional - Catalogação na publicação

Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular/org. Domingos Fernandes, António Borralho, Gertrudes Amaro.- (Temas de investigação; 2)

ISBN 972- 9380- 25- 2

I - Fernandes, Domingos
II - Borralho, António
III - Amaro, Gertrudes

CDU 371.1/.2
159.95

Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular

1ª edição (Fevereiro, 1994)
ISBN 972- 9380- 25- 2

Editor: Instituto de Inovação Educacional

Tiragem: 1000 exemplares

Capa: concepção gráfica de Joana Wiborg
Execução gráfica: Minigráfica - Rua Alegria nº 30 - 1200 Lisboa

Depósito legal nº 76 105/94

temas de investigação- 2

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PROCESSOS COGNITIVOS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR

Organização de

DOMINGOS FERNANDES
ANTÓNIO BORRALHO
GERTRUDES AMARO

INSTITUTO DE INOVAÇÃO EDUCACIONAL

LISBOA
1994

Variáveis de Tarefa na Resolução de Problemas*

Ana Leitão
Escola Superior de Educação de Bragança

Maria Helena Fernandes
Escola Superior de Educação de Bragança

Isabel Cabrita
Universidade de Aveiro

Muitos são os investigadores e educadores matemáticos que têm vindo a dedicar-se à investigação na resolução de problemas, procurando essencialmente desenvolver modelos de ensino eficazes, estudar os processos utilizados pelos alunos e avaliar o seu desempenho.

---

*Trabalho desenvolvido no âmbito do projecto de investigação "**Resolução de Problemas: Ensino, Avaliação e Formação de Professores**" financiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) sob o contrato nº PCSH/C/CED/413/92. Da equipa de investigação também fazem parte Domingos Fernandes, António Borralho e Gertrudes Amaro.

Este trabalho pretende estudar as variáveis de tarefa na resolução de problemas e apresenta-se organizado em três partes. Na primeira parte, apresenta-se uma revisão de literatura acerca das categorias de factores que intervêm na resolução de problemas fazendo referência à sua importância. Na segunda parte, apresenta-se as variáveis tarefa. Na terceira parte faz-se referência a algumas aplicações dessas variáveis no ensino.

Da revisão de literatura podemos concluir que a maioria dos estudos realizados se tem preocupado com os efeitos de métodos de ensino no rendimento dos alunos, com o ensino de estratégias de resolução e com a análise dos processos que os alunos utilizam quando resolvem problemas. No entanto, e salvo algumas excepções (Schoenfeld, 1983; Silver, Branca & Adams, 1980), a pesquisa em resolução de problemas matemáticos tem incidido sobre *skills* discretos e procedimentos envolvidos na resolução de problemas, esquecendo aspectos de controlo de recursos necessários para a resolução de problemas. Acresce, ainda, que pouca atenção tem sido prestada ao ambiente em que a resolução de problemas tem lugar.

Geralmente os estudos envolvem um número restrito de alunos, são realizados em períodos curtos de tempo e em horário extra-escolar, desprezando, assim, um conjunto de variáveis relativas ao contexto da sala de aula e ao professor. Segundo Domingos Fernandes (1992), é particularmente importante considerar as componentes, já geralmente aceites, que determinam o desempenho em resolução de problemas: as convicções, as atitudes, os conhecimentos e outras.

Factores Intervenientes na Resolução de Problemas

Charles e Lester (1992) apresentam como razões pelas quais a pesquisa na resolução de problemas tem proporcionado pouca informação acerca do ensino na resolução de problemas: a) a falta de atenção ao papel do professor na instrução — de uma maneira geral os relatórios de pesquisa descrevem os métodos usados, mas não fazem qualquer menção ao papel específico do professor (Silver, 1985); b) a falta de interesse pelo que se passa na sala de aula, não havendo qualquer descrição do comportamento do professor nem das interacções professor-aluno ou aluno-aluno; c) a atenção ao indivíduo em lugar do pequeno grupo ou da classe inteira; d) a ausência de uma teoria em que se fundamente a investigação (Balacheff, 1990; Kilpatrick, 1991). Neste sentido Lester (1985) considera ser necessária para uma pesquisa mais frutuosa a definição clara dos factores intervenientes na resolução de problemas.

Charles (1985) (citado por F. K. Lester & R. I. Charles, 1992) e Lester (1985) indicam três grandes categorias de factores: a) Considerações extra -instrução, relacionadas com tudo o que acontece na sala de aula: características do professor e dos alunos; conhecimentos, crenças, atitudes e emoções dos professores e dos alunos; características das tarefas e condições contextuais externas ao professor e ao aluno (ver Quadro 1); b) Processos na sala de aula, que incluem acções dos professores e dos alunos e interacções que acontecem durante a instrução, identificando quatro dimensões: atitudes, cognições, metacognições do professor e dos alunos e comportamentos do professor e dos alunos (ver Quadro 2); c) Resultados da instrução incluindo resultados do professor, dos alunos e outros (ver Quadro 3). Identificaram, ainda, uma quarta categoria, a planificação, relacionada com as duas primeiras. Em muitos estudos a planificação não tem sido considerada, porque os professores são geralmente os implementadores de um plano previamente determinado pelo investigador. No entanto, consideram da maior importância as decisões tomadas antes e durante o ensino acerca das características dos alunos, dos materiais, dos métodos, do tempo dedicado a cada tópico e da avaliação do desempenho.

Com base nos factores enunciados, Charles e Lester (1992) recomendam que se investigue que conhecimentos necessitam os professores para serem eficazes no ensino da resolução de problemas? Como deve o conhecimento ser estruturado para ser útil? Como é que as crenças dos professores sobre si mesmo, sobre os alunos, sobre a Matemática e sobre a resolução de problemas influenciam as decisões que tomam antes e durante a instrução? Como é que os professores planificam o ensino na resolução de problemas? Como interactuam com os seus alunos? Como avaliam os seus comportamentos?

Quadro 1
Considerações Extra-Instrução

	Professor	Aluno
Conhecimento, atitudes e crenças	• Conhecimento do conteúdo, currículo, pedagogia • Atitudes acerca de si mesmo, dos estudantes da matemática, do ensino • Crenças acerca de si mesmo, dos estudantes da matemática, da resolução de problemas, do ensino	• Conhecimento matemático, conhecimento do mundo. • Atitudes acerca de si mesmo, do professor, da matemática e de resolução de problemas. • Crenças acerca de si mesmo, do professor, da matemática e de resolução de problemas
Características intrínsecas	• Idade, sexo. • Experiências educacionais. • Experiência de ensino. • Qualidades (QI, personalidade, skills de ensino).	• Idade, sexo. • Historial de instrução. • Qualidades (QI, personalidade).
Componentes da tarefa	• Sintaxe (enunciado comprido...). • Conteúdo (área de geometria, ..., termos usados). • Contexto (forma). • Estrutura lógica e matemática • Processo (heurísticas inerentes).	
Condições contextuais	• Contexto sala de aula (tamanho da classe, livros de texto usados, enviesamento do currículo). • Contexto escola/comunidade (etnologia, suportes administrativos). • Forças político/económico/sociais gerais. • Conteúdo matemático a ser ensinado.	

Quadro 2
Processos na Sala de Aula

	Professor	Aluno
Atitudes, cognição e metacognição	Com respeito às fases de resolução de problemas (compreensão, planificação, desenvolvimento e revisão) Atitudes acerca de si mesmo, dos estudantes, da Matemática, da resolução de problemas e do ensino Crenças acerca de si mesmo, dos estudantes, da Matemática, da resolução de problemas e do ensino	Com respeito às fases de resolução de problemas (compreensão, planificação, desenvolvimento e revisão). Atitudes acerca de si mesmo, dos professores, da Matemática e da resolução de problemas. Crenças acerca de si mesmos, dos professores da Matemática e da resolução de problemas.
Comportamentos	Questionar, clarificar, guiar, orientar, modelar, avaliar, diagnostifica, generalizar.	Identificar informação necessária para resolver um provlema, seleccionar estratégias para resolver problemas, medir a extensão de progresso feita durante a tentativa de uma solução, implementar uma estratégia escolhida, determinar a aceitação dos resultados.

Quadro 3
Resultados da Instrução

	Resultados
Alunos	1. Efeitos imediatos e a longo termo no que diz respeito a: a. Skills na resolução de problemas b. Desempenho c. Habilidade geral para resolver problemas d. Atitudes e. Crenças f. Conhecimentos matemáticos. 2. Efeitos de transferência próximos e longínquos
Professor	1. Efeitos de natureza da planificação do professor. 2. Efeitos no comprotamento do professor durante a instrução futura. 3. Efeitos nas atitudes e crenças dos professores acerca de: a. Eficácia de instrução b. Validade dos métodos de instrução c. Facilidade do uso dos métodos de instrução.
Outros	1. Desempenho dos alunos nos testos de avaliação. 2. Influência da instrução em áreas não matemática sobre o comportamento do professor e dos alunos. 3. Mudanças com respeito à Matemática em geral, à educação.

Categorias de Variáveis de Investigação na Resolução de Problemas

Kilpatrick (1975) (citado por Kulm, 1979) apresenta uma classificação das variáveis de investigação em resolução de problemas. Especifica três categorias de variáveis independentes — variáveis de sujeito, variáveis de tarefa e variáveis de situação.

Estas três categorias derivam dos componentes necessários a um acontecimento de resolução de problemas — o resolvedor, a resolução e o conjunto de condições.

Como variáveis dependentes, que derivam das respostas dos sujeitos à tarefa, Kilpatrick (1991) considera as variáveis de produto, as variáveis de processo, as variáveis de avaliação e as variáveis concomitantes.

As variáveis de sujeito estão ligadas às características específicas do sujeito (resolvedor do problema) e classificam-se de acordo com a facilidade com que podem ser modificadas em:

- Variáveis organísmicas, não abertas à manipulação experimental (como sexo, idade, *status* sócio-económico, residência geográfica ...);
- Variáveis de personalidade ou traço (estilo cognitivo, atitudes, persistência, memória matemática, ...), que podem ser modificadas por processos como o ensino;
- Variáveis de historial educativo (escolas que frequentaram, tópicos de Matemática que estudaram, instrução sobre resolução de problemas...), mais ou menos modificáveis.

Para Kilpatrick (1991) quando se estudam efeitos de diferentes métodos educativos, muitas vezes não se encontram diferenças significativas entre esses métodos porque não foram consideradas estas variáveis no momento de selecção dos grupos experimentais.

As variáveis de tarefa incluem as variáveis de contexto, de estrutura e de formato.

As variáveis de contexto caracterizam a situação física do problema, como por exemplo a linguagem no qual o problema está expresso, pretendendo descrever as diferenças entre problemas que têm a mesma estrutura matemática. Incluem as variáveis que descrevem o conteúdo semântico ou sentido matemático do problema.

As variáveis de estrutura descrevem a estrutura matemática intrínseca do problema.

As variáveis formato descrevem as diferentes formas nas quais um problema pode ser apresentado — conjuntamente com outro, com sugestões ou com o auxílio de equipamento.

Variáveis de situação descrevem o ambiente físico, psicológico ou social em que a resolução de problemas tem lugar. Estas variáveis são difíceis de caracterizar porque incluem uma grande variedade de componentes, algumas delas coincidindo com as variáveis de tarefa, nomeadamente as que Kilpatrick (1991) chama de variáveis formato. O ambiente físico inclui variáveis como a sala de aula, laboratório, a natureza do espaço (confortável, estimulante, familiar) e a avaliação dos recursos disponíveis (calculadoras, materiais manipulativos, instrumentos de medida). O ambiente psicológico inclui variáveis que descrevem a finalidade, a natureza do ambiente de aprendizagem e estão relacionadas com a motivação para a resolução de problemas. O ambiente social, embora não discutido por Kilpatrick, parece estar ligado a variáveis que descrevem o grupo, o seu tamanho, tipo, relacionamento entre sujeito e experimentador.

A segunda grande categoria de variáveis considerada por Kilpatrick (1991) é constituída pelas variáveis dependentes e inclui (variáveis de produto, variáveis de processo, variáveis de avaliação e variáveis concomitantes).

As variáveis de produto estão ligadas ao desempenho na procura da solução para o problema e incluem o tempo necessário para a encontrar, a correcção, incorrecção e a elegância da solução ou mesmo a apresentação de várias soluções possíveis.

As variáveis de processo, relacionadas com o comportamento do indivíduo, derivam da apreciação do relato verbal dos alunos durante a resolução dos problemas, dos seus trabalhos escritos ou dos passos seguidos quando usam materiais. Incluem as variáveis que descrevem os processos heurísticos utilizados, os algoritmos empregues ou os caminhos errados que seguiram. Kilpatrick (1991) focou com insistência a importância das variáveis de processo afirmando que qualquer estudo respeitável em resolução de problemas deveria considerar essas variáveis. Domingos Fernandes (1992) refere que entre 1962 e 1972 se nota um afastamento da investigação centrada no estudo dos produtos da resolução de problemas para uma investigação orientada para os processos utilizados pelos alunos quando resolvem problemas. Viragem que se verificou claramente com Kantowski (1974, 1978). No entanto alguns autores recomendam precaução no caso de os auto-retratos serem o único processo de medida. Nisbet e Wilson, 1977 (citados por por Kulm, 1979) argumentam que os relatos durante a resolução dos problemas podem ser incorrectos ou incompletos e deles resultar uma distorção do processo de resolução.

Variáveis de avaliação descrevem os pontos de vista, os pensamentos e opiniões expressas pelo sujeito depois de resolver o problema. Incluem as tentativas que o sujeito fez, o grau de confiança na solução, etc..

Variáveis concomitantes são as variáveis não incluídas nas anteriores e que podem modificar-se com a resolução de problemas. Por exemplo, as atitudes assim como a habilidade para estimar pode ser melhorada depois de resolver um conjunto de problemas.

Categorias das Variáveis de Tarefa

Nos processos de resolução de problemas as variáveis de tarefa são consideradas variáveis independentes, sujeitas pois ao controlo do investigador através da selecção de um conjunto de problemas apropriado. Segundo Lester (1983), a consideração das variáveis de tarefa é importante tendo em vista a inquestionável influência que elas têm no desempenho na resolução de problemas. Contudo, só

recentemente têm sido feitas tentativas para estabelecer esquemas de classificação dessas variáveis.

Para Lester (1983) as variáveis de tarefa referem-se às características do problema e classifica-as em cinco tipos: variáveis de sintaxe, de conteúdo, de contexto, de estrutura e de processos heurísticos.

Kulm (1979) propôs um esquema um pouco diferente. Ele considera quatro grandes categorias: a) variáveis que descrevem a sintaxe do problema, b) variáveis que caracterizam o conteúdo matemático e o contexto não matemático, c)variáveis que descrevem a estrutura do problema e d) variáveis que caracterizam os processos heurísticos.

Kulm (1979) acredita que este esquema é vital para o estudo da resolução de problemas porque ajuda os investigadores a compreender como as variáveis de tarefa interactuam com todas as variáveis de ambiente.

Goldin (1982) (citado por F. Lester, 1983) acrescenta outra razão para identificar as variáveis de tarefa:

> "se o investigador em resolução de problemas não é conhecedor de propriedades importantes da tarefa e não as descreve suficientemente bem para os outros investigadores construírem instrumentos idênticos, as observações terão um uso limitado".

Para o professor, é importante reconhecer as variáveis de tarefa por dois motivos: a) reconhecer o nível de dificuldade de um problema ou de um conjunto de problemas e as razões desse nível de dificuldade; b) criar um conjunto de problemas com o mesmo nível de dificuldade ou com dificuldade crescente. É também importante para os alunos reconhecer mudanças nas variáveis de tarefa e notar os consequentes efeitos na resolução do problema.

Variáveis de Sintaxe

As variáveis de sintaxe são consideradas por Kulm (1979) como um tipo de variáveis de tarefa, definindo-as como sendo as variáveis que descrevem o arranjo e as relações entre as palavras e os símbolos no problema. Este arranjo pode incluir o uso de vocabulário e símbolos específicos da Matemática assim como usar a linguagem corrente. Em muitos problemas de aritmética e de álgebra o arranjo das palavras está relacionado com a estrutura matemática do problema. Muitas investigações têm sido conduzidas usando as variáveis de sintaxe como variáveis independentes para prever as dificuldades dos "problemas de palavras". Embora estes estudos não tenham considerado estas variáveis separadamente das variáveis de outras categorias, concluiram que, para os problemas de palavras de aritmética e de álgebra, as variáveis de sintaxe são responsáveis por quantidades significativas de variância no número de sujeitos que conseguem atingir a resposta correcta (Jerman, 1971).

As variáveis de sintaxe incluem o comprimento do problema, a complexidade gramatical e sequência dos dados, o local em que aparece a questão, a dificuldade do vocabulário e outras, podendo ainda, novas variáveis ser geradas combinando estas.

Apresentam-se no Quadro 4 algumas variáveis de sintaxe que afectam a dificuldade na resolução de problemas:

Quadro 4
Variáveis de sintaxe (Adaptado da tabela apresentada por Caldwell, 1979)

Comprimento	número de palavras número de frases número de palavras por frase
Estrutura gramatical	número de orações tipo de orações comprimento da frase complexidade sintáctica
Numerais e símbolos matemáticos	forma (número, símbolo, palavra) grandeza dos números tipo (fracção, decimal)
Questão	local da questão
Sequência	ordem em que são apresentados os dados
Vocabulário	nível de dificuldade

Segundo Kulm (1979), as investigações com variáveis de sintaxe têm de ser consideradas na elaboração dos problemas de modo a que as dificuldades sintácticas não interfiram com outras variáveis em estudo. Contudo, diz que pouca pesquisa tem sido feita sobre os efeitos da variação da sintaxe nos processos de resolução de problemas[1]. É também sabido que os indivíduos têm menos dificuldade de resolver problemas em que a sintaxe torna possível a tradução directa de uma expressão verbal para uma aritmética ou algébrica. Dada a sua definição objectiva é nesta categoria que há uma oportunidade mais imediata de obter conhecimento significativo acerca do processamento em resolução de problemas que possa ser aplicado aos tipos de problemas encontrados na sala de aula[2].

As variáveis de sintaxe podem ser alteradas facilmente sem alterar a estrutura matemática do problema. Dado um problema, ele pode ser alterado efectuando mudanças no comprimento do enunciado, combinando frases, usando um vocabulário mais difícil, efectuando mudanças nos símbolos, substituindo números inteiros por decimais ou fracções, fazendo variar a grandeza dos números ou mudando o local em que a questão está colocada. Estas alterações na sintaxe provocam mudanças no nível de dificuldade do problema. Nos problemas de mais de um passo, os dados podem ser apresentados na ordem em que vão ser trabalhados ou noutra, o que provoca um aumento de dificuldade. O conhecimento das variáveis de sintaxe permite uma multiplicação de problemas, criando problemas paralelos mais fáceis de resolver.

Variáveis de Conteúdo e de Contexto

À semelhança das variáveis de sintaxe, as de conteúdo e contexto obtêm-se a partir de uma análise directa do enunciado do problema. No entanto, enquanto as primeiras são medidas

[1] Estudos de compreensão de leitura em linguagem corrente indicam que a complexidade sintáctica é um factor determinante na dificuldade e no tempo de resolução do problema (Kulm 1979).
[2] Kulm põe a hipótese das variáveis sintácticas influenciarem fortemente a primeira fase de resolução de problemas no modelo de Polya.

quantitativas, as de conteúdo e contexto são classificatórias por natureza. Descrevem os tipos de palavras, elementos, operações e aplicações da tarefa.

Segundo Norman Webb (1979), o conteúdo de um problema é a "substância" matemática da tarefa. Na perspectiva do mesmo autor as variáveis correspondentes comportam cinco subdivisões de acordo com o Quadro 5.

Especifiquemos um pouco, cada um destes parâmetros.

Quadro 5
Variáveis de conteúdo — Sumário das variáveis de conteúdo da tarefa (versão adaptada de Webb, 1979)

1. Tópicos matemáticos da tarefa A. Classificação do assunto · Geral - álgebra - aritmética - geometria - análise · Específica - razão - fórmula quadrática - proporção B. 'Problemas-tipo' tradicionais - problemas de idade - problemas de distâncias - problemas de dinheiro	4. Variáveis descrevendo os elementos do problema A. Informação dada - condições dadas ou informação numérica - pistas ou sugestões - condições implícitas B. Informação-objectivo - número de itens requeridos - objectivos implícitos - problemas de 'provar' ou de 'determinar'
2. Campo de aplicação da tarefa (se relevante) - biologia - física - química - medicina	5. Equipamento matemático disponível para a tarefa (se aplicável) - compasso - régua - geoplano - ábaco - computadores
3. Conteúdo semântico do enunciado do problema A. Palavras-chave - maior do que - reduzido para - juntamente B. Vocabulário matemático - média - solução de uma equação - polinomial	

A categoria tópicos matemáticos da tarefa abrange a classificação dos problemas por :

• Áreas temáticas ou assunto. A atribuição dessas áreas não é contudo muito objectiva. Krutetskii (1976), citado por Webb (1979), propõe cinco campos distintos — álgebra, Aritmética, Geometria, Lógica e Matemáticas Gerais, ao passo que Hill (1974) (citado por Weeb,1979), no mesmo documento, prefere os domínios — álgebra, Geometria, Teoria dos Números, Probabilidades e Trigonometria. O Unified Mathematics Program sugere a lista: Sistemas de Números Finitos, Sistemas Operacionais, Aplicações Matemáticas, Conjuntos e Relações, Teoria dos Números, Números Racionais, Probabilidades e Estatística, Transformações no Plano, Números Inteiros, Multiplicação de Números Inteiros.

Segundo Caldwell (1979) o tipo de expressões — monomial, binomial, polinomial e o tipo de operações — adição, multiplicação, negação, exponenciação, integração,... são também variáveis de conteúdo a integrar nesta categoria.

Tal classificação dos problemas, não é, porém, independente do *background* dos resolvedores, dado que um mesmo problema poderá ser resolvido de formas diferentes consoante o nível em que se encontrem, pelo que o enunciado deve ser tal que permita conduzir à solução usando métodos de diferentes áreas. Para que o assunto seja, no entanto, considerado uma variável de conteúdo terá de ser obtido a partir do enunciado do problema — os dados, as operações especificadas, e os objectivos da tarefa, e não decorrente da resolução do problema (como veremos quando da abordagem do ponto — Variáveis de Estrutura).

• A designação "problemas-tipo" refere-se habitualmente a um conjunto de problemas que pode ser resolvido usando o mesmo algoritmo. No entanto, no âmbito das variáveis de conteúdo, o conceito é mais genérico, respeitando a uma classe de problemas com atributos similares a nível do enunciado, não sendo necessariamente resolvíveis pelo mesmo processo. É o caso dos problemas de distâncias, de idade, de dinheiro, de velocidade, etc..

Para que dois problemas sejam do mesmo grupo de "problemas-tipo", os dados e o objectivo (a categoria — elementos do problema) expressos no enunciado devem ser idênticos, e da mesma área de conteúdo.

Muitos problemas matemáticos derivam de situações da vida real ou de outras disciplinas que não a própria Matemática. Os tópicos matemáticos destes problemas não descrevem adequadamente o conteúdo do mesmo. Uma nova dimensão de variáveis de conteúdo descrevendo tais casos será então necessária. Tal subcategoria será designada por campo de aplicação.

Relativamente ao campo de aplicação da tarefa, poderemos considerar a Biologia, a Química, a Física, etc..

A resolução de um problema poderá então exigir a utilização de relações matemáticas específicas de acordo com o campo de utilização. Por exemplo, para resolver um problema cujo campo de aplicação seja a Física poderemos ter necessidade de aplicar a lei da conservação do *momentun*.

Será ainda admissível um problema cujo campo de aplicação seja a Medicina, por exemplo, enquanto que o assunto ou tópico matemático, pode ser probabilidades.

A presença de "palavras-chave" e/ou termos técnicos matemáticos no enunciado englobados na categoria de conteúdo semântico, pode influenciar significativamente a resolução do problema, sugerindo a operação a empregar e/ou o caminho a seguir. Assim, relativamente à operação adição, termos facilmente com ela conectados serão: soma, ao todo, juntamente, total, mais, maior do que, acréscimo, juntar, ganhar, etc.; a diferença, redução, menos, decréscimo, mínimo, subtrair, diminuir, perder, tirar, gastar, trocar, etc. são expressões que facilmente conduzem à subtracção; o produto, vezes, cada, ligam-se à operação multiplicação, enquanto que para a divisão as palavras cociente, dividir, por, cada, são-lhe facilmente associadas.

Tais palavras-chave podem, no entanto, contrariamente, aumentar o grau de dificuldade do mesmo e induzir os resolvedores em erro.

Os elementos do problema são: os dados, as operações (implícitas ou explícitas que transformam uma ou várias expressões numa ou várias novas expressões) e o objectivo ou objectivos.

Os atributos de cada um destes grupos permitem descrever doutra forma as variáveis de conteúdo. Poder-se-ão colocar questões tais como: Quais são as condições dadas ou os itens da informação numérica? Todos os dados estão explícitos, ou algumas condições estão implícitas? Os dados são relatados conjuntiva e/ou disjuntivamente? Quais as operações explícitas e as implícitas?

Relativamente aos objectivos de um problema matemático, duas importantes categorias devem ser consideradas: problemas de "demonstrar" e problemas de "determinar". O tipo de demonstração pode variar segundo os parâmetros — directa, indirecta, indutiva, redução ao absurdo,... .

Os problemas de "determinar" admitem também algumas variações no que diz respeito ao objectivo: um número, um conjunto de números, um processo, uma expressão, uma construção, uma figura geométrica, uma conclusão lógica, etc..

Finalmente no que diz respeito ao equipamento e/ou material matemático disponível, caso aplicável, poderemos considerar calculadoras, compasso, computador, réguas, esquadros, transferidor, geoplano, ábaco, etc.. De referir que o insucesso que se poderá obter a nível da resolução do problema pode dever-se não à falta de conhecimentos relativos ao assunto em causa, mas sim motivado pela não familiaridade com o material, ou até falta de destreza psicomotora. Por outro lado, os resolvedores podem considerar a utilização desse material um elemento altamente motivador, contribuindo para a eficácia da resolução do problema.

O contexto refere-se à forma do enunciado do problema.

As respectivas variáveis, intrínsecas à tarefa e não descritivas das condições externas ao problema, englobam as categorias:

* variáveis que descrevem a representação ou formulação do problema;
* variáveis que descrevem o contexto verbal;
* variáveis que descrevem o formato da informação.

Um problema poderá ser apresentado de uma forma simbólica, pictórica, manipulativa e por escrito, ou visual ou oralmente. O sucesso na resolução de determinado problema não é indistinto de tais representações, devendo por esse facto ser tido em conta o nível de desenvolvimento do resolvedor e a familiaridade com tais aspectos aquando da formulação/selecção das tarefas a propor. É aconselhável fazer variar significativamente a forma como os problemas são apresentados, de acordo com o nível de desenvolvimento dos alunos, não só adaptando-se a ele, como também promovendo-o. Tal pode concorrer para o interesse na descoberta da solução, para a criação de um clima propício à sua resolução, para a desdramatização da tarefa, transformando-a num jogo e/ou actividade lúdica.

Relativamente ao contexto verbal poderá ser conveniente utilizar consoante os objectivos que se pretendam atingir — problemas não familiares, com recurso por exemplo, a termos perfeitamente desconhecidos para o resolvedor, a fim de desenvolver *skills* que lhe permita distinguir os elementos realmente necessários para a resolução do problema dos supérfulos para a tarefa.

O concretismo da situação poderá ser aconselhável em fases iniciais, podendo-se gradualmente propor problemas que exijam determinados níveis de abstração — o que habitualmente concorre para um acréscimo da dificuldade da tarefa.

Um problema factual habitualmente descreve uma situação, enquanto que um problema hipotético sugere uma possível alteração da situação.

Nos problemas imaginativos, alguma informação é perfeitamente prescindível para o tratamento do problema, o que pode confundir o resolvedor, mas pode, por outro lado, produzir certa motivação para a resolução do problema.

No que respeita ao formato, a informação contém ou não pistas ou sugestões? A informação é dada de uma só vez ou somente parte dela é dada no início e a restante fraccionada? Alguma informação só é acessível se o resolvedor a solicitar? E os itens são do tipo de resposta livre ou escolha múltipla?.

Usualmente, apresenta-se o problema como um todo, incluindo suficiente informação para uma única solução.

À semelhança de outras categorias, devem-se apresentar (principalmente no âmbito do processo ensino/aprendizagem) problemas em que o valor das diversas variáveis altere significativamente, como veremos no último capítulo deste documento.

Na tentativa de sintetizarmos o que foi dito relativamente às variáveis de contexto, apresentamos no Quadro 6 um sumário das mesmas.

Quadro 6
Variáveis de contexto — Sumário das variáveis de contexto da tarefa (versão adaptada de Caldwell (1979) e Webb (1979))

1. Formulação ou representação de um problema - simbólica - manipulativa - pictórica - escrita - oral - verbal
2. Contexto verbal - familiar/não familiar - prático/teórico - concreto/abstracto - factual/hipotético - convencional/imaginativo
3. Formato da informação - presença/ausência de pistas - itens de escolha múltipla/resposta livre/... - informação dada na totalidade ou parcialmente

Variáveis de Estrutura

Contrariamente ao que se passa com as variáveis de sintaxe, conteúdo e contexto que se podem obter directamente a partir do enunciado do problema, as variáveis de estrutura só se poderão definir com base numa análise matemática formal da estrutura intrínseca de uma representação do problema.

Neste contexto e atendendo a que diferentes resolvedores podem formular diferentes representações de determinado problema (Goldin, 1985), poder-se-á colocar a questão — Será possível obter uma estrutura bem definida dum problema, passível de ser formalmente analisada?.

Na perspectiva de Gerald Goldin (1985) tal é plausível, depois de uma criteriosa explicitação e selecção de uma ou várias dessas interpretações (habitualmente a(s) mais comum(uns)[3] e atendendo a que um problema poder-se-á transformar num conjunto bem definido de regras de procedimentos operacionais, explícitas no próprio problema ou percebidas a partir do enquadramento matemático (Goldin, 1985).

Um dos métodos de análise da estrututra de um problema, conducente à definição das respectivas variáveis, prende-se com a

[3] Exemplo: "Determinar o valor mínimo da expressão $y=x^2-2x+3$"

Processo	Construção de uma tabela de valores, e por tentativa e erro chegar ao valor mínimo	Constução de um gráfico da função e a partir do modelo visual chegar ao valor mínimo	Cálculo da derivada e determinação do valor que a anula
Representação	Sequências de valores para x e correspondentes valores para y	Gráfico	Sequências de equações da forma dy/dx=0

representação estado-espaço[4] (bastante utilizada nos modelos de Inteligência Artificial ou com o espaço-problema subjacente ao modelo de Processamento da Informação, desenvolvido por Newell and Simon (1972)).

O estado-espaço de um problema, tal como foi definido por Nilsson (1980), é:

> "a set of distinguishable problem configurations, called states, together with the permitted steps from one state to another, called moves. A particular state is designated as the inicial state, and a set containing one or more states wich can be reached from the inicial state by successive moves is singled out as the set of goal states" (Goldin, 1985; p. 115).

Relativamente ao problema[5] :

"Estás junto a um rio com dois baldes. O primeiro leva exactamente 3 litros de água, o segundo precisamente 5 litros, e os baldes não estão marcados para medir de outra forma. Enchendo ou esvaziando os baldes, ou transferindo água de um para o outro, encontra forma de levar exactamente 4 litros de água do rio", um estado pode ser representado por um par de números, designando o número de litros em cada um dos baldes. O par (0,0) traduzirá então o estado-inicial. O estado-objectivo é qualquer estado do tipo (x,4).

O estado-espaço do problema poderá ter a seguinte configuração (ver Figura 1):

[4] *State-space* no original.

[5] Os problemas que iremos apresentar, nesta primeira fase, são problemas considerados não-rotineiros. Tal facto deve-se essencialmente a dois aspectos:

"First, the roles of procedure stated in the problems are few, making it possible to identify a small number of operators which characterize the state-space. Frequently the state-space it self is small enough so that it can be fully displayed.

Secondly, the states themselves correspond to configurations of physical objects described in the problem statements." (Goldin, 1979; p. 150)

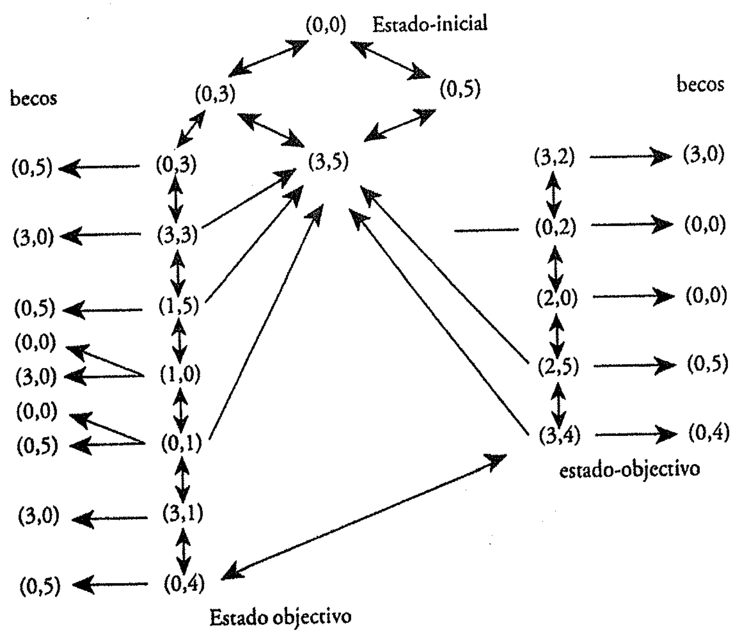


Figura 1. Estado-espaço do problema dos dois baldes.

Os referidos movimentos podem ser caracterizados através de um conjunto finito de operadores definido a partir do conjunto dos estados para ele próprio, ou seja cada operador possui um domínio de estados ao qual é aplicável, e uma série de estados sucessores.

Atendamos no problema:

"Duas caras e duas coroas estão colocadas em linha, as caras à esquerda e as coroas à direita com um pequeno espaço entre elas:
N - caras (N N DD)
D - coroas
As caras movem-se somente para a direita e as coroas somente para a esquerda. Uma moeda pode mover-se para o espaço vazio adjacente ou pode passar por cima de uma moeda de qualidade oposta (cara ou coroa) para ocupar o espaço vazio. Mostre como trocar a posição das caras com as coroas".

Poder-se-ão definir 4 operadores, que aplicáveis a estados precisos originam um único estado sucessor, "mover uma cara para a direita", "mover uma coroa para a esquerda", "saltar uma cara para a direita", "saltar uma coroa para a esquerda".

Neste contexto, encontrar o caminho-solução corresponde a descobrir a sequência de operadores que aplicados ao estado-inicial conduzem ao estado-objectivo.

Atendendo a que o conjunto de estados da representação de um problema pode ser bastante extenso, o estado-espaço poderá ser caracterizado através do estado-inicial e de uma lista de operadores.

Sem pretendermos ser, nesta primeira abordagem , exaustivos, com base na análise do estado-espaço de uma representação de um problema, poderemos inferir algumas das variáveis de estrutura subjacentes, nomeadamente:

* Número total de estados.
* Número de caminhos para atingir a solução.
* Comprimento do menor caminho para a solução.
* Número de becos.
* Número de possíveis primeiros movimentos.
* Número de movimentos permitidos.
* Reversibilidade dos movimentos.
* Número de movimentos proibidos.
* Número de estados-objectivo.
* Razão entre o número de estados-objectivo e o número total de estados.
* Número de configurações simétricas.

Poderemos caracterizar o primeiro problema apresentado neste documento, relativamente às variáveis de estrutura, da seguinte forma:

* Apresenta um estado-espaço composto por 30 estados, 14 dos quais são becos;
* um estado a partir do qual não há um movimento permitido excepto (possivelmente) o inverso do movimento imediatamente precedente;
* há dois percursos não simétricos conducentes à solução —

um com seis movimentos, sete estados, que permitem atingir o estado-objectivo (3, 4), e um caminho de 8 movimentos, nove estados, conducentes ao estado-objectivo (0, 4). Nem todos os movimentos são reversíveis;

* poderemos, por esvaziamento do primeiro balde, passar do estado (1, 5) para o (0, 5), mas não será admissível o movimento inverso.

O problema das moedas, de que apresentamos uma sua representação (ver Figura 2) apresenta um único estado-objectivo que poderá ser atingido por duas vias equivalentes devido à sua simetria. Realmente, o movimento de uma cara para a direita, irá corresponder ao movimento de uma coroa para a esquerda.

A configuração estado-espaço, pode ser extremamente útil quando pretendemos caracterizar exaustivamente o acréscimo de complexidade intrínseca de um problema, introduzida pela alteração/imposição de determinadas condições e/ou estudar o problema da transferência de conhecimentos (ver Figura 2).

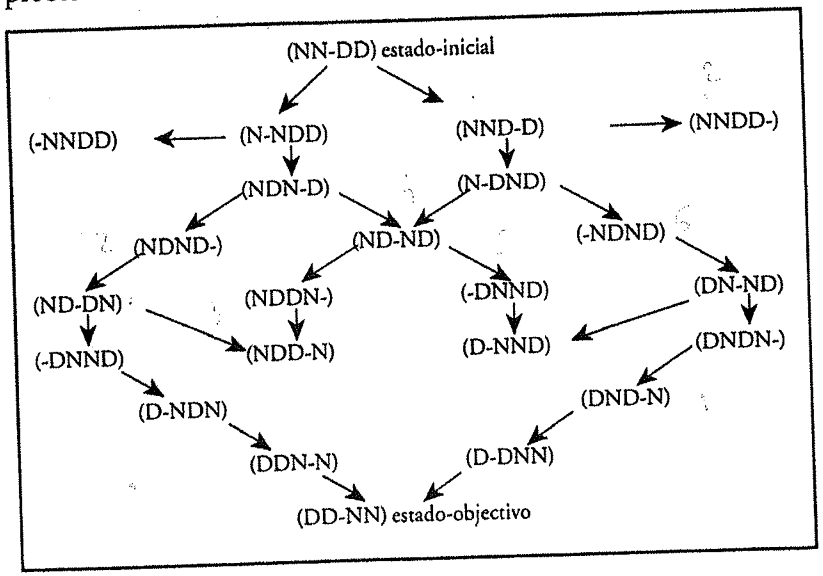


Figura 2. Estado-espaço do problema das caras e coroas.

Relativamente ao problema das caras e coroas, vejamos como uma "simples" alteração a nível de variáveis de sintaxe, no número de moedas influi significativamente na complexidade da estrutura intrínseca do mesmo (Goldin, 1985; p. 120 e seguintes). O número de possíveis primeiros-movimentos mantém-se o mesmo (2), no caso de o número de caras e/ou coroas ser 1, 2, 3 ou 4; em qualquer destas situações existe um único estado-objectivo e dois caminhos equivalentes, devido à simetria, para atingir a solução, no entanto:

a) Número total de estados no estado-espaço:
1 cara e 1 coroa 6
2 caras e 2 coroas 23
3 caras e 3 coroas 72

b) Comprimento do menor caminho para a solução:
1 cara e 1 coroa 3 passos
2 caras e 2 coroas 8 passos
3 caras e 3 coroas 15 passos
....
n caras e n coroas $(n+1)^2-1$ passos

c) Número de becos:
1 cara e 1 coroa 0
2 caras e 2 coroas 4
3 caras e 3 coroas 13.

Vejamos agora que relações se poderão estabelecer entre configurações estados-espaço da estrutura intrínseca de problemas, e de que forma se poderão rentabilizar para o sucesso da resolução dos problemas.

Isomorfismo. Dois estados-espaço são isomorfos se existe uma correspondência entre os estados do primeiro e os estados do segundo com as seguintes propriedades:

(a) a correspondência é bijectiva

(b) um movimento de um estado para outro é permitido no primeiro estado-espaço se e só se o movimento correspondente é permitido no segundo.

(c) o estado-inicial do primeiro corresponde ao estado-inicial do segundo.

(d) um estado é um estado-objectivo do primeiro estado--espaço se e só se o estado correspondente no segundo estado--espaço também é um estado-objectivo.

Ora, se duas representações estados-espaço são isomórficas, então poderemos concluir que têm a mesma estrutura e, consequentemente, valores idênticos para as respectivas variáveis, sendo portanto indistinto resolver uma ou outra versão e possível transferir os conhecimentos adquiridos de uma para a outra.

Nesta perspectiva, representações válidas de certo problema incluem-se em classes de equivalência ou classes isomórficas, o que significa que quando falamos de variáveis de estrutura de um problema, estamos realmente a considerar uma determinada classe de representações isomórficas do problema.

Homomorfismo. A noção de estado-espaço homomórfico é uma generalização do conceito de estado-espaço isomórfico.

Suponhamos que temos dois estado-espaço S e T. Um homomorfismo é uma correspondência "f" de S para T não necessariamente injectiva e não necessariamente sobrejectiva, que satisfaz as condições:

(a) Se s_1 e s_2 são estados em S tais que há um movimento permitido de s_1 para s_2, então também haverá um movimento permitido em T de $f(s_1)$ para $f(s_2)$ ou então $f(s_1)= f(s_2)$.

(b) um homomorfismo diz-se conservativo relativamente a um objectivo se faz corresponder estados-objectivo de S a estados-objectivo de T.

Os homomorfismos poderão ser:

· Injectivos, se a correspondência "f" do primeiro estado-espaço para o segundo, for de um para um.

· Sobrejectivos, quando a correspondência f do primeiro estado--espaço para o segundo, o for. Isto é, para qualquer estado "t" pertencente ao segundo estado-espaço T, existe pelo menos um estado "s" pertencente ao primeiro estado-espaço S, tal que $f(s)=t$.

Poder-se-á estabelecer, no entanto, uma relação mais fraca entre estruturas de problemas que a homomórfica. Um fraco-homomorfismo entre dois estados-espaço S e T, será uma correspondência f de S em T, que satisfaz as condições: se s_1 e s_2 são estados de S entre os quais existe um movimento permitido, então $f(s_1)=f(s_2)$ ou existe uma sequência de movimentos permitidos em T de $f(s_1)$ em $f(s_2)$ de tal forma que os estados intermédios não são imagem, por f, de nenhum estado em S.

Todo o homomorfismo é um fraco-homomorfismo.

Todo o fraco-homomorfismo sobrejectivo é um homomorfismo.

Um fraco-homomorfismo injectivo de S em T será designado por inclusão de S em T.

Resumindo:

(a) Um homomorfismo injectivo permite ver um problema como um sub-problema de outro.

(b) Um homomorfismo sobrejectivo permite-nos caracterizar a relação de um problema com outro relacionado por supressão de algum atributo dos estádios do problema original.

O conceito de inclusão da representação de um problema na de outro permite-nos classificar mais amplamente as representações alternativas que podem ser construídas com base no enunciado de um problema. Realmente, mesmo que essas configurações não sejam isomórficas poderão relacionar-se por meio dessa inclusão, embora, no geral apresentem valores distintos para importantes variáveis de estrutura.

Simetrias e Decomposição em Sub-espaços. Um automorfismo de um problema — um isomorfismo do estado-espaço de um problema em si próprio, é vulgarmente designado por transformação de simetria da representação do problema.

As transformações de simetria de um estado-espaço — — englobando também nesta designação a transformação identidade e a transformação inversa de uma transformação simétrica — formam um grupo matemático que designaremos por Grupo de Simetria da Representação do Problema.

A ordem de tal grupo pode ser considerada uma nova variável de tarefa.

Sempre que um estado-espaço possui simetria é possível construir um estado-espaço reduzido constituído por estados equivalentes, determinados pelas transformações de simetria que foram identificadas.

Vejamos algumas implicações das relações abordadas na resolução de problemas:

• Se o estado-espaço pode ser partido em sub-espaços, cada um correspondendo a um sub-problema particular, podemos antecipar a possibilidade de considerar "degraus", "fases", "etapas" durante a resolução do problema, com todas as vantagens daí decorrentes. O resolvedor poderá estabelecer então a sequência:

1º — seleccionar um sub-objectivo;

2º — resolver o correspondente sub-problema;

3º — *chunk* o algoritmo solução do sub-problema — substituir o sub-espaço do estado-espaço por um único estado que corresponde à solução do sub-problema.

Então, se o estado-espaço pode ser decomposto em sub-espaços isomórficos, poderão existir estados que correspondem à solução de classes isomórficas particulares de sub-problemas.

• O reconhecimento da simetria que está presente na representação do problema é muitas vezes a chave da compreensão profunda do problema. Mesmo que o indivíduo, no início da resolução de um problema, descure as simetrias existentes, durante a resolução poderá reconhecer estados como equivalentes, causando talvez uma profunda mudança na "percepção" do problema pelo resolvedor.

• As representações homomórficas e isomórficas permitem:

- transferir a aprendizagem de um problema para outro;

- conhecer o processo pelo qual os resolvedores reconhecem as analogias das estruturas dos problemas e as utilizam na sua resolução;

- comparar a representação de um problema com a representação inversa proporciona o enquadramento necessário para o estudo da reversibilidade do pensamento.

Já vimos inicialmente que as variáveis de estrutura poderão ser definidas a partir da análise estado-espaço de uma representação de um problema.

Iremos agora referir outras possibilidades de obtenção das referidas variáveis com base noutras análises — análise de algoritmos e de estratégias.

Um algoritmo poderá ser considerado como um procedimento bem definido para resolver uma classe de problemas com uma dada representação. Dado que poderá ser descrito em função do conjunto de operadores no estado-espaço, as duas abordagens serão compatíveis-um algoritmo aceitará o "ciclo-inicial" como "entrada", a partir do qual se gerará uma sequência de estados até se atingir o estado-objectivo através de um caminho único, por sucessivas aplicações dos operadores.

A aplicação de algoritmos alternativos provocará possíveis caminhos-solução distintos, pelo que se impõe, novamente, a escolha de um algoritmo particular que permita a comparação de problemas no que respeita às variáveis de estrutura da tarefa. Estas incluem:

(a) o número de passos na linha-de-acção, gerada pelo algoritmo, para a solução do problema;

(b) o número de vezes que um "desvio" no algoritmo é ultrapassado;

(c) o número de vezes que uma "ramificação" do algoritmo é atravessado;

(d) o número de vezes que um operador particular é solicitado pelo algoritmo[6] .

Uma generalização de um algoritmo — uma estratégia[7] — é

[6] As variáveis de estrutura definidas relativamente aos algoritmos parecem fazer mais sentido nos problemas altamente rotinizados — tarefas de cálculo — onde algoritmos *standard* são largamente ensinados aos alunos.

[7] Além da relação algoritmo-estratégia, ainda se poderão tentar relacionar os termos estratégia e procedimento heurístico: a estratégia estabelece um subconjunto bem definido de movimentos a serem considerados num desenvolvimento particular enquanto que, por vezes, um procedimento heurístico sugere uma estratégia-solução particular (ou algoritmo) numa situação particular.

qualquer procedimento que limita o conjunto de possíveis movimentos sem necessariamente individualizar um movimento particular. Nesta perspectiva, enquanto um algoritmo é definido relativamente a operadores que são funções parciais no estado--espaço, a estratégia pode ser definida relativamente a relações parciais no estado-espaço.

Uma relação parcial faz corresponder cada estado no seu domínio a um conjunto de possíveis estados sucessores, pelo que a estratégia não conduz necessariamente a uma única linha-de-acção, caminho, dentro do estado-espaço, pelo contrário, gera um conjunto de linhas-de-acção possíveis, as quais podem ou não incluir a linha-de-acção solução.

Também relativamente a uma estratégia particular se poderão definir algumas variáveis de estrutura, nomeadamente:

(a) a susceptibilidade de uma determinada estratégia conduzir a uma solução;

(b) o número mínimo de passos na linha-de-acção para uma solução gerada por uma estratégia particular.

Um dado importante que convém realçar é o facto de que, se dois estados-espaços são isomorfos, qualquer estratégia que possa ser definida num deles tem uma estratégia correspondente no outro.

Até aqui temo-nos debruçado sobre as variáveis de estrutura em problemas não-rotineiros, pelas razões apresentadas. Nesta segunda parte, tentaremos transpor as considerações tecidas para os problemas que habitualmente se abordam num contexto de sala de aula, os designados problemas rotineiros.

As variáveis de estrutura da tarefa relativas a este último tipo de problemas, são obtidas a partir de uma representação *standard* do problema ou de representações *standard* expandidas .

Tais representações comportam, habitualmente, no que diz respeito a problemas de álgebra elementar, um conjunto finito de equações e um número finito de variáveis. É esta configuração de símbolos que consideraremos estados de um estado-espaço, com a finalidade de daí inferimos as variáveis de estrutura.

O conceito estados-espaço isomorfos permite-nos considerar que problemas rotineiros têm a mesma estrutura (independentemente da expansão ou redução usada) quando as equações algébricas que os traduzem são as mesmas, excepto no que respeita as letras que designam as variáveis. Quando os valores das constantes numéricas variam, teremos que ser muito mais cautelosos relativamente à classificação de terem a "mesma" estrutura. Neste caso, tal caracterização depende da selecção de uma representação e da satisfação das condições:

- os movimentos no cálculo devem estar em correspondência um-a-um;
- o número de digitos tem de ser igual em ambos os casos;
- o "0" e o "1" não devem ser considerados equivalentes a outros números.

A fim de atribuirmos valores específicos às variáveis de estrutura de uma representação *standard* de um problema teremos que especificar um nível no qual os estados serão considerados distintos, e os passos que constituem movimentos particulares de um estado para outro.

Relativamente a um problema algébrico elementar poderemos estabelecer as convenções:

- configurações-simbólicas relacionadas em virtude das propriedades associativa ou comutativa da adição ou multiplicação e simétrica da igualdade, representam estados equivalentes;
- configurações-simbólicas relacionadas em virtude de parêntesis supérfluos, representam estados equivalentes;
- um único passo é permitido para:

a) alterar ambos os membros de uma equação por adição, subtracção, multiplicação ou divisão (exceptuando o zero) de expressões idênticas;

b) alterar ambos os membros de uma equação efectuando uma única operação em cada lado, quer seja negação, recíproco, raiz quadrada, ...;

c) efectuar um único cálculo aritmético;

d) substituir uma expressão por uma variável adequada;

e) aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtracção;

f) anular termos simétricos, ou anular termos iguais no numerador e no denominador de uma fracção.

Poderemos abordar o estudo das variáveis de estrutura de um problema rotineiro, não só a partir das características dos caminhos resultantes da aplicação do algoritmo ou estratégia, como também através das características do correspondente sistema de equações (o estado-inicial do problema), independentemente do caminho para a solução.

As variáveis daí resultantes poderão comportar então:

- o número de equações;
- o número de variáveis;
- número de vezes que uma operação ocorre;
- número de parêntesis;
- ... etc..

Tentaremos agora, sem pretensões de ser exaustivos, sintetizar as diversas variáveis de estrutura apresentadas, num quadro adaptada de Gerald Goldin (ver Quadro 7):

Quadro 7
Variáveis de Estrutura

A. Variáveis de complexidade dos problemas
- Número total de estados. 2^3
- Número de caminhos para atingir a solução. 2
- Razão entre o número de caminhos para atingir a solução e o número total de caminhos do estado-espaço. 2/8
- Comprimento do menor caminho para a solução. 8 passos
- Número de becos. 4
- Número de possíveis primeiros movimentos. 2
- Número de possíveis primeiros movimentos que conduzem à solução. 2
- Razão entre número de possíveis primeiros movimentos que conduzem à solução e o número de possíveis primeiros movimentos. 2/2
- Número de movimentos permitidos. 4
- Reversibilidade dos movimentos.
- Número de movimentos proibidos.
- Número de estados-objectivo. 1
- Razão entre o número de estados-objectivo e o número total de estados. $1/2^3$
- Número de configurações simétricas. 2

B. Variáveis definidas relativamente a algoritmos ou estratégias.
- O número de passos na linha-de-acção, gerada pelo algoritmo, para a solução do problema.
- O número de vezes que um "desvio" no algoritmo é ultrapassado.
- O número de vezes que uma "ramificação" do algoritmo é atravessado.
- O número de vezes que um operador particular é solicitado pelo algoritmo.
- A susceptibilidade de uma determinada estratégia conduzir a uma solução.
- O número mínimo de passos na linha-de-acção para uma solução gerada por uma estratégia particular.

C. Variáveis descrevendo o estado-inicial de uma representação *standard*.
- Número de equações.
- Número de variáveis.
- Número de vezes que uma operação ocorre.
- Número de parêntesis.

D. Simetria e características dos sub-problemas.
- Número de elementos do grupo simetria G.
- Classes de equivalência de estados segundo a acção do grupo de simetria G.
- Subgrupos do grupo de simetria G.
- Decomposição de um estado-espaço em sub-espaços (principalmente, decomposição em sub-espaços mutuamente isomorfos).
- Simetria em ambos os sentidos (ascendente e descendente) no interior do estado-espaço.

E. Variáveis descrevendo relações entre problemas.
- Existência de um isomorfismo entre S e T.
- Existência de um homomorfismo entre S e T, em particular:
- Um homomorfismo injectivo de T sobre S (sub-problema de S);
- Um homomorfismo sobrejectivo de S sobre T (redução de S).
- Características do problema inverso de S (particularmente, isomorfismo entre S e o problema inverso).

Processos Heurísticos

Raciocínio heurístico e os comportamentos que ele reflecte geralmente são considerados características do resolvedor. No entanto, os processos heurísticos, para além de se relacionarem com o resolvedor, também se podem considerar inerentes ao problema de Matemática e variam de problema para problema. O ambiente da tarefa fornece um estímulo para o raciocínio. A interacção entre as operações mentais do resolvedor e a tarefa em si mesmo sugerem os processos heurísticos que acontecem durante a resolução de problemas. Porque os termos "heurística" e "processos heurísticos" têm sido definidos de diferentes formas, apresentamos aqui algumas definições, descrições ou referências ligadas a estes termos.

Segundo Polya (1957), heurística é o nome de um certo ramo de estudo, não muito claramente circunscrito, pertencendo à lógica, ou à filosofia, ou à psicologia É o objectivo da heurística é estudar os métodos e as regras da descoberta e invenção.

Raciocínio heurístico é o raciocínio, visto não só como final e rigoroso, mas como provisório e aceitável, cujo propósito é descobrir a solução do problema presente.

Em Polya (1962) define-se o termo heurísticas como sendo o estudo dos meios e métodos de resolução de problemas É atrair o leitor para pensar acerca dos meios e métodos que usa quando resolve os problemas.

De acordo com Gelernter & Rochester (1958), método heurístico (ou uma heurística) é um procedimento que pode conduzir a um pequeno corte dos objectivos ou pode conduzir a um beco sem saída. É impossível prognosticar o resultado final antes que a heurística tenha sido aplicada e os resultados sejam verificados por processos formais de raciocínio.

Segundo Feigenbaum & Feldman (1963), tudo que se pode dizer acerca de uma heurística útil é que ela oferece soluções que são suficientemente boas a maior parte das vezes.

Para Wilson (1967), uma heurística é uma decisão, uma forma de comportamento, que usualmente conduz aos resultados desejados, mas sem nenhuma garantia de sucesso.

Kilpatrick (1968) diz que uma heurística é qualquer plano, técnica, regra, etc. que melhore a realização na resolução de problemas.

Kantowski (1974) diz que heurísticas podem ser descritas como regras para seleccionar caminhos de investigação através dum "problema espaço". Uma heurística é um caminho que um resolvedor escolhe na sua investigação para uma solução.

Segundo Jerome Bruner (1964), heurística é uma abordagem feita por alguém para resolver um problema. Um processo heurístico é essencialmente um método não rigoroso de conseguir soluções para problemas, sem oferecer garantia alguma de o conseguir.

Krulic & Rudnick (1984) referem que as heurísticas fornecem um "mapa-guia" que dirige os trabalhos em direcção à solução do problema. Contrariamente aos algoritmos, que garantem sucesso quando aplicados correctamente e se for seleccionado o algoritmo adequado, as heurísticas não garantem o sucesso. No entanto, se os estudantes forem ensinados a seguir heurísticas em muitas situações problema, então eles ficam em boa posição para resolver com sucesso os problemas que surjam.

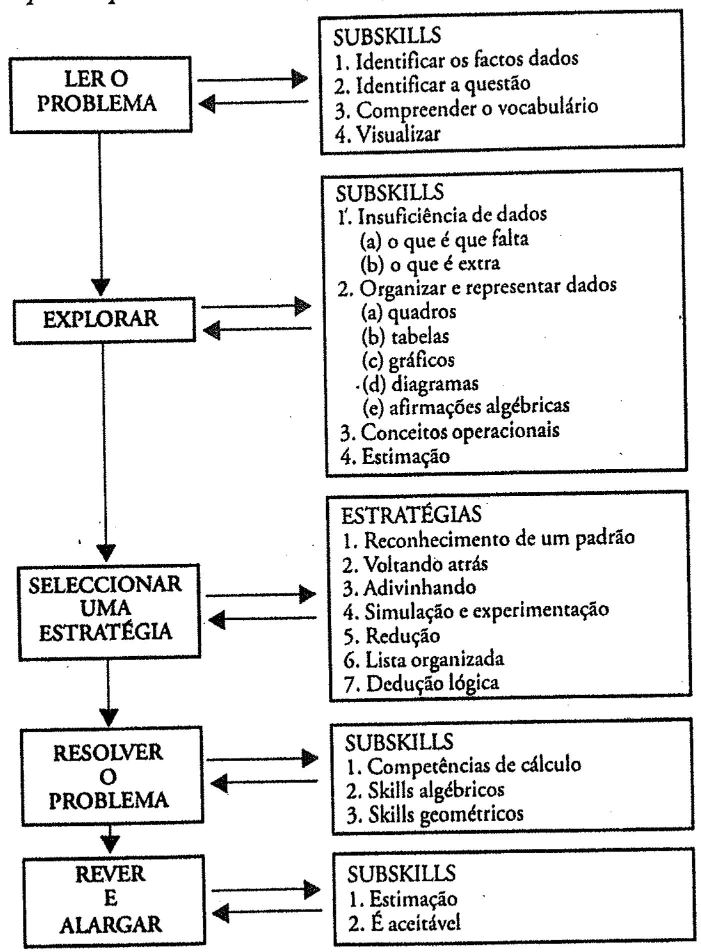
As heurísticas apresentadas no Quadro 7 constituem 5 etapas do processo de resolução de problemas apresentadas por Krulic & Rudnick (1984).

A terceira heurística — seleccionar uma estratégia — considerada a mais difícil é a parte do processo de resolução de problemas que providencia a direcção que o resolvedor deve seguir para encontrar a solução. A sua selecção é determinada pelas fases Ler e Explorar e o sucesso da sua escolha vem com a prática. As estratégias são usadas muitas vezes em combinação.

Destacamos também o importante modelo de Polya (1957) que sugere quatro fases na resolução de problemas: 1. Compreender o problema; 2. Delinear um plano; 3. Implementar o plano; 4. Rever.

Alguns dos principais processos heurísticos identificados por Polya (1957) são: analogia, elementos auxiliares, problemas auxiliares, decomposição e recombinação, definição, generalização, indução e indução matemática, redução ao absurdo e demonstração indirecta, especialização, simetria, variação do problema, trabalhar voltando atrás (ver Quadro 8):

Quadro 8
Etapas do processo de resolução de problemas

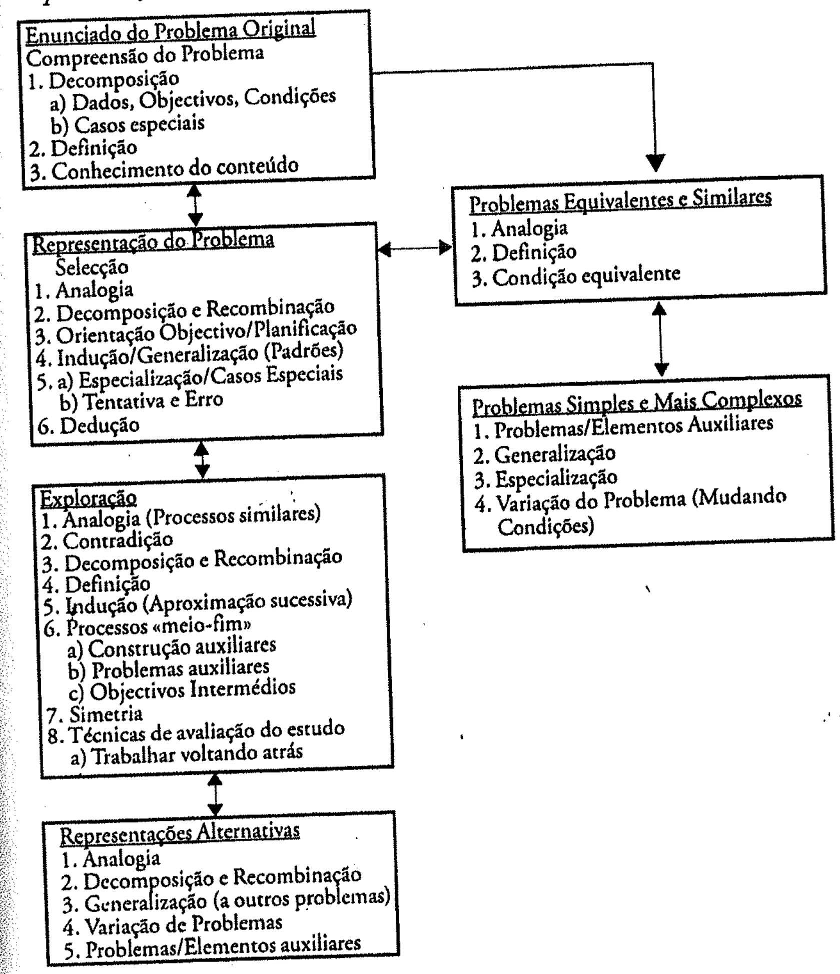


Em estreita ligação com as quatro fases do modelo de Polya (1957), McClintock (1979) faz uma análise dos processos heurísticos com relevo para:

1. Processos para a compreensão do problema
2. Processos para a selecção duma representação
3. Processos para explorar uma representação
4. Processos para usar representações alternativas.

O Quadro 9 ilustra o uso desses processos heurísticos para desenvolver e explorar uma representação e para criar representações alternativas.

Quadro 9
Representação do Problema e Processos Heurísticos



Aplicações no Ensino

Passamos a apresentar alguns problemas que ilustram algumas formas de variar cada uma das variáveis de tarefa estudadas.

Os problemas apresentados nesta terceira parte, adaptados de Janet Caldwell (1979), ilustram como mudanças nas variáveis de tarefa interferem no processo de resolução de problemas.

Variação de Sintaxe

De uma maneira geral, a complexidade sintáctica de um problema pode variar sem haver mudanças no que diz respeito ao seu conteúdo e contexto e sem afectar a sua estrutura matemática.

Consideremos o problema seguinte:

> Dois carros partem do mesmo lugar. Eles vão em direcções opostas. O primeiro carro vai a 30 Km por hora, o segundo carro vai a 45 Km por hora. Em quantas horas estarão eles a 150 Km de distância?

Podemos alterar o enunciado deste problema variando o seu comprimento.

> Dois carros partem do mesmo lugar e ao mesmo tempo. Os dois carros vão em direcções opostas na mesma estrada. O primeiro carro vai para Oeste a 30 Km por hora. O segundo carro vai para Este a 45 km por hora. Em quantas horas estarão os dois carros a 150 Km de distância um do outro?

→ O alongamento do enunciado do problema origina algumas mudanças na estrutura gramatical e tende a aumentar a sua dificuldade. Este problema, tal como o anterior, tem cinco frases, mas enquanto que o primeiro tem 39 palavras, o segundo já tem

57. A média das palavras por frase é de 7.8 no primeiro enunciado e 11.4 no segundo. O número de orações por frase mantém-se igual em ambos os casos. Combinando frases obtemos o enunciado:

> Dois carros vão em direcções opostas partindo do mesmo lugar. O primeiro vai a 30 Km por hora, enquanto o segundo carro vai a 45 Km por hora. Em quantas horas estarão os dois carros a 150 Km de distância?

A dificuldade do problema aumenta porque a combinação de frases produz uma mudança na compreensão do problema dado que a profundidade da frase e a complexidade gramatical são mais elevadas. Este problema tem três frases e 40 palavras, mas a média de palavras por frase é 13.3 e tem duas orações por frase.

Outros enunciados mais complicados podem ser criados usando um vocabulário mais difícil, alterando a estrutura gramatical, ou mudando os números e os símbolos. Também a colocação da pergunta no começo ou fim do enunciado influencia o grau de dificuldade do problema.

> Em quantas horas estarão dois carros afastados de 150 Km? Eles partem do mesmo lugar. Vão em direcções opostas. O primeiro carro vai a 30 Km por hora. O segundo carro vai a 45 Km por hora.

> Dois carros partem do mesmo lugar. O primeiro carro vai a 30 Km por hora. O segundo carro vai a 45 Km por hora. Em quantas horas estarão eles afastados de 150 Km, se eles vão em direcções opostas?

Os problemas seguintes são duas versões do mesmo problema com mais de um passo. Numa versão os dados são apresentados pela ordem em que vão ser usados pelo resolvedor e na outra aparecem por ordem diferente.

João comprou três camisas a 6500$00 cada uma e duas gravatas a 5400$00 cada. Quanto gastou ele ao todo?
Uma camisa custa 6500$00 e uma gravata custa 5400$00. O João comprou três camisas e duas gravatas. Quanto gastou ao todo?

O segundo problema, embora com idêntico conteúdo, contexto e estrutura, é mais complexo que o primeiro porque a diferença de sintaxe obriga o estudante a reorganizar os dados para interpretar o problema.

As várias versões dos problemas apresentados ilustram como a mudança da sintaxe no problema pode afectar a dificuldade do problema. O reconhecimento destas mudanças torna o estudante capaz de interpretar enunciados do problema, de criar um enunciado paralelo a um enunciado dado, contendo só os elementos essenciais e tornando assim mais fácil a resolução desse problema.

Compete ao professor orientar os alunos no sentido de reconhecerem diferentes enunciados do mesmo problema.

Variação de Conteúdo e de Contexto

A variável conteúdo descreve o assunto do problema e é aquela que primeiro preocupa o professor. Os problemas devem ser considerados não só de acordo com a sua área geral tal como álgebra, geometria, lógica, etc., mas também de acordo com o nível de desempenho do resolvedor e do seu conhecimento básico matemático.

Assim, apresentamos aqui dois problemas que podem ser resolvidos de maneira diferente por alunos com diferentes níveis de realização.

Um fazendeiro tem mais oito galinhas que cães. Ao todo os animais têm 118 patas. Quantos cães tem o jovem fazendeiro?

Alunos mais novos podem resolver este problema por tentativa e erro, alunos que tenham estudado equações lineares podem usar a equação $2(x+8)+4x = 118$, e alunos que já conhecem sistemas de equações podem usar duas equações com duas incógnitas $x+8 = y$ e $2y + 4x = 118$. O conteúdo matemático mudou de resolvedor para resolvedor.

Provar que as diagonais dum paralelogramo se intersectam nos seus pontos médios.

A sua resolução pode ser feita usando vectores ou usando as coordenadas cartesianas. O primeiro resolvedor usa um conteúdo matemático diferente do que usa o segundo resolvedor.

Problemas com conteúdo diferente e estrutura matemática similar:

Joana comprou 3 Kg de rebuçados a 110$00 cada Kg. Quanto gastou ao todo?

Rui andou de carro durante 3 horas a 110 Km à hora. Quantos Km andou ele?

Maria trabalhou três horas e ganhou 110$00 por cada hora. Quanto ganhou ela ao todo?

Estes problemas, embora de tipos diferentes, têm a mesma estrutura matemática pelo que o algoritmo de resolução é exactamente o mesmo.

Também a presença ou ausência de palavras chave ou pistas verbais podem variar de problema para problema, enquanto a estrutura matemática se mantém. No Quadro 10 apresenta-se uma lista de palavras chave.

Quadro 10
Palavras Chave

ADIÇÃO		SUBTRACÇÃO		MULTRIPLICAÇÃO	DIVISÃO
soma	juntamente	diferença	menos	produto	quociente
ao todo	mais do que	resto	menos do que	vezes	dividido
total	maior do que	baixar	diminuído	multiplicação	por
mais	aumentado	perder	menor do que	cada	cada
junto	elevado	levar	subtraído		
lucro	ganho	gastar	troco		

Os problemas seguintes apresentam pistas verbais:

António tem quatro bolas. Maria tem oito bolas. Quantas bolas têm eles juntamente?

António tem quatro bolas. Maria tem oito bolas. Quantas bolas têm eles ao todo?

Problemas que incluem palavras chave, mas que podem conduzir a pistas erradas:

Teresa tem catorze bonecas. Ana tem quatro bonecas mais que Teresa. Quantas bonecas tem a Ana?

Teresa tem catorze bonecas. Teresa tem quatro bonecas mais que Ana. Quantas bonecas tem a Ana?

O uso de vocabulário matemático específico também afecta a dificuldade do problema:

- Escrever um número no $\square$ que torna verdadeira a frase: $5 \times \square = 50$.
- Encontrar a raiz da equação $5x = 10$.

Problemas com a mesma estrutura podem variar mudando a informação dada, o número de condições que estão explícitas, o conteúdo da incógnita e a informação objectivo. A um problema de "determinar" muitas vezes pode dar-se a forma de um problema de "mostrar", implicando uma mudança de raciocínio directo para raciocínio inverso.

Determinar as raízes da equação $3Z^2 + 2Z + 1 = 0$, onde Z representa um número complexo.

Mostrar que os números $Z = (-1 \pm i\sqrt{2})/3$ satisfazem a equação, onde Z representa um número complexo.

A variável contexto descreve o envolvimento ou representação do problema que muitas vezes pode ser mudado sem afectar a estrutura do problema. Tais mudanças podem afectar substancialmente a dificuldade do problema.

Apresentamos alguns exemplos que se referem à formulação ou representação dum problema (simbólica, verbal, icónica ou manipulativa):

- $2 + 3 = ?$
- Luís tem dois blocos. Ele comprou três blocos mais. Quantos blocos tem ele ao todo?
- Quantos blocos há ao todo? (ver Figura 3)

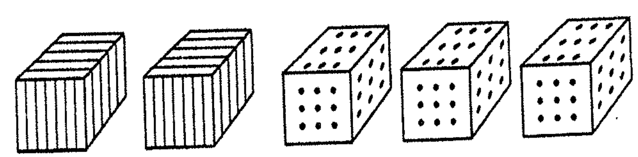


Figura 3. Representação simbólica

A resolução do problema num nível manipulativo é mais fácil e necessária para se progredir para um nível icónico. Só depois se poderá trabalhar em níveis simbólicos e verbais.

Relativamente ao contexto verbal dum problema, esta categoria inclui, entre outros, problemas familiares *versus* não familiares e problemas convencionais *versus* imaginativos.

Um problema muito familiar:

José tem 47 berlindes. Ele perde 12 berlindes. Com quantos berlindes ficou?

O problema seguinte descreve uma situação que já não é familiar para muitos alunos:

O Sr. Silva meteu 55 Kg de algodão puro na máquina. Recuperou 32 Kg de fio de algodão. Quantos Kg de semente obteve?

Um problema convencional do tipo dos que surgem nos livros escolares, sem informação relevante, isto é, o mais curto, o mais simples e com linguagem o mais directa possível.

Os bilhetes para a festa da escola custam 100$00. O 5º ano vendeu 120 bilhetes e o 6º ano vendeu 132. Quanto dinheiro mais fez o 6º ano do que o 5º ano?

Um problema imaginativo descreve elementos de situação total apelando à imaginação, mas cuja presença não é necessária para compreender os elementos matemáticos da situação:

Os rapazes e meninas do 5º e 6º ano de Escola Preparatória Paulo Quintela pretendem juntar dinheiro para fazer uma visita de estudo e resolveram fazer uma festa. Os alunos dos dois anos entraram em competição para ver quem vendia mais bilhetes. Os bilhetes custavam 100$00 cada. O 5º ano vendeu 120 bilhetes e o 6º ano vendeu 132. Quanto dinheiro mais fez o 6º ano do que o 5º ano?

Como podemos observar com estes exemplos, a variação nas variáveis de conteúdo e contexto fornece ao professor uma diversidade de problemas com diferentes graus de dificuldade que contribuem para desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas.

Variação de Estrutura e Processos Heurísticos

Outra aplicação das variáveis tarefa no ensino está ligada com a possibilidade de criar problemas com sintaxe, conteúdo e contexto constantes fazendo variar a estrutura. Tais problemas permitem ao aluno ter em atenção as diferenças na estrutura matemática do problema mais do que nos processos de descodificação e tradução matemática do seu enunciado e associar cada problema com os processos heurísticos que podem ser usados na sua resolução.

Consideremos o seguinte problema:

Num supermercado venderam dois tipos de frutos secos. Avelãs ao preço de 25$00 o saco e amêndoas ao preço de 45$00 o saco. Venderam 50 sacos de avelãs e 40 sacos de amêndoas. Quanto dinheiro juntaram ao todo?

Uma variante deste problema em que se altera a estrutura mantendo a sintaxe, conteúdo e contexto pode ser:

Num supermercado venderam dois tipos de frutos secos. Avelãs ao preço de 25$00 o saco e amêndoas ao preço de 45$00 o saco. Venderam 100 sacos de frutos por 3300$00. Quantos sacos de cada tipo de frutos venderam?

A solução deste problema requer a resolução de uma equação algébrica ou um processo de tentativa e erro.

Ou ainda:

> Num supermercado venderam dois tipos de frutos. Avelãs ao preço de 25$00 o saco e amêndoas ao preço de 45$00 o saco. Venderam 50 sacos de avelãs e fizeram 1700$00 ao todo. Quantos sacos de amêndoa venderam?

Em cada um destes problemas foram usados algoritmos diferentes. A semelhança da sintaxe, do conteúdo e do contexto torna mais fácil para o estudante detectar as razões das diferenças entre os problemas:

Problemas com ausência ou excesso de informação:

> O Sr. Silva coloca telefones. Colocou 60 telefones. Quantos telefones colocou por dia?

> Em que número estou a pensar sabendo que a soma de 8 com o meu número é 32 e a diferença entre 12 e o meu número é 12?

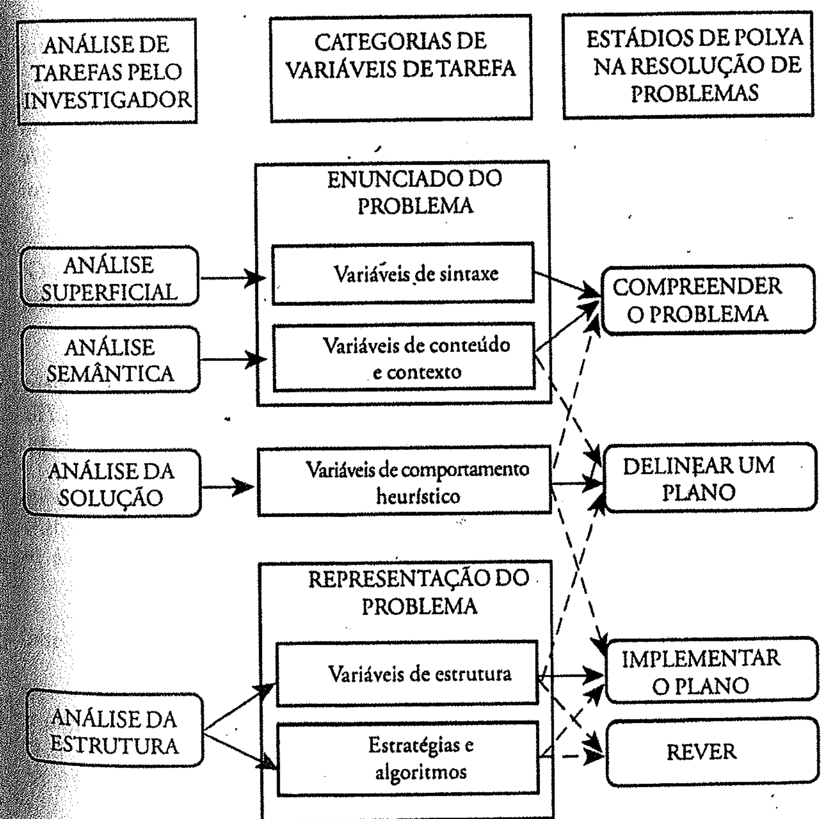
A consciencialização da estrutura de um problema permite ao aluno reconhecer a ausência de informação necessária à resolução do problema e indicá-la, assim como assinalar a presença de informação supérflua e ainda reformular o enunciado apenas com a informação necessária.

Os problemas apresentados podem ser classificados de rotina ou *standard.* Exemplos de problemas não rotineiros foram já apresentados anteriormente e estudados o seu estado-espaço.

Na resolução de cada um desses problemas pode usar-se mais do que um processo heurístico: tentativa e erro, trabalhar voltando atrás (utilização da simetria frente-atrás), decomposição do problema em sub-problemas e outros.

Para finalizar, apresentamos no Quadro 11 um esquema de Kilpatrick (1984) que evidencia as relações entre a análise de tarefas pelo investigador, as categorias das variáveis de tarefa e cada uma das fases do modelo de Polya (1957) na resolução de problemas, indicando modos pelos quais o investigador/professor pode analisar a complexidade da tarefa em si mesmo.

Quadro 11
Uma hierarquia de variáveis de tarefa, métodos de análise de tarefas e estádios de resolução de problemas



Os processos heurísticos têm um papel de relevo para a implementação de um plano servindo de guia para a escolha e desenvolvimento de processos algorítmicos. Variáveis de conteúdo, contexto e sintaxe são mais relevantes para a compreensão do problema, variáveis de estutura são essenciais para a implementação do plano. A relação entre estrutura do problema e comportamentos heurísticos sugere a consolidação destes tipos de variáveis na representação do problema.

Referências

Balacheff. N. (1990). Towards a problematics for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 259-272.

Bruner, J. S. (1964). Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics. In E. R. Hilgard (Ed.), *Theories of learning and instruction: The 63rd yearbook of the national society for the study of education.* Chicago: University of Chicago Press.

Caldwell, J. (1979). Syntax, content, and context variables in instruction. In G. Goldin & C. E. McClintock (Ed.), *Task variables in mathematical problem solving.* Columbus, OH: ERIC.

Charles, R. I. (1985). The development of a teaching strategy for problem solving. *Paper presented at the research presession of the annual NCTM meeting,* San Antonio, TX. (citado por F. K. Lester & R. I. Charles, 1992).

Lester, F. K. & Charles, R. I. (1992). *A framework for research on problem-solving instruction.* In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *New Information technologies and mathematical problem solving: Research in contexts of practice.* Berlin: Springer.

Feigenbaum, E. & Feldman, J. (Eds.) (1963). *Computers and thought.* New York: McGraw-Hill.

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.), *Educação matemática: Temas de investigação.* Lisboa: IIE & Secção de Educação Matemática da SPCE.

Gelernter, H. & Rochester, N. (1958). Intelligent behavior in problem-solving machines. *IBM Journal of Research and Development, 2*(4), 336-345.

Goldin, G. (1979). Structure variables in problem solving. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds), *Task variables in mathematical problem solving* . Columbus, OH: ERIC.

Goldin, G. A. (1982). The measure of problem solving outcomes. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research.* Philadelphia: The Franklin Institute Press. (citado por F. Lester, 1983).

Goldin, G. (1985). Structure variables in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* London: LEA.

Jerman, M. (1971). *Instruction in problem solving and an analysis of structural variables that contribute to problem-solving difficulty* (Technical Report Nº 180). Standford: Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences.

Hill, T. J. (1974). *Mathematical challenged II, plus six.* Reston, VA: NCTM. (citado por N. L. Webb, 1979).

Kantowski, M. G. (1974). Processes Involved in mathematical problem solving (Tese de Doutoramento). *Dissertation Abstracts International, 36*, 2734A.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and soviet studies of problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Paper from research workshop.* Columbus, OH: ERIC.

Kilpatrick, J. (1968). Analyzing the solution of word problems in mathematics. (Tese de doutoramento). *Dissertation Abstracts International, 28*, 4380A.

Kilpatrick, J. (1984). Reflection and recursion. In M. Carss (Ed.); *Proceedings of the fifth international congress on mathematical education.* Boston.

Kilpatrick, J. (1991). *The chain and arrow: from the history of mathematics assessment.* Paper presented in ICMI study on assessment in mathematics education and its effects, Calonge, Espanha.

Krulik, S. & Rudnick J. A. (1984). *A sourcebook for teaching problem-solving.* Boston: Allyn & Bacon, Inc.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press. (citado por N. L. Well, 1979).

Kulm, G. (1979). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC.

Lester Frank K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Aquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press, Inc.

Lester, F. K. (1985). Methodological consideration in research on mathematical problem-solving instruction. In E. A. Silver, *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* London: Ed. Lawrence Erlbaum Associates.

McClintock, C. E. (1979). Heuristic processes as task variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC.

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, Nj: Prentice-Hall.

Nilsson, N. J. (1980). *Principles of artificial intelligence.* Palo Alto, CA: Tioga.

Nisbet, R. E. & Wilson, T. D. (1977). Tellig more than we can know: Verbal reports on mental processes. *Psychological Review, 84*(3), 31-59. (citados por G. Kulm, 1979).

Polya, G. (1957). *How to solve it.* New York: Doubleday.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery.* New York: Wiley.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Aquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press, Inc.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Silver, E. A., Branca, N. A. & Adams, V. M. (1980). Metacognition: The missing link in problem solving?. In R. Karplus (Ed.), *Actas do 4º encontro internacional do PME.* Berkley: University of California.

Webb, N. L. (1979). Content and context variables in problem tasks. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC.

Wilson, J. (1967). Generality of heuristics as an instructional variable (Tese de doutoramento). *Dissertation Abstracts International, 28* 2575A.